Vom Verfasser überreicht

Behmann, Prager Vortrag

Antw. Gentzen 29.6

Antw. 30/11.

Dr.H.Behmann
Halle/Saale
Moltkestr.5

Zu d[...] Logik und der Mengenlehre.

1. [...] Whitehead-Russell, Principia [...]ematica.)

[...]griffslogik.

Ist p [...]deutet $\sim p$ die Aussage "nicht p". Sind p und [...]t $p \vee q$ für die Aussage "p oder q" (d.h. mindestens [...] Aussagen trifft zu), $p.q$ für "p und q", $p \supset q$ für "p [...] zu lesen "wenn p, so q" oder "aus p folgt q") [...]valent q" (d.h. p und q bedingen sich wechselsei[...]u oder beide nicht zu).

Ist f[...]d a ein Ding (dies Wort soll im folgenden im weitesten Sinne verstanden werden, also auch Aussagen, Eigenschaften usw. mit umfassen), so bedeutet f(a) oder kürzer fa die Aussage "f kommt a zu", $(x).fx$ "f kommt jedem Ding zu" und $(\exists x).fx$ "f kommt mindestens einem Ding zu". x heisst ein variables Ding oder eine Dingvariable. Insbesondere besagt $(x).fx \supset gx$, dass allen Dingen, denen die Eigenschaft f zukommt, auch die Eigenschaft g zukommt.

Auch Eigenschaften haben ihrerseits wieder Eigenschaften. (Z.B. ist "mindestens einem Ding zukommen" eine Eigenschaft von Eigenschaften.) Können oder sollen für eine Variable nicht beliebige Dinge, sondern nur Eigenschaften eingesetzt werden, so nennen wir sie eine Eigenschaftsvariable. (Z.B. enthält die Aussage $(\varphi).\varphi a \supset \varphi b$, d.h. "Jede Eigenschaft, die a zukommt, kommt auch b zu", die Eigenschaftsvariable φ.)

Ist f eine Beziehung, so bedeutet f(a,b,...) die Aussage "a, b,... stehen zueinander in der Beziehung f", usw. a=b bedeutet "a ist identisch mit b".

b. Klassen-und Zuordnungslogik.

Zu einer Eigenschaft f gehört eindeutig die Gesamtheit derjenigen Dinge x, denen f zukommt , d.h. für die fx wahr ist. Die durch f bestimmte Klasse oder Menge bezeichnet man mit $\hat{x}(fx)$ oder kürzer etwa mit α. $a \varepsilon \alpha$ bedeutet "a ist Element von α". (Dies ist - im Falle $\hat{x}(fx)=\alpha$ - nur eine andere Schreibung für fa.) Der variablen Eigenschaft entspricht in der Klassenlogik die variable Klasse, der Eigenschaft von Eigenschaften die Klasse von Klassen.

Entsprechend ist das umfangslogische Gegenstück der Beziehung die Zuordnung.

Bemerkung: Die unter a aufgeführten Darstellungsmittel der Aussagen- und Begriffslogik gestatten grundsätzlich, alle Sachverhalte der formalen Logik (mit Ausschluss der im folgenden ausser Betracht bleibenden Modalitätslogik, die ein weiteres Zeichen benötigen würde) und der reinen Mathematik rein symbolisch - also ohne irgendwelche Zuhilfenahme der Wortsprache - auszudrücken. (Genau genommen, sind selbst diese nicht alle notwendig.) Die klassen- und zuordnungslogischen, arithmetischen usw. Aussagen sind danach nichts weiter als zweckmässige Umformungen gewisser begriffslogischer Aussagen.

2. Der Russellsche Widerspruch.

a. Begriffslogische Darstellung.

Gegeben sei die Form

$$\sim\varphi(\varphi)$$

(d.h. "φ kommt sich selbst nicht zu"). Schreibt man anstelle von $\sim\varphi(\varphi)$ "zur Abkürzung" $F(\varphi)$ (wo nunmehr F die Eigenschaft "sich selbst nicht zukommen" bedeutet), d.h. definiert man

$$F(\varphi) = \sim\varphi(\varphi) \quad \text{Df}$$

(= in Verbindung mit Df bedeutet Definitionsgleichheit), so gilt

$$(\varphi).F(\varphi) \equiv \sim\varphi(\varphi).$$

Setzen wir für die Eigenschaftsvariable φ insbesondere F ein, so ergibt sich der Widerspruch

$$F(F) \equiv \sim F(F)$$

(d.h. die Aussage F(F) und ihre Negation bedingen sich wechselseitig).

b. Auflösung.

Der Schlüssel liegt in den Worten "zur Abkürzung". Als Abkürzung, d.h. als bloss formales Hilfsmittel zur kürzeren oder bequemeren Darstellung der Argumentation, sollte F nämlich aus dieser dadurch eliminierbar sein, dass man es durch seine Bedeutung ersetzt. Versucht man jedoch, in dem Symbol F(F) diese Ersetzung zu vollziehen, so kommt man auf einen unendlichen Regress. D.h. es gibt keine Aussage, aus welcher die Zeichenverbindung F(F) durch Einführung des Kurzzeichens F auf Grund der obigen Definition entstanden sein könnte. M.a.W., es gibt keinen von Kurzzeichen freien Ausdruck, von welchem F(F) Abkürzung sein würde.

(Hiermit steht nicht im Widerspruch, dass man $\hat{x}(x\sim\varepsilon x)\varepsilon\hat{x}(x\sim\varepsilon x)$ tatsächlich hinschreiben kann, da die klassenlogischen Symbole als solche ja Kurzzeichen sind.)

Bemerkung: Es wird nicht etwa die Eigenschaft "sich selbst nicht zukommen" bzw. die Russellsche "Klasse aller sich selbst nicht als Element enthaltenden Klassen" als sinnlos erklärt; lediglich die "Aussage", dass eben diese Eigenschaft sich selbst zukommt oder nicht zukommt bzw. die fragliche Klasse sich selbst enthält oder nicht enthält, wird durch die symbolische Analyse als Scheingebilde entlarvt.

3. Die ultrafinite Logik.

Der Russellsche Widerspruch entsteht, wie oben gezeigt, durch einen groben Missbrauch eines Kurzzeichens. Regelrecht dient ein Kurzzeichen dazu, innerhalb eines vorliegenden Zeichenkomplexes einen gewissen Teilkomplex symbolisch zu vertreten, um jenen auf eine einfachere bzw. für die gerade vorliegende Absicht geeignetere Form zu bringen. Setzt man dagegen - wie oben im Falle F(F) - Kurzzeichen irgendwie willkürlich zusammen, so versteht es sich keineswegs von selbst, dass der so gewonnene Ausdruck eine Bedeutung hat, also seinerseits eine Abkürzung für etwas ist.

D.h.: Ein Kurzzeichen enthaltender Ausdruck ist nur dann zulässig, wenn die vollständige Ersetzung der Kurzzeichen durch ihre Bedeutung symbolisch vollziehbar ist.

Ein derartiger "Aufbau" eines komplexen Kurzzeichens geschieht eben bei der Einsetzung eines Ausdrucks für eine Variable. In eine Form fx dürfen für x augenscheinlich nur solche Dinge eingesetzt werden, für welche der entstehende Ausdruck entweder von Kurzzeichen frei oder in die kurzzeichenfreie Darstellung rückübersetzbar ist. Etwaige nicht in fx einsetzbare Dinge werden somit von der Variablen x zwangläufig übergangen. D.h. eine Variable durchläuft nicht notwendig alle Dinge (bzw. alle Eigenschaften usw.) überhaupt, sondern gegebenenfalls mit gewissen Ausnahmen ("singulären Stellen", analog etwa dem Ausnahmewert 0 des x in $1/x$).

Danach kann (x).fx vernünftigerweise nur bedeuten, dass alle in fx einsetzbaren Dinge die Eigenschaft f haben.

Als eine Probe der so korrigierten Logik - die mit einem von Hessenberg stammenden Ausdruck als "ultrafinite" Logik bezeichnet werden möge - sei die Formel des Modus Barbara behandelt:

$$(x).fx\supset gx:(x).gx\supset hx:\supset.(x).fx\supset hx.$$

(: als verstärktes - über . und ⊃ hinaus wirkendes - Zeichen für ., :⊃. entsprechend - als obendrein über : hinausgreifendes - für ⊃.) Zu lesen: "Ist alles, was f ist, g und alles, was g ist, h, so ist alles, was f ist, h."

Ist irgend ein Ding a zwar in fx und hx, aber nicht in gx symbolisch einsetzbar, so verbürgt das Erfülltsein der Vordersätze, auf deren Geltung das a ja keinen Einfluss hat, offenbar nicht das des Nachsatzes für x = a. Man darf also nur schliessen, dass alles in gx Einsetzbare, was f ist, h ist. Symbolisch etwa:

$$\supset:(x):gx!.\supset.fx\supset hx,$$

wo gx! für "x ist in gx einsetzbar" steht.

4. Auflösung des Widerspruchs der Menge aller Dinge und der größten Kardinalzahl.

Da hier anders als beim Russellschen Widerspruch beide Alternativen sinnvoll sind, muß die eine sich als wahr und die andere als falsch erweisen. Auf die richtige Entscheidung führt die Erkenntnis, dass der Cantorsche Satz, nach welchem zwischen den Elementen einer Menge und ihren Teilmengen keine eineindeutige Zuordnung möglich ist, im Ultrafiniten nicht mehr allgemein zutrifft. In Folge davon erweist sich in der ~~ultrafiniten - d.h. nicht allein die~~ endlichen und die "konsistenten" transfiniten Mengen, sondern auch die gewissermassen noch über diese hinausgreifenden, bisher als paradox geltenden Mengen umfassenden - Mengenlehre die Menge aller Dinge als ein durchaus einwandfreies Gebilde und ihre Kardinalzahl als die grösste mögliche.

Der Fehler des Beweises des Cantorschen Satzes besteht seinerseits in dem Übersehen der einer gewissen Variablen anhaftenden Beschränkung und seine Korrektur in der Hinzunahme einer geeigneten weiteren Voraussetzung, durch welche die fraglichen Ausnahmewerte unschädlich gemacht werden.

Für das Zustandekommen der Widersprüche erscheint hiernach weder der naive Mengenbegriff noch der Unendlichkeitsbegriff, sondern wesentlich der gekennzeichnete Missbrauch von Kurzzeichen oder Variablen verantwortlich.

5. Kritik des symbolischen Beweises des Cantorschen Teilmengensatzes. (Für Kenner der Principia Mathematica.)

Satz 102.71 der Principia Mathematica lautet:

$$\vdash:R\,\varepsilon\,\mathrm{Cls}\to 1.\mathrm{D}`R\subset\alpha.\text{ᗡ}`R\subset\mathrm{Cl}`\alpha.\supset.\exists!\mathrm{Cl}`\alpha-\text{ᗡ}`R.$$

(Zu lesen: " Ist R eine nach rechts eindeutige Zuordnung, deren Vorbereich Teilklasse einer gegebenen Klasse α ist, während der Nachbereich als Elemente nur Teilklassen von α hat, so gehört mindestens eine Teilklasse von α nicht zum Nachbereich von R.")

Man gewinnt zunächst einwandfrei:

$$\vdash :: Hp . \omega = \hat{z}(z \epsilon D{}^{\backprime}R . z \sim\epsilon \breve{R}{}^{\backprime}z) . \supset :. x \epsilon D{}^{\backprime}R . \supset_x : \sim(x \epsilon \omega . \equiv . x \epsilon \breve{R}{}^{\backprime}x) .$$

Da der Nachsatz $\sim(x \epsilon \omega . \equiv . x \epsilon \breve{R}{}^{\backprime}x)$ besagt, dass von den beiden Klassen ω und $\breve{R}{}^{\backprime}x$ eine und nur eine das Ding x enthält, wird weiterhin gefolgert, dass diese nicht identisch sind, d.h. an seine Stelle tritt $\omega \neq \breve{R}{}^{\backprime}x$.

Indessen ist zu bedenken, dass die Variable x nur solche Dinge durchläuft, die in den Nachsatz, also insbesondere in $x \epsilon \breve{R}{}^{\backprime}x$ (soll heissen: in den entsprechenden begriffslogischen Ausdruck!) einsetzbar sind. Etwaige diese Bedingung nicht erfüllende Elemente von $D{}^{\backprime}R$ sind also in der Behauptung des Nachsatzes gar nicht mit gemeint, und daher könnte für ein solches sehr wohl auch $\omega = \breve{R}{}^{\backprime}x$ gelten.

Um für einen speziellen Fall ein derartiges Element wirklich aufzuweisen, setzen wir insbesondere für R die Klassenidentität $I \restriction Cls$ (wo Cls für die Klasse aller Klassen steht), m.a.W. die Umfangsgleichheit von Eigenschaften, und für ω die Klasse V aller Dinge ein. Dann geht die kritische Formel wegen des Erfülltseins von Hp und wegen $(x) . x \epsilon D{}^{\backprime}I$ und $(x) . \breve{I}{}^{\backprime}x = x$ in

$$\vdash : \omega = \hat{z}(z \sim\epsilon z) . \supset . (x) . \sim(x \epsilon \omega . \equiv . x \not\epsilon x)$$

über. (x und z sind nunmehr Klassenvariable. $\hat{z}(z \sim\epsilon z)$ bedeutet die Russellsche Klasse der sich selbst nicht als Element enthaltenden Klassen.) Hier durchläuft x offenbar nicht beliebige, sondern nur in $x \epsilon x$ einsetzbare Klassen, zu denen aber, wie früher festgestellt, $\hat{z}(z \sim\epsilon z)$ nicht gehört. Die Endformel darf demnach nicht einfach

$$\vdash : \omega = \hat{z}(z \sim\epsilon z) . \supset . (x) . \omega \neq x$$

lauten, sondern etwa

$$\vdash : . \omega = \hat{z}(z \sim\epsilon z) . \supset : (x) : (x \epsilon x) ! . \supset . \omega \neq x ,$$

womit die erforderliche Variablenbeschränkung ausdrücklich vermerkt und die Einsetzung von $\hat{z}(z \sim\epsilon z)$ für x unschädlich gemacht ist.