Torino, 18 giugno 1924.

Illustre professore,

Le sarei grato se volesse leggere l'accluso lavoro sul "pendolo di lunghezza variabile".

Distinti saluti.

Devotissimo

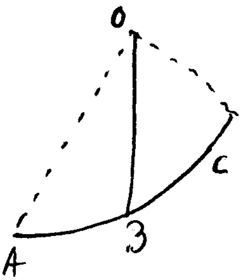
Ugo Cassina

Sul pendolo di lunghezza variabile e sul gioco dell'altalena.

Nella recensione da me fatta del volume "Meccanica razionale", dei proff.ri C. Burali-Forti e T. Boggio [V. Bollettino di Matematica, a. XVIII, 1922, Fsc. 4, 5, 6], ho avuto occasione di rilevare che una proposizione, relativa al "pendolo di lunghezza variabile ed al gioco dell'altalena", ha bisogno di alcune modifiche; e di riportare in una postilla la nuova proposizione.

Si è interessato della questione del pendolo di lunghezza variabile G. Peano in una sua Nota pubblicata nel t. X. (1896) dei Rendiconti del Circolo mat. di Palermo.

Il Peano, in questa sua Nota, dimostra il seguente teorema:



I. « Se un pendolo di lunghezza « variabile, in una oscillazione [in un mezzo non resistente intorno al punto O] descrive « la linea ABC, il volume generato « dalla rivoluzione del settore AOB attorno « alla verticale OB è eguale al volume generato « dalla rivoluzione del settore BOC ».

Dopo di che il Peano scrive:

II. « Quindi, per aumentare l'ampiezza delle « oscillazioni, si deve allungare il pendolo finchè « l'angolo θ che esso fa con la verticale diminuisce, ed accorciarlo quando questo cresce; « cosa che si osserva facilmente nell'altalena ».

La proposizione I è rigorosamente esatta, la II ha invece bisogno di alcune modifiche.

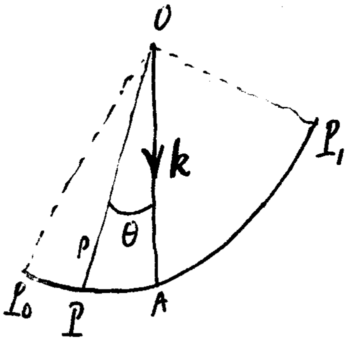
è quanto mi propongo di dimostrare in questa piccola Nota.

Desidero ritornare esplicitamente sull'argomento, per illuminare completamente la cosa, ed evitare che, data la brevità del mio accenno a questa questione nella mia analisi citata (brevità naturale all'indole del lavoro), possa essere rimproverato di affermare imperfetta una proposizione e di non provare la mia affermazione.

Ciò è forse tanto più necessario trattandosi di una proposizione di G. Peano, maestro incomparabile di rigore scientifico.

La produzione scientifica del Peano è così vasta, e la sua importanza è così universalmente conosciuta, che si può con animo tranquillo rilevare una piccola pecca nel maestoso edificio scientifico da lui creato.

Colgo l'occasione per considerare anche il caso reale del gioco dell'altalena: pendolo pesante di lunghezza variabile in un mezzo resistente (n. 3).



1. Sia $\underline{O}$ il centro di sospensione, ρ la lunghezza variabile del pendolo $\underline{P}$, θ il valore assoluto dell'angolo che $\underline{P}-\underline{O}$ fa con la verticale discendente.

Il punto $\underline{P}$ parte dalla posizione iniziale $\underline{P}_0$ con velocità nulla. In tal caso è noto che: "il moto di $\underline{P}$ avviene in un piano il quale passa per la verticale di $\underline{O}$" [v. Meccanica razionale, C. Burali-Forti – T. Boggio, p. 395].

Inoltre il punto $\underline{P}$, partendo, nel tempo $\underline{t}_0$, dal punto $\underline{P}_0$ con velocità nulla, raggiungerà, nel tempo $\underline{t}_1 > t_0$, la posizione $\underline{P}_1$, pure con velocità nulla, dopo esser passato per un punto $\underline{A}$ situato sulla verticale di $\underline{O}$.

Indichiamo con ρ^* e θ^* i valori di ρ e di θ relativi all'arco di traiettoria compreso fra $\underline{A}$ e $\underline{P}_1$, e supponiamo dato ρ in funzione di θ, cioè supponiamo data la traiettoria del punto $\underline{P}$; il moto avvenga in un mezzo unresistente, allora il teorema I di Peano relativo all'eguaglianza dei volumi può scriversi così:

$$(1) \qquad \int_0^{\theta_0} \rho_\theta^{\,3} \sin\theta \, d\theta = \int_0^{\theta_1} \rho_{\theta^*}^{*} \sin\theta^* \, d\theta^* .$$

[v. la memoria citata di Peano, oppure: Meccanica, op. c., p. 396; v. anche n. 3].

Ciò premesso, dimostriamo la proposizione seguente:

a). Siano $\underline{P}$ e $\underline{P}^*$ due punti della traiettoria egualmente inclinati sulla verticale ascente da $\underline{O}$ (e situati da bande opposte), allora, se qualunque essi siano, risulta che sempre:

$$(\alpha) \qquad \rho_\theta \gtreqless \rho^*_\theta ,$$

ne corrisponderà si ha:

$$(\beta) \qquad \theta_1 \gtreqless \theta_0$$

Infatti dalla (1) si ha:

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho_\theta^{*3} \sin\theta \, d\theta = \int_0^{\theta_0} (\rho_\theta^3 - \rho_\theta^{*3}) \sin\theta \, d\theta;$$

da cui, nelle ipotesi (α), :

$$(\gamma) \qquad \int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho_\theta^{*3} \sin\theta \, d\theta \gtreqless 0,$$

ove si deve prendere il segno $>$, $=$ od $<$ secondo che ni (α) si prende il segno $>$, $=$ od $<$.

Ma, per il teorema della media, esiste un valore θ', compreso fra θ_0 e θ_1, e tale che

$$(\delta) \qquad \int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho_\theta^{*3} \sin\theta \, d\theta = (\theta_1 - \theta_0) \rho_{\theta'}^{*3} \sin\theta'.$$

D'altra parte $\rho_{\theta'}^{*} \sin\theta > 0$; dalle ($\gamma$) e ($\delta$) si ha dunque:

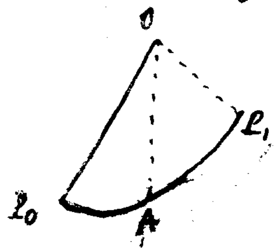
$$\theta_1 - \theta_0 \gtreqless 0,$$

cioè la (3).

E ora veniamo alla proposizione II di Peano: "Per aumentare l'ampiezza delle oscillazioni, si deve ... "

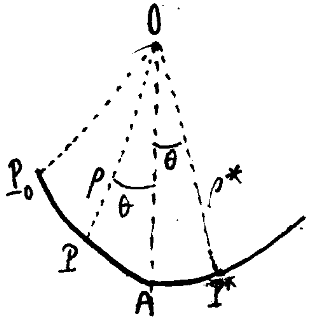
Questa proposizione appare dunque come una condizione "necessaria" per l'aumento delle ampiezze delle oscillazioni. Invece non è né necessaria, né sufficiente.

Non è necessaria: Infatti se "accorcio" continuamente il pendolo, allora $\rho_\theta > \rho^*_\theta$ e, per il teorema III, risulta $\theta_1 > \theta_0$ e l'ampiezza dell'oscillazione non diminuisce, ma "aumenta".



Non è sufficiente: Infatti nella discesa allungo il pendolo, nell'ascesa lo accorcio, ma faccio in modo che in punti egualmente inclinati sulla verticale, uscente da O, e situati da bande opposte rispetto a questa verticale, la lunghezza del pendolo nel punto in cui scende sia "minore" di quella che ha nel punto in cui ascende.

Allora, per ogni valore di θ, si ha:

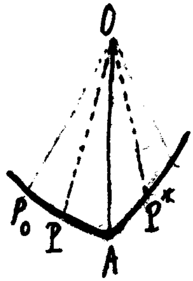


$$\rho_\theta < \rho_\theta^* ,$$

e quindi, per il teorema II, si avrà $\theta_1 < \theta_0$, cioè l'ampiezza dell'oscillazione "diminuisca".

2. Dal teorema 2) si possono dedurre soltanto delle condizioni "sufficienti" per l'aumento dell'ampiezza delle oscillazioni del pendolo. È appunto una di tali condizioni, che io ho enunciato in una postilla alla mia recensione. Eccola:

b) Per aumentare l'ampiezza dell'oscillazione d'un pendolo pesante – oscillante in un mezzo non resistente – basta allungare il pendolo quando il valore assoluto dell'angolo ch'esso fa con la verticale diminuisce e, quando questo cresce, accorciarlo in modo che in punti della traiettoria egualmente inclinati sulla verticale la lunghezza del pendolo nel punto in cui scende sia maggiore di quella che ha nel punto in cui sale.



Infatti, in tale ipotesi, per ogni valore di θ, si ha:

$$\rho_\theta > \rho_\theta^*,$$

e quindi, per il teorema 2), si ha

$$\theta_1 > \theta_0,$$

cioè l'ampiezza "dell'oscillazione" aumenta".

Un altro corollario della 2), è la proposizione seguente:

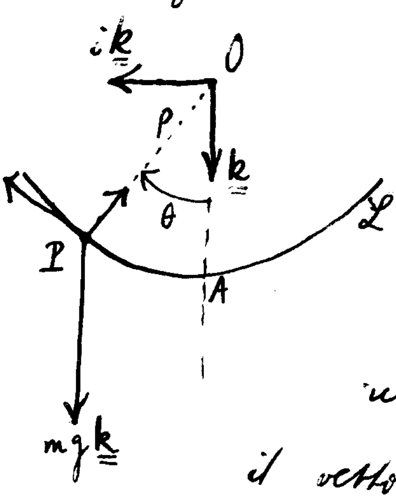
c) Condizione sufficiente per aumentare l'ampiezza dell'oscillazione del pendolo è di accorciare continuamente la sua lunghezza.

3. Si può generalizzare il teorema I di Peano, considerando il caso d'un pendolo oscillante in un mezzo resistente. Allora si ha:

d) Se un pendolo pesante di lunghezza variabile, parte dal punto P_0 con velocità nulla e in una oscillazione completa descrive la linea $L_0 A L_1$, in cui A è il punto d'intersezione della verticale uscente da O con la traiettoria; allora il volume del solido generato dalla rotazione del settore $L_0 OA$ è maggiore od eguale al volume generato dalla rivoluzione del settore $L_1 OA$.

Il caso dell'eguaglianza si ha quando la resistenza del mezzo è nulla (caso di Peano).

Dimostrazione.



Sia π il piano d'oscillazione del pendolo, e $\mathbf{k}$ un vettore unitario diretto secondo la verticale discendente.

Sia i l'operatore che fa ruotare i vettori del piano π d'un angolo retto nel verso orario, e sia $\mathbf{u}$ il vettore unitario tale che:

(α) $$i\mathbf{k} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{k}.$$

Allora i vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{k}$, $i\mathbf{k}$ formano una terna unitaria, ortogonale, destrogira.

Posto:

$$(\beta) \qquad \underline{P} = \underline{O} + \rho e^{i\vartheta} \underline{\underline{k}} \quad , e:$$

$$(\gamma) \qquad \rho = \underline{f}\,\theta \; ,$$

il punto $\underline{P}$ descrive la traiettoria L di equazione polare (γ).

Il moto di $\underline{P}$ avviene sotto le condizioni seguenti: su $\underline{P}$, di massa $\underline{m}$, è applicata la forza di gravità il cui vettore è $\underline{m}\,g\,\underline{\underline{k}}$, essendo $\underline{g}$ l'accelerazione (numerica) della gravità;

su $\underline{P}$ agisce la reazione vincolare, diretta da $\underline{P}$ verso $\underline{O}$, della quale il vettore è $-\underline{m}\,\underline{h}\,(\underline{P}-\underline{O})$, con $\underline{h}$ funzione (incognita) finita e positiva di $\underline{t}$, $\underline{P}$ e $\frac{d\underline{P}}{d\underline{t}} = \underline{P}'$;

su $\underline{P}$ agisce, infine, la resistenza del mezzo nel quale si muove $\underline{P}$, resistenza opposta alla velocità, e il cui vettore indichiamo con $-m\,\underline{r}\,\underline{P}'$ essendo $\underline{r}$ funzione positiva o nulla e finita di $\underline{t}, \underline{P}, \underline{P}'$![1]

Applicando il principio di D'Alembert, come equazione differenziale del moto di $\underline{P}$ si ha:

$$(\delta) \qquad \underline{P}'' = -\underline{r}\,\underline{P}' - \underline{h}(\underline{P}-\underline{O}) + g\,\underline{\underline{k}}\,.$$

ove $\underline{P}'' = \dfrac{d^2\underline{P}}{d\underline{t}^2}$.

Operando sui due membri della (δ) con $(\underline{P}-\underline{O})\wedge$, si deduce:

$$(\varepsilon) \qquad \frac{d}{d\underline{t}}\left[(\underline{P}-\underline{O})\wedge\underline{P}'\right] + \underline{r}\,(\underline{P}-\underline{O})\wedge\underline{P}' = g\,(\underline{P}-\underline{O})\wedge\underline{\underline{k}}\,.$$

Ora, dalla (β), si ha:

$$\underline{P}' = \rho' e^{i\theta}\,\underline{\underline{k}} + \rho\theta'\,i\,e^{i\theta}\,\underline{\underline{k}}\,,$$

quindi:

$$(\underline{P}-\underline{O})\wedge\underline{P}' = \rho^2\theta'\,\underline{\underline{u}}\;;\quad (\underline{P}-\underline{O})\wedge\underline{\underline{k}} = -\rho\sin\theta\,\underline{\underline{u}}\,;$$

ed allora sostituendo in (ε) si ha:

[1] v. *Meccanica razionale* di C. Burali-Forti, T. Boggio, op. c., p. 381.

(ζ) $$\frac{d}{dt}\left(\rho^2 \frac{d\theta}{dt}\right) + 2\rho^2\theta' = -g\rho \sin\theta .$$

Il punto P, partendo, nel tempo t_0, dal punto P_0 con velocità nulla, raggiunga, nel tempo $t_1 > t_0$, la posizione P_1, pure con velocità nulla, dopo esser passato per un punto A situato sulla verticale per O. Indichiamo con ρ^* e θ^* i valori di ρ e di θ relativi all'arco di traiettoria compreso fra A e P_1. Allora dalla (ζ) si ha:

(2) $$\int_0^{\theta_0} \rho^3 \sin\theta \, d\theta \gtreqless \int_0^{\theta_1} \rho^{*3} \sin\theta^* \, d\theta^* .$$ [1]

Ma calcoliamo il volume del solido generato dalla rotazione del settore piano OP_0A intorno all'asse $O\underline{k}$, volume che indicheremo con Volume P_0OA.

Indicato con G il baricentro del settore piano OP_0A, si ha:

(5) $$G - O = \frac{1}{3\sigma} \int_{-\theta_0}^{0} \rho^3 e^{i\theta} \underline{k} \, d\theta ,$$

[1] V. Meccanica, op. c., p. 396, facendo le correzioni degli errori di stampa quivi incorsi.

ove σ è l'area del settore; quindi:

$$(\eta)\qquad (\underline{G}-\underline{O})\times i\underline{\underline{k}} = \frac{1}{3\sigma}\int_{-\theta_0}^{\theta}\rho^3\sin\theta\, d\theta\,.$$

Ma, per il teorema di Pappo (Guldino), si ha:

$$(\vartheta)\ \text{Volume } \underline{P_0}\,\underline{O}\,\underline{A} = \sigma\cdot 2\pi\cdot \mathrm{mod}\left[(\underline{G}-\underline{O})\times i\underline{\underline{k}}\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\pi\int_0^{\theta_0}\rho^3\sin\theta\, d\theta\,.$$

Analogamente:

$$(\iota)\qquad \text{Volume } \underline{P_1}\,\underline{O}\,\underline{A} = \frac{2}{3}\pi\int_0^{\theta_1}\rho^{*3}\sin\theta^*\, d\theta^*\,.$$

Allora dalle (2), (ϑ), (ι) si deduce:

$$\text{Volume } \underline{P_0}\,OA \equiv \text{Volum } \underline{P_1}\,\underline{O}\,\underline{A}\,.$$

c. d. d.

Dalla proposizione **d)** può dedursi il seguente corollario:

e) Siano $\underline{P}$ e $\underline{P}^*$ due punti della traiettoria egualmente inclinati sulla verticale uscente da $\underline{O}$ (e situati da bande opposte), allora, se qualunque essi siano, risulta che sempre:

$$\rho_\theta^* > \rho_\theta\,,$$

necessariamente si ha:

$$\theta_1 < \theta_0 .$$

Da questa proposizione, operando con note regole di logica (1), si ha:

f) Se l'ampiezza dell'oscillazione d'un pendolo pesante di lunghezza variabile – oscillante in un mezzo resistente – è stata aumentata, allora esiste una coppia di punti egualmente inclinati sulla verticale tali che la lunghezza del pendolo nel punto in cui scende è maggiore di quella che ha nel punto in cui sale.

Si confronti la f) con la b).

In questo caso non si possono ~~enunciare~~ delle condizioni sufficienti per aumentare l'ampiezza dell'oscillazione [analoghe alle b) e c)].

Torino, Università, maggio 1924. Ugo Cassina

---

(1) G. Peano, Formulario mathematico, ed. V, p. 10; C. Burali-Forti, Logica matematica, ed. II, p. 282.