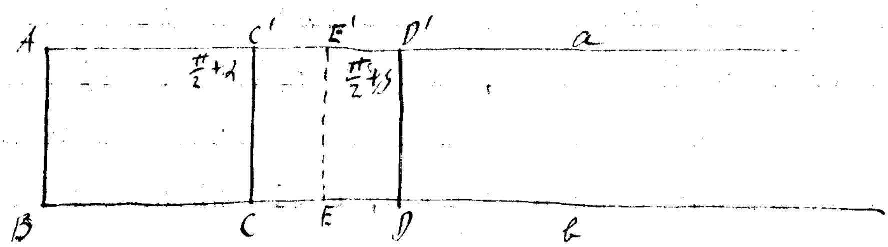
# DIMOSTRAZIONE DEL POSTULATO DI EUCLIDE

---

Teniamo presente che se la somma degli angoli di un triangolo è uguale a due retti, altrettanto deve dirsi per qualsiasi altro triangolo, e così pure se quella somma è maggiore o minore. Ma ciò analogamente vale per la somma degli angoli di un quadrilatero, che sarà sempre uguale o maggiore o minore di quattro retti.

E teniamo pure presente l'importante risultato che ha ottenuto il Lambertì, speculando sulla questione del postulato di Euclide, e che si riferisce alle aree dei poligoni: " Chiamando deficenza di un triangolo la differenza fra due angoli retti e la somma dei suoi angoli, le aree dei triangoli risultano proporzionali alle rispettive deficenze". Com'è ovvio, questo teorema vale anche pei poligoni.

Ma allora, preso un segmento A B, si tirino le perpendicolari nello stesso senso da A e da B; & la a, e la b ; e da due punti qualunque della b, C e D si tirino le perpendicolari fino ad incontrare la a in C' e D'.




Gli angoli $A\widehat{C'}C$ e $A\widehat{D'}D$ o sono entrambi retti o entrambi maggiori o minori di un retto. Siano maggiori, e il primo sia $\frac{\pi}{2}+\alpha$, e il secondo, $\frac{\pi}{2}+\beta$. Poichè $\alpha$ e $\beta$

costituiscono la deficenza dei due quadrilateri

$ABCC'$ e $ABDD'$, e

$$ABDD' > ABCC'$$

anche

$$\beta > \alpha.$$

Ciò che vale anche nel caso che si abbiano come valori dei due angoli $A\widehat{C'}C$ e $A\widehat{D'}D$, $\frac{\pi}{2}-\alpha$ e $\frac{\pi}{2}-\beta$

Altra cosa che possiamo rilevare è che

$$AB \neq CC'$$

Infatti, se $CC'$ fosse uguale ad $AB$, si potrebbe prendere un quadrilatero $A_1 B_1 C_1 C_1'$ uguale ad $ABCC'$ e sovrapporlo ad esso, ribaltato, ossia in modo che $C_1B_1$ coincida con $BC$ e $C_1C_1'$ cada su $BA$ e $B_1A_1$ su $CC'$. Ma ciò renderebbe l'angolo $A\widehat{C'}C$ retto, contro l'ipotesi.

Così pure è facile dimostrare che

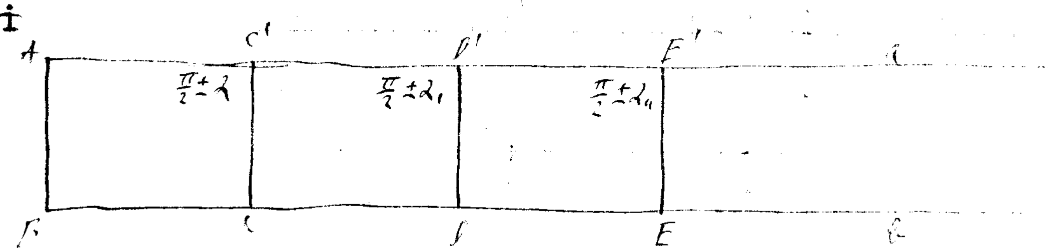
$$CC' \neq DD'$$

Un ragionamento analogo al precedente ci mostra infatti che se $CC'$ fosse uguale a $DD'$ l'angolo $C\widehat{C'}D'$ dovrebbe essere uguale all'angolo $C'\widehat{D'}D$; ma ciò non può essere perchè il primo è $\frac{\pi}{2}-\alpha$ e il secondo $\frac{\pi}{2}+\beta$. - Aggiungiamo che se tiriamo la perpendicolare dal punto di mezzo di $CD$, $E$, fino a incontrare in $E'$ la $a$, dall'uguaglianze dei due quadrilateri $CEE'C'$ e $EDD'E'$ si avrebbe anche che la $EE'$ sarebbe perpendicolare in $E'$ alla $a$, e ciò dimostrerebbe senz'altro il postulato di Euclide.

Non occorre aggiungere che tutto il ragionamento vale anche per $\alpha$ e $\beta$ negativi.

E' facile da tutto ciò dedurre che se, nel caso della verità del postulato di Euclide, le due perpendicolari in A e B ad A B si mantengono sempre alla stessa distanza, nel caso che il postulato sia falso, esse rette dovranno invece sempre avvicinarsi o allontanarsi.

Dopo ciò io riprendo il segmento A B e tiro di nuovo le due perpendicolari nello stesso senso, a e b. Sulla b, a partire da B prendo dei segmenti uguali: B C, C D, D E..... e dai punti C, D, E........innalzo le perpendicolari che incontrino la a in C', D', E',.....e siano $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\frac{\pi}{2}\pm\alpha_1$, $\frac{\pi}{2}\pm\alpha_{11}$ .... ~~gli~~




angoli che queste perpendicolari fanno con la a dalla parte di A B.

Gli angoli

$$\alpha, \alpha_1, \alpha_{11}, \ldots \alpha_n$$

formano, com'è ovvio, serie crescente.

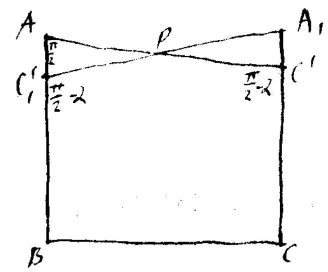
Ma intanto un caso non euclideo possiamo immediatamente escluderlo; ~~come il solo caso non euclideo possibile è da~~ quello che la a vada allontanandosi dalla b.

Infatti, se ciò fosse, i successivi quadrilateri con base uguale a B C andrebbero aumentando di superficie, e il quadrilatero somma dei primi $n$ quadrilateri avrebbe una superficie maggiore di $n$ volte il primo quadrilatero. Ma anche la deficenza va crescendo secondo lo stesso rapporto; e poichè la deficenza del quadrilatero somma è $\alpha_{n-1}$, si avrebbe

$$\alpha_{n-1} > n\alpha$$

Ciò che significa che al crescere illimitato di $n$, la deficenza pure andrebbe crescendo oltre ogni limite. Ma come potrebbe ciò avvenire? Quando $\alpha_n$ fosse uguale a $\frac{\pi}{2}$ la a coinciderebbe con una perpendicolare alla b; superando $\frac{\pi}{2}$, ritornerebbe indietro: il nostro quadrilatero, per di più, diventerebbe infinito, e come la nostra deficenza diventerebbe infinita?

Ma nel caso degli $\alpha$ negativi, la a dovrebbe per l'appunto allontanarsi dalla b. Infatti riprendiamo il nostro primo quadrilatero A B C C' e supponiamo $A\widehat{C'}C = \frac{\pi}{2}-\alpha$ e $CC' < AB$.




Prendiamo su B A il segmento $BC_1' = CC'$ e, prolungato $CC_1'$ prendiamo $CA' = BA$, e congiungiamo $C_1'$ con $A_1$: otteniamo così $C_1'BCA' = ABCC'$. Chiamando P il punto d'intersezione di $AC'$ con $A_1C_1'$, noi abbiamo questo assurdo che il triangolo $PAC_1'$ è rettangolo in A e ottusangolo in $C_1'$. Perciò il caso degli $\alpha$ negativi resta senz'altro escluso.

Ma anche ammesso che la a vada continuamente avvicinandosi alla b (caso degli $\alpha$ positivi) noi arriviamo ad una conseguenza contradittoria.

Infatti, se $\alpha_n$ non può mai oltrepassare un certo limite, al crescere indefinito di $n$, la differenza

$$\alpha_n - \alpha_{n-1},$$

ossia la deficienza dei nostri quadrilateri, va sempre diminuendo, tendendo a zero; e tenderà così a zero anche la superficie degli stessi quadrilateri, ~~ma~~ che diverrà più piccola di qualsiasi quantità piccola a piacere.

Ma a ciò contraddice il fatto che, se prendiamo un qualunque $\alpha_1$ diverso da $\alpha$, e formiamo un triangolo che abbia come uno dei cateti B C e, come angolo adiacente al cateto, $\alpha_1$, questo triangolo avrà una superficie sempre minore di quale si sia dei nostri quadrilateri, i quali perciò non possono divenire più piccoli di una quantità piccola a piacere.

27 Febbraio 1930

Giuseppe Vella