Th: "La potenza della classe formata da tutte le funzioni reali di variabile reale è maggiore della potenza del continuo".

Dim.

Se ad ogni numero reale a facciamo corrispondere quella funzione costante che muta ogni numero reale in a, otteniamo una corrispondenza simile fra i numeri reali e le funzioni reali di variabile reale. Dunque:

1) "La potenza della classe delle funzioni reali di variabile reale è maggiore od eguale della potenza del continuo".

Ora dimostriamo che non può esistere nessuna corrispondenza reciproca fra i numeri reali e le funzioni reali di variabile reale.

Ragioniamo per assurdo.

Ammettiamo l'esistenza d'una tale corrispondenza reciproca e denotiamola con g. Allora la classe descritta dall'elemento gx mentre x varia nel campo dei numeri reali deve coincidere con la classe delle funzioni reali di variabile reale.

Ciò posto consideriamo quella funzione reale di variabile reale, e sia h, tale che se x è un numero reale qualunque si abbia

$$hx = (gx)x+1 \quad .$$

Di qui risulta che non esiste nessun numero reale x tale che

$$h = gx \,,$$

infatti, se così fosse, si dovrebbe avere

$$hx = (gx)x \,,$$

contro la definizione di h.

Ma allora, per quanto abbiamo osservato precedentemente, risulta che h, non appartenendo alla classe descritta dall'elemento gx quando x varia fra i numeri reali, non è una funzione reale di variabile reale, il che è assurdo.

Era dunque assurda l'ipotesi dell'esistenza d'una corrispondenza reciproca fra i numeri reali e le funzioni reali di variabile reale.

Dunque:

2) "La potenza della classe delle funzioni reali di variabile reale non è eguale alla potenza del continuo"

Da 1) e 2) risulta il teorema.

Dimostrazione simbolica

1° $\mathrm{Num}\,(\bar{q}\,f\,\bar{q}) \geqq \mathrm{Num}\,\bar{q}$.

[Dim. (α) $g = \iota(\bar{q}f\bar{q})f\bar{q} \cap h \ni [a \varepsilon \bar{q} . \supset_a : x \varepsilon \bar{q} . \supset_x . (ha)x = a]$ Def.

(α) .⊃. $g \varepsilon (\bar{q}f\bar{q})f\bar{q}\ \mathrm{sim}$.=. 1°]

2° $\mathrm{Num}\,(\bar{q}f\bar{q}) \sim= \mathrm{Num}\,\bar{q}$.

[Dim. (α) $\exists [(\bar{q}f\bar{q})f\bar{q}]\mathrm{rep} : \supset :$

(β) $g \varepsilon [(\bar{q}f\bar{q})f\bar{q}]\mathrm{rep} . \supset_g .\ g`\bar{q} = \bar{q}f\bar{q}$.

(γ) $h = \iota(\bar{q}f\bar{q}) \cap k \ni [x \varepsilon \bar{q} . g \varepsilon \{(\bar{q}f\bar{q})f\bar{q}\}\mathrm{rep} . \supset_{x,g} .$
$kx = (gx)x + 1\ ]$ Def.

(δ) (γ) .⊃. $h \varepsilon \bar{q}f\bar{q}$.

(ε) (γ) .⊃. $g \varepsilon [(\bar{q}f\bar{q})f\bar{q}]\mathrm{rep} . \supset_g .\ h \sim\varepsilon g`\bar{q}$.

(ς) (β).(ε) .⊃. $h \sim\varepsilon \bar{q}f\bar{q}$.

(ζ) (δ).(ς) .⊃. Λ :

(θ) (α).(ζ) .⊃. $\sim\exists [(\bar{q}f\bar{q})f\bar{q}]\mathrm{rep}$.=. 2°].

3° $\mathrm{Num}\,(\bar{q}f\bar{q}) > \mathrm{Num}\,\bar{q}$

[1° 2° .⊃. P3·]