Ancona, 9 Agosto 1920

R. 24.

Preg.mo Professore,

Sentendomi tuttora assai grato della visita che Ella cortesemente volle farmi passando per Ancona, colgo l'occasione degli ozi estivi per scriverle qualche riga a testimoniarle la mia affettuosa deferenza.

Ma di che cosa parlarle se non della nostra Matematica, che è il nostro pane quotidiano, e a cui Ella ha dedicato la sua alta attività scientifica ed io il mio povero vagabondaggio intellettuale?

Perciò comincio.

Pur non essendo ancora entrati in vigore negli Istituti tecnici i programmi in cui si introducono i concetti di *derivata* e di *integrale*, anche nei vecchi programmi si trova il concetto di *limite*, che io da vari anni spiego tanto per le *successioni* che per le *funzioni*. Possiedo la sua Nota *Sulle definizioni di limite* del 1913, ma già prima di allora io avevo dato per mio conto una sistemazione (scolastica, s'intende) all'argomento.

Non volendo ricorrere al procedimento (discutibile) della scelta d'infiniti elementi, e desiderando tuttavia di mettere in relazione i concetti di limite di una successione e di limite di una funzione ed evitare la doppia *dimostrazione* dei teoremi sui limiti (per le successioni e per le funzioni) io procedo così: *Considero* oltre alle *successioni ordinarie* (numerabili) le *classi* ordinate (successioni in senso lato), per le quali ultime si estendono facilmente le definiz. e i teoremi sulle successioni ordinarie. Anche la condizione generale del limite (enunciata da Bolzano) si estende senza difficoltà alle classi ordinate. Allora, definendo il limite di una funzione ad una variabile $f(x)$ per $x=a$ in uno qualunque dei due modi soliti, si dimostra che essi sono tra loro equivalenti. Per es., si può dare la definiz.: Data una funzione $f(x)$, quando comunque si prenda una successione (in senso lato) di valori di $\underline{x}$, diversi da $\underline{a}$, avente per limite $\underline{a}$, la successione dei valori corrispondenti della $f(x)$ ha sempre lo stesso limite λ, si dice che questo è il limite della $f(x)$ per $x=a$. Poi si dimostra il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente a che si abbia $\lim_{x=a} f(x)=\lambda$ è che preso comunque un numero positivo ε, sia possibile determinare un numero pos. δ tale che si abbia

$$(\alpha) \qquad |f(x)-\lambda|<\varepsilon \quad \text{per} \quad |x-a|<\delta.$$

Questo procedimento si può seguire solamente se si sono introdotte le successioni in senso lato, che non sono considerate nel Formulario.

Presenta obbiezioni questo procedimento? —

Forse la via più breve per trattare questo argomento è quella di definire, prima di ogni altra cosa, il limite di una funzione e quindi dimostrare i teoremi sui limiti delle funzioni; poi definire il limite di una successione (numerabile) quale limite di una funzione degli N_0 quando la variabile intera tende a $+\infty$. In questo modo vengono senz'altro estesi alle successioni (numerabili) i teoremi sui limiti delle funzioni.

Tuttavia quest'ultimo procedimento ha l'inconveniente di considerare prima un concetto certamente più difficile quale è il limite di una funzione, poi un concetto per se più intuitivo quale è il limite di una successione.—

Ella può domandare: "perchè non preferire le due definizioni I e III della Nota del 1913?„. Ecco: Quando si definisce prima il limite di una successione poi quello di una funzione viene spontaneo chiedere subito se si può dedurre questo 2° dal 1°: sì, se si sono considerate le successioni in senso lato. Quando invece si comincia col limite di una funzione, allora il limite di una successione si presenta come un caso particolare. Nei due modi sopradetti si evitano le doppie dimostrazioni dei teoremi sui limiti.—

Quando io studio qualche argomento non manco mai di consultare il suo Formulario (V.), da cui traggo sempre lumi preziosi. Confesso però che la lettura mi riesce un po' faticosa.

Faccio talvolta qualche osservazione a margine, di cui qualcuna qui trascrivo:

— A pag. 77–78 si definiscono i segni ' ' nelle espressioni u'a e a'v, ove u e v sono simboli di prefunzione e di postfunzione dei valori della classe a. [illegible]

k ε Cls . ⊃ . Cls'k = classe delle classi xk, quando x è una classe arbitraria

Nello stesso modo si ricava

k ε Cls . ⊃ . k'Cls = classe delle classi kx, quando x è una classe arbitraria

Segue: Cls'k = k'Cls.

— A pag. 111 nella P32·7 correggere $b < ma^m$ in $b < a^m$. Ponendo nelle P32·6·7 $a^m \pm b = x$, si ha l'unica P

·8 $x, a \varepsilon Q \,.\, a^m -= x \,.\, m \varepsilon 1+N_1 \,.\supset.\, \sqrt[m]{x} < a + \frac{x-a^m}{ma^m}$

[Cardano, a. 1570; cfr. Maccaferri, Calcolo appross. pag. 181-2.]

– pag. 138, linea 11: leggere « x è prope (proximo) ad $\underline{u}$ »
– pag. 233: la P42·7 non si può dimostrare senza ammettere la scelta d'infiniti elementi; si può invece dimostrare aggiungendo l'Hp

$$\lim(f, u, x) \varepsilon Q \cup \iota(+\infty) \cup \iota(-\infty)$$

– pag. 287, linea 16: leggere

$\times \sqrt{2}\,[1 - 1/\sqrt{5}]$ in luogo di $\times \sqrt{2}\,\sqrt{[1 - 1/\sqrt{5}]}$

Veda Lei se sono caduto in equivoci. —

Ella ricorderà che io cominciai a studiare l'applicazione delle probabilità al calcolo approssimato, studio che poi interruppi. Scrissi circa 40 pag. in cui credo di essere giunto a qualche risultato interessante. Vorrei ora riprendere l'argomento. Vorrebbe Lei [illegible] il disturbo di leggere la parte che ho scritto, per farmi qualche osservazione, così come la lettura le suggerisce? Ma non voglio in nessun modo abusare della sua bontà, a cui sono tanto debitore.

Gradisca, Illustriss. Professore, i miei auguri [illegible] vacanze, [illegible] nuovo vigore di [illegible] operosa, e mi creda con deferenza e affetto

Suo
Eugenio Maccaferri