DÉLÉGATION POUR L'ADOPTION D'UNE LANGUE AUXILIAIRE INTERNATIONALE

SECRÉTAIRE : M. L. LEAU
6, Rue Vavin
PARIS (6e)

TRÉSORIER : M. L. COUTURAT
7, Rue Nicole
PARIS (5e)

Paris, le 11 décembre 1908

Cher Monsieur,

Dans l'Introduction au Formulaire » de 1894, vous dites, page 12, « on ne connaît pas la formule qui donne le nombre des groupements que l'on peut faire avec la suite de $n+1$ lettres »

Voici, si je ne me trompe, comment on peut y parvenir.

Désignons par a_n le nombre des groupements que l'on peut faire avec n lettres. La dernière combinaison faite dans un groupement de

$$u_1 u_2 \dots u_n$$

pourra par exemple être ternaire ; elle sera déterminée par deux points l'un après u_p, l'autre après u_q

$$u_1 u_2 \dots u_p \cdot u_{p+1} \dots u_q \cdot u_{q+1} \dots u_n$$

Or le nombre des combinaisons ainsi formées est $a_p\, a_{q-p}\, a_{n-q}$ (pourvu que l'on convienne que $a_1 = 1$) en sorte que le nombre de toutes les combinaisons ternaires est le coefficient de t^n dans y^3 si l'on pose

$$y = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots$$

et par suite a_n est le coefficient de t^n dans $y^2 + y^3 + y^4 + \dots$. On a donc

$$y = t + y^2 + y^3 + \dots \qquad \text{ou} \qquad y = t + \frac{y^2}{1-y}$$

d'où

$$y = \frac{t+1-\sqrt{t^2-6t+1}}{4} = \frac{t+1}{4} - \frac{t^2-6t+1}{4}\,\frac{1}{\sqrt{t^2-6t+1}}$$

Par suite $X_n(x)$ étant le polynome de Legendre

$$a_n = -\frac{1}{4}\left[X_{n-2}(3) - 6\,X_{n-1}(3) + X_n(3)\right] \qquad (n>1)$$

D'ailleurs

$$n X_n(x) - (2n-1)\,x X_{n-1}(x) + (n-1) X_{n-2}(x) = 0$$

Donc

$$a_n = \frac{3\,X_{n-1}(3) - X_{n-2}(3)}{4n}.$$

Or

$$(1-x^2)\frac{dX_{n-1}}{dx} = (n-1)\left[X_{n-2} - x X_{n-1}\right]$$

Appliquant à $x=3$ on conclut

$$a_n = \frac{2}{(n-1)n}\left[\frac{dX_{n-1}(x)}{dx}\right]_{x=3}$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$a_n = \frac{1}{2^{n-2}\,n!\,(n-1)}\left[\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^{n-1}\right]_{x=3}$$

Ces a_n sont à rapprocher des A_n de Catalan

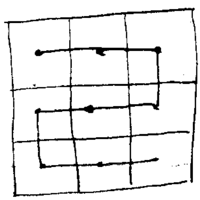
$$\left(tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) = A_0 + A_1\frac{x}{1!} + A_2\frac{x^2}{2!} + A_3\frac{x^3}{3!} + \dots\right)$$

dont M. André a donné une si intéressante définition combinatoire (permutations alternées) et qui vérifient la formule de récurrence

$$2A_{n+1} = C_n^0 A_0 A_n + C_n^1 A_1 A_{n-1} + \dots + C_n^n A_n A_0$$

Dans le cas où l'on ne considère que les combinaisons binaires de n lettres, on trouve par la même méthode $a_n = 2^{n-1}\dfrac{1.3\dots(2n-3)}{n!}$ ce qui concorde bien avec votre formule.

Depuis 1894 il est probable que l'on a eu l'occasion de donner cette formule et que, comme les carabiniers d'Offenbach, j'arrive trop tard ! C'est ainsi que j'ai trouvé il y a à peu près un mois une démonstration géométrique de votre beau théorème (il y a vingt ans !) : une courbe peut emplir un carré. Et j'ai constaté, non sans quelque satisfaction de m'être rencontré avec un éminent mathématicien, que j'avais retrouvé la solution de M. Hilbert à cela près qu'au lieu de partir d'un carré divisé en quatre je partais d'un carré divisé en neuf comme il suit



Quand aura-t-on le plaisir de vous revoir à Paris ?

Veuillez agréer, je vous prie, cher Monsieur, avec mes meilleurs vœux qui sont de circonstance, l'expression de mes sentiments bien cordialement dévoués,

L. Lévy

La première réunion du club Progrès a lieu demain, à la Sorbonne.