Bois-le-Roi, 6 août 1904,

Cher Monsieur,

Je vous remercie vivement de votre longue et intéressante lettre. Je tâcherai de tenir compte de vos observations dans la rédaction définitive de mon livre. Je crois devoir exposer d'abord le calcul des P catégoriques, parce qu'il est la base de tout le reste, et isolément du calcul des P conditionnelles qui, comme vous le dites, se confond avec le calcul des Cls. Russell a fort bien distingué l'implication matérielle et l'implication formelle, et montré que celle-ci est seule employée en Maths. — Pour la règle Import. Export. je la donnerai sous la forme que vous m'indiquez (avec les variables en évidence) dans le chapitre du Calcul des relations. Mais il conviendrait de l'introduire déjà dans le Calcul des P catégoriques, sous la forme:

$$a \supset . b \supset c : = . ab \supset c$$

$$(a, b, c \,\varepsilon\, P)$$

Dans le Calcul des relations, j'exposerai d'abord la théorie α, qui est celle de Russell, puis la théorie β, qui repose sur l'idée de couple, et de là je passerai à la théorie des fonctions, qui est plus compliquée et me semble dériver des précédentes(1). Je dois vous dire que Russell m'a écrit récemment qu'il était amené à préférer la conception des relations en extension, c.à.d. comme classes de couples, pour les mêmes raisons qu'il convient de représenter les concepts par les classes correspondantes (leur extension). Cela me décide à faire place dans mon livre à la théorie des couples, telle qu'elle est exposée dans le Formulaire, et dont vous avez bien voulu résumer les principes dans votre lettre.

A propos des relations, je vous dirai que Russell a renoncé à ses notations ρ, $\breve{\rho}$, ρx, $\breve{\rho} x$, ρu, $\breve{\rho} u$, $u\rho$, $u\breve{\rho}$, pour les raisons que vous connaissez, et qu'il adopte les suivantes:

$D'R$ = domaine de R

$\breve{D}'R$ = codomaine de R

$C'R$ = champ de R $\qquad R|S$ pour RS (2)

$\overrightarrow{R}'x = y \ni (yRx)$ Df $\quad \overleftarrow{R}'x = y \ni (xRy)$ Df

d'où: $\overrightarrow{R}''u = v \ni \{\exists x \ni [x \varepsilon u . v = \overrightarrow{R}'x]\}$

$\cup' \overrightarrow{R}''u = y \ni \{\exists x \ni [x \varepsilon u . yRx]\} = \rho u$

$\cap' \overrightarrow{R}''u = y \ni [x \varepsilon u . \supset_x . yRx] = u\rho$

$Cnv'R = \breve{R}$.

Je pense comme vous que le signe $\breve{R}$ est très incommode aux p. de vue typographique, comme le signe $\bar{R}$, et que, comme celui-ci, il faut le transporter devant la lettre, en le modifiant pour ne pas le confondre avec $\cup$. J'adopte $\underline{c}$ un peu au-dessus de la ligne (sans en sortir).

— Bien entendu, la conversion des relations n'est pas la même chose que l'inversion des fonctions. Celle-ci est moins simple que celle-là. Étant donné que toute relation peut se décomposer en une relation ε et une fonction:

$$xRy . = . y \varepsilon \rho x \quad (\rho, \text{ signe de fonction})$$

la conversion d'une relation est ${}^c\overset{xu}{(\varepsilon\rho)}$, et non pas $\varepsilon\,{}^c\rho$.

J'éprouve encore quelques difficultés à passer de la notation des relations à celle des fonctions, qui me paraît peu heureuse; $y = fx$ ne peut s'écrire que si fx est uniforme; autrement il

(1) C'est-à-dire que je n'adopterai pas votre théorie γ, qui repose sur l'idée de fonction comme notion primitive.

(2) Dans une lettre antérieure, Russell représentait le produit relatif par une étoile ou croix à 6 branches: ✻. Ce signe me plaît beaucoup.

faut : $y \varepsilon f x$. Et puis cette notation masque la symétrie de la relation ; elle ne permet pas de la convertir immédiatement. J'aimerais mieux $f(x,y)$, où du moins les 2 variables figurent symétriquement. Et puis, il y a une équivoque du langage : le mot _fonction_ désigne tantôt la corrélation de deux variables et tantôt la variable _dépendante_ (de même que le mot _définition_ désigne tantôt l'égalité, tantôt le 2e membre de l'égalité, que j'appelle le _définissant_.) Je ne sais pas si cette équivoque ne se trouve pas quelquefois dans l'emploi de vos symboles $b f \underline{a}$ et $\underline{b} F \underline{a}$, que je trouve quelque peu obscurs, ainsi que votre symbole d'inversion (, qui me semble employé en bien des sens divers (je le comprends bien comme signe de substitution, mais guère autrement.) Enfin j'ai beaucoup de peine à « réaliser » (anglicisme) la différence exacte de $b f \underline{a}$ et de $\underline{b} F \underline{a}$, et je ne vois pas quelle utilité il y avait à adopter ces deux symboles. Le 1er est défini comme opérateur, le 2e comme classe de couples (Formulaire 1903) ; il y a là une disparate qui me gêne et me trouble. Peut-être deux mots d'explication suffiront-ils à m'éclairer.

— J'espère que vous jouissez de vos vacances dans votre campagne, et que vous ne souffrez pas comme moi de la chaleur. Je vous prie de me croire toujours

Votre bien sympathiquement dévoué

Louis Couturat

P.S.

P.S. Je proposerai (dans mon livre) d'adopter uniquement des minuscules grecques pour symboles de fonctions (φ, χ, ψ, θ, etc.) et cela, pour éviter que la juxtaposition du signe de fonction avec la lettre variable ne soit prise pour un produit. Je crois que vous ne seriez pas loin d'adopter cette proposition. — Russell emploie, pour éviter cette fausse apparence, la virgule renversée ; il écrit : $\varphi ` x$, et même $\sim ` x$, $\iota ` x$. Cette virgule traduit en quelque sorte le <u>de</u> du langage. Vous en avez besoin pour distinguer par ex. Num ‘Cls et Num Cls. Je vous laisse à juger s'il y a lieu de généraliser cet usage. J'avoue que ma proposition est plus simple ; toutes ces virgules en l'air donnent aux formules un aspect « papillotant » qui trouble les yeux. — M. Russell généralise sa virgule comme suit :

$$\varphi `` u = y \ni [\exists u \cap x \ni (y = \varphi ` x)] \quad \text{Df}$$

$$\varphi ``` u = y \ni [\exists u \cap x \ni (y = \varphi `` x)] \quad \text{Df}$$

Par exemple il écrit : $C ``` C `` C ` R$ (le champ du champ du champ d'une relation)

Tournez s.v.p.

Bonnes nouvelles pour la Délégation : adhésions des Chambres de Commerce du Hâvre et de Elberfeld, et du Physikalischer Verein de Francfort.

— Je vais dire à M. Léon de vous envoyer les dernières années de la Revue de Métaphysique s'il ne l'a pas déjà fait. Merci encore de vos volumes, dont je me suis beaucoup servi et inspiré pour mon prochain article sur la Géométrie (notamment de votre article R d M, t. IV, p. 51-91.)