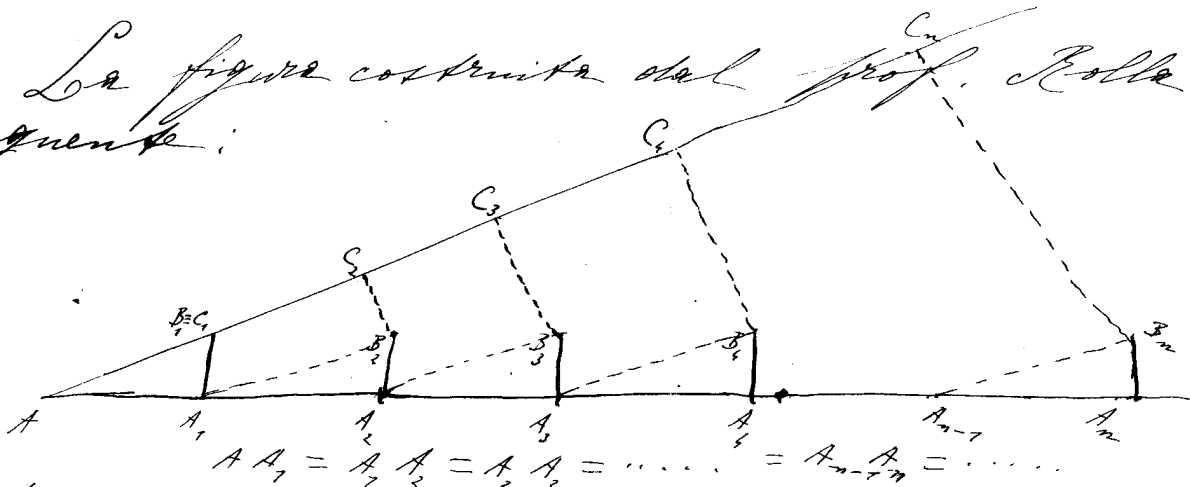


La figura costruita dal prof. Hölle era la seguente:



$$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_{n-1}A_n = \dots$$

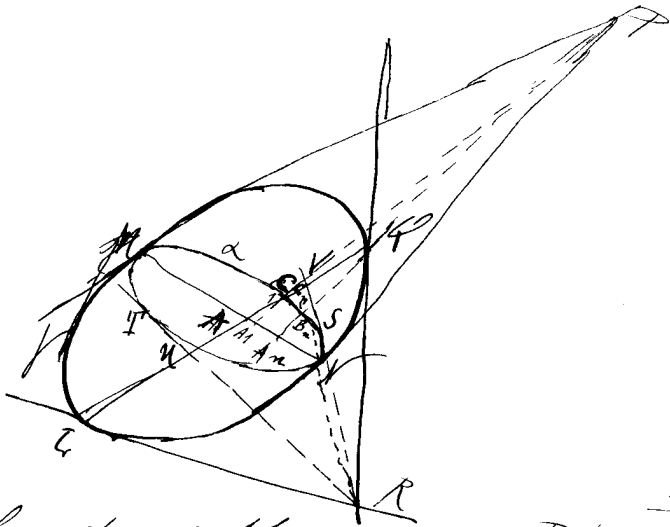
~~tra~~  $A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3 = \dots = A_nB_n = \dots$ , e tutti questi

segmenti sono perpendicolari alla  $AA_1$ ; inoltre  $B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3, \dots, B_nC_n$  sono normali alla  $AC_1$ .

Allora il quadrangolo  $AA_nB_nC_n$  è maggiore di  $n$  volte il triangolo  $AA_1B_1$ , e vale:

$$AA_nB_nC_n > n AA_1B_1$$

segue che per  $n$  tendente a infinito l'area di  $AA_nB_nC_n$  tende a infinito. Questo è il ragionamento del Hölle. ~~Esattamente~~ Gi osserva che i punti  $C_1, C_2, \dots, C_n$  non si seguono sulla  $AC_1$  nello stesso ordine dei punti  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sulla  $AA_1$  nella geometria di Lobacsevski; per provarlo si usa la rappresentazione nota di tale geometria. Gi chiama piano la porzione di piano interna a una conica  $f$ ; ~~retta~~ punto un punto interno alla conica; retta un segmento avente i suoi estremi sulla conica, ~~movimento~~ una omografia che muta la conica  $f$  in se' e punti interni in punti interni. Due segmenti si dicono eguali, in questa rappresentazione, se esiste una omografia che muta ~~in se'~~  $f$  in se' e i due segmenti uno nell'altro; due angoli  $\angle p'q'$  e  $\angle r's'$  si dicono eguali se esiste una omografia che muta ~~in se'~~  $f$  in se', il punto  $rs$  nel punto  $r's'$ , e in  $p'$  e  $q'$  in  $p$  e  $q$ ; si chiama lunghezza di un segmento  $AB$  il valore  $\frac{1}{2} \log(ABMN)$ , dove  $M, N$  sono le intersezioni della retta  $AB$  con  $f$ , e angolo  $\angle r's'$  il valore  $\frac{1}{2} \log(rs'mn)$  dove  $m$  e  $n$  sono le tangenti (complesse coniugate), condotte dal punto  $rs$  a  $f$ .



Si prova che due rette  $MN$  e  $PA_n$  <sup>si dicono</sup> ~~sono~~ perpendicolari se esse sono coniugate (ognuna passa per il polo dell'altra rispetto a  $f$ ), e che il luogo dei punti equidistanti da una retta  $PA_n$  e una conica bitangente a  $f$  in  $M$  e  $N$ .

Si prende dunque una retta  $MN$  e su questa un punto  $A_1$ . Il triangolo  $ACA_1$  è rettangolo in  $A_1$ ; dunque la  $AC$  passa per  $P$ . Nella figura precedente da vari punti  $A_n$  della retta  $AA_1$  si erano condotte le normali alla  $AA_1$ ; qui congiungeremo i punti  $A_n$  con  $P$ ;  $PA_n$  si stacca un segmento  $A_n B_n = AC_1$ ; dunque  $B_n$  su una conica  $\alpha$  bitangente a  $f$  in  $M$  e  $N$  e passante per  $C_1$ , luogo dei punti che da  $MN$  hanno distanza eguale ad  $AC_1$ . Dai punti  $B_n$  di  $\alpha$  così costruiti sono condotte le perpendicolari alla  $AC_1$ ; bisogna allora costruire il polo  $R$  di  $AC_1$  e congiungere  $R$  con  $B_n$ ; l'intersezione della  $RB_n$  colla  $AC_1$  sarà il punto  $C_n$ . Vediamo se i punti  $C_n$  si possono allontanare indefinitamente sulla  $AC_1$ , cioè possono avvicinarsi indefinitamente ai punti  $T$  e  $Q$  intersezioni della  $AC$  con  $f$ . Le rette per  $R$  che incontrano  $\alpha$  sono comprese <sup>nell'angolo formato</sup> dalle rette per  $R$  tangenti ad  $\alpha$ , e siano le  $RS$  e  $RT$  e poiché  $R$  e  $T$  sono interni a  $f$  ( $\alpha$  è interna a  $f$ ) le  $RS$  e  $RT$  sono ~~comprese~~ interne all'angolo  $T R Q$  e i punti  $U$  e  $V$  intersezioni di  $AC_1$  con  $RT$  e  $RS$  sono interni al segmento  $T Q$ ; i punti  $B_n$  sono anche contenuti nel segmento  $UV$  e quindi non