5 Veniamo ora all'ellissoide di rivoluzione di semi assi a e b. L'equazione dell'ellisse meridiana riferita ai suoi assi ed origine nel centro è

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

sarà $\varepsilon=\frac{a-b}{a}$ lo schiacciamento $e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$, $e'^2=\frac{a^2-b^2}{b^2}$ è quella che Jordan chiama seconda eccentricità, dicendo e la solita eccentricità, sia $c=\frac{a^2}{b}$. Sul parallelo di latitudine φ stiano due punti, la differenza di longitudine fra essi, ossia l'angolo compreso fra i meridiani che passano per essi sia

$\Delta\theta$, pongo $W^2=1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi$, $V^2=1+e'^2\cos^2\varphi$.

$$M=\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}=\frac{a(1-e^2)}{W^3}$$, raggio di

curvatura del meridiano dato anche da $M=\frac{c}{V^3}$: $N=\frac{a}{W}=\frac{c}{V}$, gran normale e raggio di curvatura della sezione normale perpendicolare al meridiano. Sia s l'arco di geodetica che unisce i due punti A e B sopra indicati, il triangolo P(polo) A e B è isoscele, e gli angoli che la geodetica fa coi due meridiani nel triangolo sono uguali, chiamiamoli z, in A, z sarà l'azimut della geodetica. Per la risoluzione del problema ci varremo di due formole date dal compianto amico mio Prof. Nicodemo Jadanza nel suo lavoro "Sul calcolo della distanza di due punti di note posizioni geografiche, negli Atti

6 1

$s \operatorname{sen} z = \frac{N}{\varrho} \Delta\theta \cos\varphi \left\{ 1 - \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{6\varrho^2} \Delta\theta^2 \right\}$ (A)

Elevando al quadrato le (A), sommando, estraendo la radice quadrata dalla somma, svolgendo in serie il radicale e trascurando i termini superiori al secondo si ha:

$s = \frac{N}{\varrho} \Delta\theta \cos\varphi \left\{ 1 - \frac{1}{24} \frac{\Delta\theta^2}{\varrho^2} \operatorname{sen}^2\varphi \right\}$ (B)

La natura del problema esclude senz' altro il caso di $\Delta\theta = 0$, cioè dei due punti del parallelo coincidenti e di $\varphi = 90^\circ$, polo.

Divido la seconda delle (A) per la prima avrò: $\operatorname{tag} z = \dfrac{1 - \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{6\varrho^2} \Delta\theta^2}{\frac{\operatorname{sen}\varphi \Delta\theta}{2\varrho}}$

Fatto $\varphi = 0$, cioè considerando due punti posti sull'equatore si ha: $\operatorname{tag} z = \infty$ $z = 90^\circ$, cioè l'azimut della geodetica, che è l'equatore stesso.

L'espressione di $\operatorname{tag} z$ per la sfera si ha subito risolvendo il triangolo isoscele PAB, di cui son dati i due lati eguali $90 - \varphi$, e l'angolo compreso $\Delta\theta$ e si ha

$$\operatorname{tag} z = \frac{\cot \frac{\Delta\theta}{2}}{\operatorname{sen}\varphi} \; ; \text{ per } \varphi = 0$$

$\operatorname{tag} z = \infty$ e $z = 90^\circ$ come per l'ellissoide, naturalmente.

Veniamo ora a trovare la differenza fra le lunghezze dell'arco di parallelo compreso fra due punti e la geodetica che passa per essi, sull'ellissoide di rivoluzione. La lunghezza dell'arco s di geodetica è data dall'equazione (B). La lunghezza dell'arco di parallelo di ampiezza $\Delta\theta$ è $p = \frac{N}{\rho}\Delta\theta\cos\varphi$. sarà

$$p - s = \frac{N}{\rho}\Delta\theta\cos\varphi - \frac{N}{\rho}\Delta\theta\cos\varphi + \frac{N}{\rho}\cdot\Delta\theta\cos\varphi\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{24\rho^2}\Delta\theta^2 =$$

(c)

$$= \frac{N}{24\rho^3}\operatorname{sen}^2\varphi\cos\varphi\,\Delta\theta^3$$

Introduco ora alcune notazioni usate da Jordan (Handbuch der Vermessungskunde. Vol. III p. 447. edizione 1907). $\frac{\rho}{N} = [2]$. $\frac{\mu}{24\rho^2} = [3]$, μ è il modulo dei logaritmi ed è $\log\frac{\mu}{24\rho^2} = 4.6287228$ e per unità della settima cifra decimale, $\log.\mu = 6.6377843$. Con ciò la (c) diviene

(D)

$$p - S = \cancel{\frac{\Delta\theta\cos\varphi}{[2]}}\ \frac{[3]}{\mu}\frac{\Delta\theta^3}{[2]}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi,$$

ossia per una stessa latitudine, e nei limiti dell'approssimazione adottata è proporzionale al cubo dell'ampiezza della differenza di longitudine fra i due estremi dell'arco di parallelo che si considera.

Alla formola (D) si giunge ~~anche~~ facilmente colle formole date da Jordan al luogo citato e pagine seguenti, correggendo alcuni errori di stampa; errori che forse furono corretti nelle edizioni successive 1916, 1923 di quel volume. Jordan ha dato delle tavole per calcolare il simbolo [2] che dipende da φ. Anche Jadanza ha calcolato tavole per l'impiego delle sue formole.

Proponiamoci ora di trovare per quale latitudine, e per una medesima longitudine sia massima la differenza $p-s$, che è data dalla formola (D),

$$p-s=\frac{[3]}{[2]\,\mu}\,\Delta\theta^3 \operatorname{sen}^2\varphi\cos\varphi,$$

nella quale l'espressione rappresentata dal simbolo [3] è indipendente da φ, mentre quella simboleggiata da [2] ne dipende, essendo data da

$$[2]=\frac{\frac{\rho}{a}}{\sqrt{1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi}}.$$

~~Il fattore~~ ~~$\frac{\Delta\theta^3\,[3]}{\mu}$ è indipendente da φ, quindi possiamo rappresen~~ quindi sarà

$$p-s=\frac{[3]}{\mu}\,\frac{\Delta\theta^3}{\frac{\rho}{a}}\operatorname{sen}^2\varphi\cos\varphi\sqrt{1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi},$$

e ponendo il fattore indipendente da φ

$$\frac{[3]}{\mu}\,\frac{\Delta\theta^3}{\frac{\rho}{a}}=\frac{a\,[3]}{\mu}\,\frac{\Delta\theta^3}{\rho}=m,$$ sarà

$$p-s=m\operatorname{sen}^2\varphi\cos\varphi\sqrt{1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi}.$$

Applico il solito procedimento per trovare il massimo occupandomi solo del fattore che contiene φ dal quale quel massimo dipende.

Ciò facendo trovo

$$\operatorname{sen}\varphi=\sqrt{\frac{(3+3e^2)\pm\sqrt{9+9e^4-14e^2}}{8e^2}}$$

Si deve considerare sotto il radicale il segno inferiore, perchè $\operatorname{sen}\varphi$ deve essere < 1.

Per la sfera si ha

$p - s$ (parallelo − cerchio massimo) =

$= \Delta\theta \cos\varphi - 2 \operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\frac{\Delta\theta}{2} \cos\varphi\right)$

ed il valore di φ massimo per un dato $\Delta\theta$

è $(\cos\varphi)^2 = \frac{1}{\left(\operatorname{sen}\frac{\Delta\theta}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)^2}$.

(Salvo in[illegible] avuto prese qualche cantonata!)