Turin 1.6.99. Couturat.

Merci de votre lettre du 12.8, et de la carte postale du 26. ~~que j'ai lu avec~~
J'ai appris avec le plus grand plaisir que les études de logique mathématique se répandent de plus en plus.
Vos remarques très judicieuses m'ont intéressé beaucoup.
Des corrections que vous m'envoyez, j'en tire profit dans ~~la publication~~ le N 3 de F2, en cours de publication.
Je n'ai pu répondre tout de suite ~~par ce~~ ~~a~~ empêché par ~~par~~ mes occupations. Je vais maintenant vous répondre sur quelques points.

—

J'indique la négation de a par
~~Je ne vois pas que~~
~~Je donne au~~
~~signe de négation la forme~~ $-a$, en suivant Leibniz (?) et Segner;
mais dans le manuscrit je l'indique par $\sim a$, (où le signe $\sim$ peut être le non écrit dans la sténographie système Gabelsberger);
cette forme se rencontre dans quelques ~~le~~ publications; notamment dans toutes les publications de Logique faites par l'Académie des Sciences (il y a des travaux de M. Pieri, Burali-Forti et autres).
La notation $\sim a$ ne diffère que dans la forme de la n a de Maass;
elle diffère des notations a' et a_1 parce que le signe de fonction est écrit avant de la variable, et dans ces notations il est écrit après.
Ces notations exigent les mêmes parenthèses; on écrira
$\sim(ab)$ $(ab)'$ $(ab)_1$
pour indiquer la négation de ab.
La notation $\overline{a}$ remplace les parenthèses, car il a la forme du vinculum. ~~Et~~ Mais il y a un grand avantage typographique à écrire tous les signes sur la même ligne; et aussi un avantage logique, à adopter une notation constante ~~car par ces signes de fonction~~ on peut à

Nous avons des signes de fonction f qu'on écrit en avant la variable

$\sim a$, $\sin a$, $\cos a$, $\log a$, $\sqrt{a}$, ...

d'autres qu'on écrit après f

a' a_1 $a!$ ...

~~Cette~~ double notation nous oblige de répéter deux fois ~~les~~ plusieurs ~~[illegible]~~ propositions (§1 P800, 801). Si l'on adopte encore des signes qu'on écrit au dessus; $\bar{a}$, ou au dessous, ou en partie en avant et en partie après la variable comme $|a|$ de Weierstrass pour mod a de Cauchy, on multipliera la forme des propositions.

En conséquence je crois qu'on doit abandonner la forme $\bar{a}$, qui est un ornement; les notations $\sim a$ a' a_1 ~~sont~~ ont le même degré de simplicité; elles exigent les mêmes parenthèses. Je conserve la première car elle est la plus ancienne.

~~Sur la différence des signes ε et ⊃~~

~~Je passe~~ à

Comme vous le remarquez bien, mon but ~~est~~ est d'appliquer la logique ~~mathém. à l'algèbre~~ aux sciences mathématiques. Je comprends toute l'importance des études algébriques sur la logique; mais, vu la variété de ces études, je ~~[illegible]~~ préfère de diriger mes forces du côté de l'application. ~~Cette~~ ~~application [illegible] sur la théorie; car si une notation~~

Les P contenues dans le Form. doivent être ~~autant~~ que possible écrites par les seuls symboles, sans recours au langage ordinaire, sauf les notes, où l'on explique aussi par le langage ordinaire les P qui sous la forme symbolique, bien que précises, sont difficiles à lire, et sauf les Notations, qui donnent l'explication des idées primitives.

~~Un~~ progrès de F_1 à F_2 consiste effectivement dans la réduction complète en symboles de propositions qui ~~ne~~ ne l'étaient pas encore. Dans F_1 I §1, ~~et~~ 3.., ~~on doit supposer écrit~~ il est dit, par le langage ordinaire, que a, b,.. sont des propositions. Dans F_2 §1 il n'y a plus rien ajouté par le langage ordinaire; la signification des lettres est ~~est~~ exprimée par les symboles.

On serait tenté d'abord d'introduire un symbole pour indiquer "proposition" et soit P, et alors

dans F_1 on trouve p. ex.

2. $a \supset aa$, elle n'est pas une P complète

~~qu'on peut lire~~ En ajoutant l'hyp. écrite à p. 127, on a la proposition complète:

2'. "Soit a une proposition; on aura $a \supset aa$"

exprimée en partie ~~écrite partiellement~~ par le langage ordinaire et en partie en symboles.

~~J'ai cherché d'abord d'exprimer toutes les P par les~~

On pourrait tenter de réduire en symboles cette prop. 2, en introduisant un symbole, et soit P, pour indiquer "proposition". Alors la 2 prend la forme

2'' $a \,\varepsilon\, P \,.\supset.\, a \supset aa$

mais par cette voie on n'aurait pas au résultat.

Car le mot « proposition » n'a pas une valeur constante.
Comme vous l'avez remarqué bien,
~~Les relations~~ Il faut distinguer entre les propositions catégoriques, les propositions qui contiennent une lettre variable, celles qui en contiennent deux, etc.

Je crois d'avoir résolu la question par l'introduction des signes Cls, ε, et le signe du couple (x,y) ou $(x;y)$.

Les opérations sur les propositions catégoriques n'ont pas d'intérêt. ~~Les relations~~ On ne rencontre pas dans les sciences mathématiques des formules de la forme $\{2+2=4\}.\supset.\{5^2=25\}$ comme les écrit M. Schröder. La prop. 2 est transformée en F2 §1

31. $a\,\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\supset.\,a\supset aa$.

L'hyp $a\,\varepsilon\,\mathrm{Cls}$ est écrite en principe de la contre des propositions; ~~ce point permet~~ elle est une abréviation commode et rigoureuse de la Df P18.

Au lieu de dire « Considérons une proposition contenant une lettre variable x »,
je dis maintenant
« Considérons la proposition $x\,\varepsilon\,a$, où a est une classe ». Car toute proposition contenant une lettre variable x est réductible à cette forme.

En conséquence l'ancienne proposition

12 $a\,.\,a\supset b\,.\supset b$

dans laquelle a, b, c sont des propositions, se transforme en:

$a, b \varepsilon \mathrm{Cls} . \supset : x \varepsilon a : x \varepsilon a . \supset_x . x \varepsilon b : \supset . x \varepsilon b$

Mais la $x \varepsilon a . \supset_x . x \varepsilon b$ signifie $a \supset b$, donc:

$a, b \varepsilon \mathrm{Cls} . \supset . x \varepsilon a . a \supset b . \supset . x \varepsilon b$ F2 §1 P28,

qui est une forme de syllogisme

Pour exprimer ~~l'ancienne P39~~ F1 P39, exporter et importer,
il faut introduire les couples; elle se réduit à la ~~nouvelle~~ F2 §1 P74.
~~Si l'on dégage pour un ...~~

Mon but, dans F2 §1, a été de publier toutes les propositions connues de Logique, écrites complètement en symboles. Je n'ai pas publié toutes les propositions sur les opérations logiques car je ne les ai pas réduites en symboles.

Je les ai ordonnées, ~~[illegible]~~ en y donnant Df ou Df? aux propositions ~~[illegible]~~ qui sont des définitions, ~~et~~ ou qui sont ~~la forme~~ des définitions possibles. ~~[illegible]~~ Je devrais le donner à ces propositions un ordre possible; en conséquence j'ai ~~la~~ changé les idées en ~~introduit les~~ idées primitives, dont je ne donne pas des définitions et en idées dérivées, qu'on définit. De plusieurs de ces idées on peut donner plusieurs définitions; elles sont indiquées par Df? On peut même définir des idées primitives en supposant connues des autres idées

Mais je désirerais avant tout de donner une théorie. Les autres théories possibles, je les ai indiquées, lorsqu'il se ~~Dest~~ présentait l'occasion; mais je ne suis pas réussi à les développer. P.ex. En §1 P 243, j'ai écrit que de la P 161 prise comme définitions on pouvait déduire une foule des propositions précédentes; mais non toutes; je n'ai pu tirer p.ex. la P 218.