Dimostrazione del postulato di Euclide

Premesse

Presuppongo quanto è postulato e dimostrato dal Peano nei suoi "Principii di Geometria logicamente esposti" e nella "Nota" "Sui fondamenti della Geometria" in Riv. di Mat. - Vol. IV.

Postulo in particolare:

a) Due punti individuano una retta;

b) La retta è continua;

c) La retta è infinita;

d) Una retta che ha due punti su un piano vi giace per intero;

e per quanto riguarda la congruenza delle figure:

e) Dato un segmento se ne può sempre costruire uno congruo con esso;

f) Un punto di una retta la divide in due parti (semirette o raggi) tra loro congrue;

g) Una retta in un piano lo divide in

due parti (semipiani) tra loro congrue.

Infine:

h) Il semipiano è una figura convessa.

Notazioni

Dati i due punti $\underline{a}$ e $\underline{b}$ noteremo con

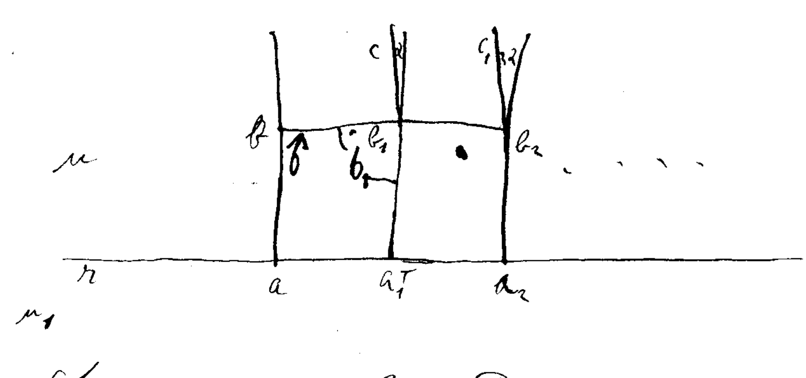
$\underline{ab}$ il segmento congiungente i due punti;

$\underline{a'b}$ il prolungamento dello stesso segmento dalla parte di $\underline{b}$;

$\underline{a'ab}$ il raggio che ha l'origine in $\underline{a}$ e la direzione $\underline{a}\,\underline{b}$.

retta $(a, b) \perp$ retta $(\underline{c}, \underline{d})$ = la retta (a, b) è perpendicolare alla retta (c, d).

Dimostrazione



Sia in un piano la retta $\underline{r}$ e lo divida nei due semipiani μ e μ_1.

Siano ~~Siano~~ anche

$\underline{a}, \underline{a_1}, \underline{a_2} \cdots \varepsilon\, \underline{r}$ $(\underline{a} \,{-}{=}\, \underline{a_1} \,.\, \underline{a}\underline{a_1} \cong a_1 a_2 \cdots)$

$\underline{a'a\,b}, a_1'a_1b_1, a_2'a_2b_2 \cdots \varepsilon\, \mu$ $(\underline{ab} \cong \underline{a_1b_1} \cong \underline{a_2b_2} \cdots$

$: \underline{ab}, \underline{a_1 b_1}, \underline{a_2 b_2} \perp r).$

È inutile dimostrare di nuovo con Euclide che queste semirette non s'incontrano fra loro.

Congiungo poi successivamente $b, b_1, b_2 \dots$

Entro il quadrangolo $\underline{a\,a_1\,b_1\,b}$ noi abbiamo

$$\hat{a} = \hat{a}_1 = 90^\circ$$

$$\hat{b} = \hat{b}_1 \begin{cases} > 90^\circ - \text{ip. ang. ott. (Riemann)} \\ = 90^\circ - \text{ip. ang. retto (Euclide)} \\ < 90^\circ - \text{ip. ang. ac. (Lobacevski)} \end{cases}$$

L'ipotesi angolo ottuso già si esclude quando si è ammessa la retta infinita. Non richiameremo in proposito la ben nota dimostrazione del Legendre. Basterà allora dimostrare contradditoria l'ip. ang. acuto perchè risulti implicitamente dimostrata quella dell'angolo retto o euclidea.

Sia dunque

$$\overset{\hat{b}}{\text{ang}(ba, bb_1)} + \overset{\hat{b}_1}{\text{ang}(b_1 b, b_1 a_1)} = 180^\circ - \alpha$$

sarà di conseguenza

$$\text{ang}(a'b, bb_1) + \text{ang}(b_1 b, a_1' b_1) = 180^\circ + \alpha$$

Tiro allora la semiretta $\underline{b_1' b_1 c}$ tale che

$$\text{ang}(a'b, bb_1) + \text{ang}(b_1 b, b_1' b_1 c) = 180^\circ$$

Sarà

$$\text{ang}(a_1' b_1, b_1' b_1 c) = \alpha$$

Tiro poi la semiretta $b_2' b_2 c_1$ tale che

$$\text{ang}(b_1'b_1c, b_1b_2) + \text{ang}(b_2b_1, b_2'b_2c_1) = 180^\circ$$

Sarà

$$\text{ang}(a_2'b_2, b_2'b_2c_1) = 2\alpha$$

E, continuando in modo analogo, si avrà in generale

$$\text{ang}(a_n'b_n, b_n'b_nc_{n-1}) = n\alpha$$

D'altro lato le semirette $b_n'b_nc_{n-1}$ sono di volta in volta sempre interne alla striscia $(a'ab, aa_n, a_n'a_nb_n)$ e non incontrano nè la semiretta $a'ab$ nè la r, ~~Quindi~~ per ciò, qualunque sia n, si ha sempre

$$\text{ang}(a_n'b_n, b_n'b_nc_{n-1}) < 180^\circ$$

Ma l'ultima disuguaglianza non può essere vera, qualunque sia n, che per $\alpha = 0$; ciò che annulla l'ipotesi del Lobacevski risolvendola in quella euclidea.

Giuseppe Tolla