Torino, 1° settembre 1911.
Via Principe Tommaso, 46.

Illustre professore,

Sono a Torino da qualche giorno dove sono arrivato direttamente da Reggio e dove sono venuto per fermarmi qualche tempo, anche per poter consultare le biblioteche di qui.

Mi proponevo poi di scriverLe per chiederLe un appuntamento sia – naturalmente – per salutarLa, sia per chiedere il Suo parere su quanto mi propongo di dire al Congresso delle Scienze e su un lavoro collegato a ciò, che sto completando.

Ho avuto la gradita sorpresa di venirmi prevenuto da Lei ricevendo ora da Milano la Sua lettera con le preziose indicazioni bibliografiche.

Ad ogni modo La prego di fissarmi un appuntamento – per es. per Venerdì 4 settembre alle ore 17 in via Barbaroux – o per qualunque altro giorno ed ora che Le convenissero.

—

Sul teorema di Cantor

$$(1) \qquad \mathrm{Num}\, N < \mathrm{Num}\, \Theta \quad ,$$

e su le questioni connesse : antinomie di Richard etc., ho pensato assai anche in questi giorni, rileggendo le Sue profonde osservazioni in Riv. Mat. t. VIII, p. 136 e s. ed i lavori di Jourdain, Russell ed altri.

Ma la dimostrazione del theor. (1), riportata nel l.c. a p. 149 e nel Form. V a p. 138, mi pare ineccepibile.

Ciò non esclude — anzi va perfettamente d'accordo — col fatto che "l'insieme di tutto quanto si può esprimere <u>effettivamente</u> a parole (od in simboli) è <u>numerabile</u>, anzi <u>finito</u>"?

Perchè, appunto, dando alle lettere

a, b, c, d, .. z

ed eventualmente anche ai segni grafici

, ; :

valori di <u>cifre</u> d'un sistema di numerazione di base conveniente, si riesce a fare corrispondere ad ogni "lettera", "frase", "proposizione", .. "volume" (libro) un n° naturale (finito).

E viceversa ad ogni "numero naturale" si può far corrispondere una "successione di lettere e segni" (univocamente determinata) che può aver significato o no in una lingua o nell'altra.

Quindi la classe formata da "ogni numero razionale, reale, etc. dato <u>effettivamente</u> come 0, 1, 3, 10, π, $\sqrt{2}$, i ec. è *finita*?!

Ed ogni classe definita *integralmente*, cioè della quale si conoscono *effettivamente* tutti gli elementi, non può essere che *finita*.

Ma la Matematica ha come *postulato* essenziale: —

(2) *Esistono delle classi infinite*.

Questa *esistenza* non può esser certo *materiale*, ma puramente *ideale*. (razionale).

Come si definisce una classe *infinita*? Non certo *integralmente*, cioè dandone *tutti* gli elementi, ma bensì solo mediante una *condizione*

(3) "p_x"

alla quale deve soddisfare l'elemento *generico* x della classe stessa.

Ed il passaggio dalla <u>condizione</u> (3) alla <u>classe</u> u formata dalle ~~???~~ <u>soluzioni</u> di (3), si può fare col simbolo "$x \ni$" da Lei introdotto:

(4) $$u = x \ni (p_x).$$

Ora ammettendo l'esistenza di classi infinite non c'è passo della dimostrazione del teorema di Cantor (1) che non sia rigoroso.

Ma allora da dove proviene l'antinomia di Richard e tutte le altre congeneri? (Ecco una nuova "vraie solution" penserà a questo punto Lei, a cui domando venia per il lungo scritto):

"Dall'applicare alle "classi <u>totali</u>" (che contengono in vario modo la nozione di "tutto" assoluto) proprietà che valgono solo per "classi particolari". E codeste classi totali sono le seguenti:

1° la classe di tutti gli enti .=. "$\sim\Lambda$"

2° " " " tutte le classi .=. "Cls"

3° " " " tutti gli enti semplici .=. "$E_1 = (\sim\Lambda) \sim Cls$".

4° " " " tutte le classi semplici .=. "$Cls'E_1$".

E quindi anche "dall'applicare" ad una "disposizione" totale – cioè ottenuta ordinando una "classe" totale con un certo criterio – proprietà che valgono solo per le "disposizioni" particolari, cioè ottenute ordinando "classi particolari".

Cosicchè le proposizioni di logica relative alle "classi" che figurano nel Formulario dovrebbero essere quasi tutte precedute dall'ipotesi che le classi prese in esame non siano delle "classi totali".

Questo che vale in generale vale anche quando si restringe il campo degli enti da studiare a quelli appartenenti ad una certa classe v. Allora si hanno delle "classi totali relative a v":

Se v è una classe semplice, allora le classi corrispondenti alle "E", "$Cls'E$" sono rispettivamente "v" e "$Cls'v$". La definizione esplicita delle classi relative a v corrispondenti a "Cls" e "$\sim\Lambda$" è meno agevole, e corrisponde alla difficoltà di definire "Cls" e "$\sim\Lambda$" mediante "E" e "$Cls'E$".

Dati ciò, ecco come si spiega l'antinomia di Richard:

Come classe ϑ prendiamo la classe $(1 \cdots 5)/X^{-1}$ — ove $X=10$ — e disponiamo in ordine crescente i numeri di ϑ, che rappresentiamo sotto la forma decimale consueta:

$d =$ 0·1 0·2 0·3 0·4 0·5 ,

Applichiamo alla disposizione $\underline{d}$ la legge ~~[illegible]~~ usata nella dimostrazione del teorema di Cantor. Cioè consideriamo il numero

$a = 0{\cdot}65555$

(in cui la cifra di posto n è l'anticifra della cifra di posto n del numero di posto n nella disposizione $\underline{d}$, e

anticifra $x =$ rest$(x+5, 10)$.)

Allora il numero $\underline{a}$ "non" appartiene a ϑ.

Ma di che tipo è la definizione di "a"? :

"Si consideri la disposizione

$d =$ 0·1 0·2 0·3 0·4 0·5 ,

allora "a" è quel numero tale che ... "

ra "d" che cos'è ? È la disposizione che si ottiene <u>ordinando</u> la classe (<u>totale</u>) v col criterio di maggioranza. È quindi <u>inadoperabile</u> nello studio delle proprietà relative alla classe v stessa.

Dopo ciò non vi è bisogno di aggiungere altro per comprendere l'origine dell'antinomia di Richard, poiché l'assurdo proviene dalla considerazione della classe (<u>totale</u>) (indicata con E a p. 152 l.c.) formata da tutti i numeri che si possono definire con un n° finito di parole.

Un'ultima osservazione di logica simbolica.

Sia a un ente (semplice o no). Allora mediante il simbolo "ι" si può ottenere:

(α) $\iota a \cdot \iota(\iota a) \,.\, \iota(\iota\iota a) \,.\, \iota(\iota\iota\iota a)$ etc...

(β) $\begin{cases} \iota a \cup \iota(\iota a) \,.\, \iota[\iota a \cup \iota(\iota a)] \,.\, \iota\{\iota[\iota a \cup \iota(\iota a)]\} \quad \text{etc.} \\ \iota a \cup \iota(\iota\iota a) \,.\, \iota[\iota a \cup \iota(\iota\iota a)] \quad " \quad " \\ \text{etc.} \end{cases}$

(γ) $\begin{cases} \iota a \cup \iota(\iota a) \cup \iota(\iota\iota a) \,.\, \iota[\iota a \cup \iota(\iota a) \cup \iota(\iota\iota a)] \quad \text{etc.} \\ \iota a \cup \iota(\iota a) \cup \iota(\iota\iota\iota a) \,.\, \iota[\iota a \cup \iota(\iota a) \cup \iota(\iota\iota\iota a)] \quad \text{etc.} \\ \text{etc.} \end{cases}$

e così via.

E tutti codesti infiniti enti diversi tra loro appartengono alla "Classe di tutte le classi" cioè a "Cls".

Ma allora il postulato

<u>Esistono</u> <u>delle</u> <u>classi</u> <u>infinite</u>,

che è essenziale per la Matematica, può darsi la forma:

"Esiste almeno un ente". 1. $\exists(\sim\Lambda)$.

"Se a è un ente allora la classe formata con a è un ente". 2. $a \sim\varepsilon \Lambda . \supset . (\iota a) \sim\varepsilon \Lambda$.

[Quindi se vogliamo escludere dalla *logica* ogni assioma *esistenziale* — cioè riservare ad essa solo lo studio delle implicazioni di certe ipotesi —, possiamo dire che il postulato essenziale della Matematica diventa:

Esiste almeno un ente.

Ma sotto questa forma parmi essenziale non solo per la *matematica*, ma per ogni *scienza razionale*.

E basta, se no abuso troppo della Sua pazienza.

Distinti saluti

Devotissimo U. Cassina.