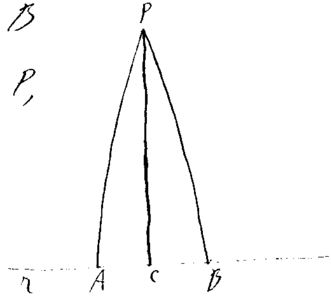
Illustre Professore,

Certo a me manca l'essere stato scolaro Suo e mi manca l'aiuto di qualche Suo scolaro, e troppo mi ci vuole a dare alle mie idee la perfetta forma logica; ma se ciò, com'è ovvio, mi sforzerò di riuscire a fare, mi sembra però di essere ormai riuscito nella dimostrazione del quinto postulato.

La geometria del Riemann, infatti, a ben considerare, contraddice non solo al quinto, ma anche a tutti gli altri postulati, espliciti e impliciti, di Euclide. D'altro lato, se due perpendicolari in A e in B a una retta r s'incontrano in P, e si hanno così il triangolo APB birettangolo isoscele, preso il

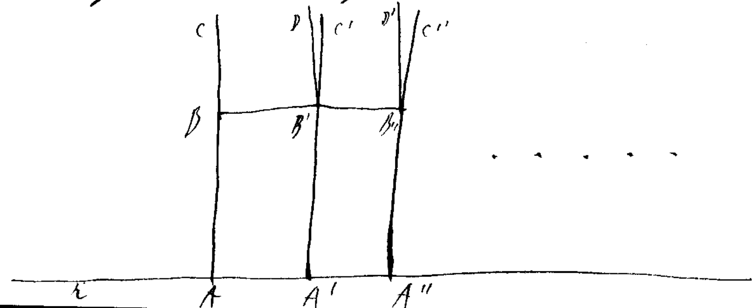


punto di mezzo di AB, C, e congiungendo P con C, anche i due triangoli APC e CPB sono ancora birettangoli isosceli: da ciò noi traiamo che AB è in ogni suo punto equidistante da P ed è, invece che un segmento rettilineo, un arco di cerchio.

Se costruiamo poi la figura simmetrica alla nostra rispetto ad r e chiamiamo P' il punto corrispondente a P, abbiamo che i punti di AB sono equidistanti, nello stesso modo che da P, anche da P', e il piano dell'arco AB non contiene allora il segmento PP', ma gli è perpendicolare nel punto di mezzo.

Così credo ormai che valga l'altra mia dimostrazione della contraddittorietà intrinseca alla geometria del Lobacevski.

Mi permetto di ripeterla.



tematica la pura logica, la pura forma, da ogni materia, è un fatto di estrema importanza: ma di dove ~~abbiamo~~ traiamo quella logica se non dall'intima essenza logica della stessa natura?

Con ciò, allora, si giustifica di nuovo il parlare di verità, ossia di un pensiero che corrisponde più o meno adeguatamente all'intima essenza del reale. E Copernico ci ha dato un sistema certo più vero di quello di Tolomeo, tanto più che nel suo, in modo meraviglioso e certo non casuale, hanno trovato la loro spiegazione tanti fenomeni antichi e nuovi, che altrimenti ~~ma~~ erano o sarebbero stati misteriosi, inesplicabili e anzi contraddittori.

Per ciò, forse, ripeto, l'ente ragionevole dello spazio sferico del Poincaré potrebbe trovar contrasto tra l'esperienza e l'intima mia esigenza logica.

Aggiungo a questo proposito che l'esigenza logica riguardo al mondo dell'intuizione si afferma generalmente proprio in contrasto con l'esperienza, e, anche per ciò, non deriva quindi da essa.

Credo che a chiarire il mio pensiero possa ben servire anche un altro esempio.

Quando gli uomini pensavano la terra come piana, se avessero conosciuto bene le diverse terre e avessero cercato di rappresentarle insieme su un piano, avrebbero trovato delle strane contraddittorietà. Tutti o quasi tutti, allora, si sarebbero certo rassegnati a queste, ma qualche eventuale genio avrebbe anche potuto pervenire a considerare errato il punto di partenza, che pure sembrava il dato di esperienza più ovvio e più naturale.—

Vedrò se potrò riuscire a considerare più a fondo l'articoletto del Cassina, per la

Data una retta r e due perpendicolari innalzate nello stesso senso da due punti qualunque A e A', posso sempre trovare su queste due punti B e B' equidistanti da r e tali che il quadrangolo $AA'B'B$ abbia, ad es., la deficienza di $1°$.

Prendo ora sul prolungamento di AB un punto qualunque C e sul prolungamento di $A'B'$ il punto C', e tiro la BD tale che

$$C\hat{B}B + B\hat{B'}D = 180°$$

Abbiamo allora

$$D\hat{B'}C' = 1°$$

Preso ora sulla r il nuovo punto A'' tale che $AA' = A'A''$, innalzo da questo una nuova perpendicolare nello stesso senso delle precedenti. Prendo su questa il punto B'' tale che $A''B'' = A'B'$ e, più sopra, un altro punto C''. Congiungo B' con B''.

Se ora conduco la $B''D'$ tale che

$D\hat{B}'B'' + B'\hat{B}''D' = 180°$,

abbiamo anche

$D'\hat{B}''C'' = 2°$.

E così via.

Ma le $B^n D^{n-1}$ sono ~~tutte~~ semirette ~~[illegible]~~ non secanti fra loro ~~e dirette~~ nello stesso senso di AC, e non dovrebbero per ciò mai incontrare la $\underline{r}$; mentre la $B^{180}D^{179}$ addirittura coincide con la semiretta $B''A''$. L'andamento della figura diventa invece naturale e logico quando la $\underline{r}$ sia un circolo.

Mi permetto di richiamare anche l'altra mia dimostrazione, più semplice e più comprensiva, che in nessuna delle geometrie non euclidee è possibile, dato il teorema di Lambert, un poligono di grandezza arbitraria, mentre qualsiasi grandezza può certo assumere la faccia del poliedro regolare inscritto su una sfera al variare del raggio di questa.

Queste mie dimostrazioni, allora, se valgono, già annullano col fatto il valore delle dimostrazioni della indimostrabilità del ~~dimos~~ postulato, che in qualche senso e modo devono quindi essere tutte sofistiche: ho cercato per ciò, e non è detto che io vi sia riuscito, di trovare in queste il sofisma.

Così, la rappresentazione per mezzo di una conica mi è apparsa insufficiente, poichè l'unicità della polare per un punto a un diametro presuppone il quinto postulato. — Aggiungo qui che una retta di un piano lo divide in due parti congrue, tra i punti delle quali si può sempre stabilire una relazione di simmetria; e ciò non mi sembra possibile in una conica se ci si riferisce a corde che non siano diametri.

La possibile rappresentazione della geometria del Riemann per mezzo di una sfera... già di per sè chiarisce che non siamo più su un piano.

Ho considerato poi la rappresentazione dataci dal Poincaré: e qui certo vi sono dei punti preliminari in cui mi sembra di potere e di dovere discordar da Lei.

Che il postulato di Euclide sia sperimentale, non direi.

Come non è certo un dato di esperienza l'intuizione nostra di uno spazio infinito: ~~spaziale~~; mi pare che si possa e si debba affermare che essa è una intuizione fondamentale a priori, originaria.

Analogamente è in noi un principio di geometrizzazione, pure a priori.

Quell'intuizione, allora, è certo unica; e quel principio è pure unico.

Aggiungo che senza un'intuizione fondamentale comune non avrebbe senso nemmeno il nostro parlare.

Che si possa poi astrarre nella malezione Sua, s'intende, che si è compiaciuto di mandarmi in dattiloscritto, mi sarà preziosa per quanto potrò riuscire a costruire con piena coerenza nei fondamenti e nei particolari quel piccolo edificio di geometria al quale sto con intenso studio e con grande amore lavorando.

Occorre che io Le esprima l'immensa gratitudine del mio animo per l'estrema Sua gentilezza nei miei riguardi?

Con devoto ossequio

Dev.mo

Giuseppe Roller

Carrara (Piazza Alberica, 14),

19 agosto 1931

0,90

Risposto li. 21 —