Ill.mo Sig. Professore

Mi scuserà se mi permetto di ridarle del disturbo. Le sarei gratissimo se volesse compiacersi di comunicarmi il Suo autorevole parere su quanto Le ho mandato in una precedente mia ed in questa. Desidererei inoltre sapere se finora è stata data una nuova definizione dello S_n visto che l'antica non regge al teorema di Cantor. Ancora vorrei sapere se posso studiare il Suo "Calcolo geometrico" e se mi convenga di abbonarmi a qualche periodico di matematiche. Mi era stato detto di iscrivermi al Circolo Matematico di Palermo: ma ho creduto di interpretare, anzi di precorrere il Suo consiglio, non occupandomene.

Nell'attesa d'una Sua pregiatissima risposta mi creda

di Lei Dev.mo

Giulio Andreoli
Via dei Mille 50.

100.

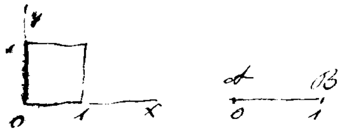
Napoli - 31 - VIII - 1909.

e che $\underline{\Phi}_n(010\cdots a_m \cdot 0000) = \frac{1}{q^m} \underline{\Phi}_n(a_1' 0000\cdots\cdots)$ in cui $a_1' = a_m$ e q è la base del sistema di numerazione prescelto.

Si ricava allora quanto segue: fissata la corrispondenza e chiamando segmento corrispondente (ad un punto il segmento formato dal punto corrispondente e dal punto origine)

I La misura del segmento corrispondente nello spazio ad 1 dimensione ad un punto P nella posizione di spazio ad n dimensioni data, è eguale alla somma delle misure dei segmenti corrispondenti alle proiezioni del punto P sugli n assi.

II Basta che si conosca (ad esempio, nel quadrato) ~~quali~~ ai punti di $(0, x=1)$



o $(0, y=1)$ quali punti di AB corrispondono, per potere geometricamente (nel senso euclideo) costruire il punto di AB corrispondente ad un punto del quadrato.

Sulla totalità dei numeri d'un dato sistema

Fissiamo un sistema di numeri positivi

$$p_1, p_2, \ldots\ldots$$

$$p_n > p_{n-1}^2 \quad - p_1 > 2$$

e contemporaneamente fissiamo le

$$\varphi_n(x) \equiv \frac{1}{p_1^n} + \frac{1}{p_2^n} + \cdots \frac{1}{p_x^n}. \qquad (n = 1, 2, 3 \cdots \quad)$$

Dimostreremo che basta la conoscenza di queste $\varphi(x)$ per potere determinare, assintoticamente, $\Psi(x)$ esprimente la quotità dei p da 1 a x inclusi.

—·

Premettiamo quanto segue:

I Se

$$F(m) = f(m) + f\left(\frac{m}{2}\right) + f\left(\frac{m}{3}\right) + \cdots\cdots f(\ldots) \text{ sarà}$$

$$f(m) = F(m) - \sum_{n=1}^{n=m} F\left(\frac{m}{n}\right) + \sum_{n_1 n_2 = 1}^{n_1 n_2 = \sqrt{m}} F\left(\frac{m}{n_1 n_2}\right) - \sum_{n_1 n_2 n_3 = 1}^{n_1 n_2 n_3 = \sqrt[3]{m}} F\left(\frac{m}{n_1 n_2 n_3}\right) + \cdots\cdots$$

$$n_1 \neq n_2 \neq n_3 \neq n_4 \cdots$$

II Se

$$F(m) = f(m) + f(\sqrt[2]{m}) + f(\sqrt[3]{m}) + \cdots\cdots f(\sqrt[q]{m}) \text{ sarà}$$

$$\text{se } q \text{ è } \sqrt[q]{m} \geq 2 > \sqrt[q+1]{m}$$

$$f(m) = F(m) - \sum_{1}^{q}{}' F(\sqrt[n_1]{m}) + \sum_{n_1 n_2 = 1}^{n_1 n_2 = \sqrt{q}}{}' F(\sqrt[n_1 n_2]{m}) - \sum_{n_1 n_2 n_3 = 1}^{n_1 n_2 n_3 = \sqrt[3]{q}}{}' F(\sqrt[n_1 n_2 n_3]{m}) + \cdots$$

Infatti raggruppando tutti i termini tali che

$n_1 n_2 \cdots n_r = c$ avremo

$$\text{I} \quad f(m) = \mu(1) \cdot F\left(\frac{m}{1}\right) + \mu(2)\, F\left(\frac{m}{2}\right) + \cdots$$

$$\text{II} \quad f(m) = \mu(1) \cdot F(\sqrt[1]{m}) + \mu(2)\, F(\sqrt[2]{m}) + \cdots\cdots$$

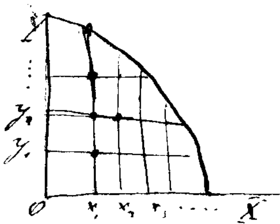
in cui, rappresenta la $\mu(n)$ la notissima funzione aritmetica. Ora questi risultati sono contenuti; il primo enunciato esplicitamente il secondo facilmente ricavabile, nelle "Excursions arithmétiques à l'infini - Note "Sur l'inversion de certaines séries –

Dunque la I e la II sono vere. Dovremmo ancora giustificare

come il coefficiente di $F\left(\frac{m}{n}\right), F(\sqrt[n]{m})$ sia $\mu(n)$
Ma rimandiamo alle memorie del Cesàro che dimostra appunto che indicando con $\omega_k(n)$ le scomposizioni di n in k fattori differenti fra loro, è

$$\sum \omega_t(n)\cdot(-1)^t = \mu(n)$$

Premettiamo ancora quest'altro.
Consideriamo la regione del piano limitata dall'asse delle x, quello delle y ed una curva f definita da una funzione assumente valori finiti per valori finiti di x, annullantesi per $x=\alpha$ e sempre decrescente nell'intervallo $(0,\alpha)$. Per i punti $y_1 y_2 y_3 \ldots$ conduciamo delle rette parallele ai OX e per gli $x_1 x_2 \ldots$ delle altre parallele a (OY)



fra tutti i punti d'incontro degli (y_n) con gli (x_m), chiamando così quelle rette, ne scegliamo certi soddisfacenti ad una data condizione imposta alle x_m ed alle y_n: formino essi l'insieme **A**
Definiamo ora z, funzione di x ed y come segue

$$z = \varphi_1(x)\cdot\varphi_2(y).$$

Formiamo la somma di tutti i valori che assume la z nell'insieme **A** ed indichiamola con

$$\sum_A{}' z = \sum_A{}' \varphi_1(x)\cdot\varphi_2(y).$$

È evidente che per fare tale somma possiamo sommare dapprima tutti i valori di z assunti su (x_1) indi sommarli alla somma analoga fatta su (x_2) .... e così via oppure fare lo stesso per le (y_1) .....
Ora indicando con

$\sum_A{}' \varphi_1(x_n)\cdot\varphi_2(y)$ la una di queste somme, sarà - restando costante su (x_n) la $\varphi_1(x)$

$$\sum_A{}' \varphi_1(x_n)\cdot\varphi_2(y) = \sum_{y=0}^{y=g(x_n)}{}^A \varphi_1(x_n)\cdot\varphi_2(y) = \varphi_1(x_n)\sum_{y=0}^{y=g(x_n)}{}'^A \varphi_2(y).$$

in cui $g(x_n)$ è il valore assunto dalla funzione rappresentata dalla curva f in x_n e $h(y_n)$ è il valore di x che corrisponde a

$$g(x) = y_n.$$

Dunque

$$\sum_{\underline{A}} {}_1 z = \begin{cases} \varphi_1(x_1) \sum_{0}^{g(x_1)} {}_1^A \varphi_2(y) + \varphi_1(x_2) \sum_{0}^{g(x_2)} {}_1^A \varphi_2(y) + \cdots \\ \varphi_2(y_1) \sum_{0}^{h(y_1)} {}_1^A \varphi_2(y) + \cdots\cdots \end{cases}$$

ossia

$$\varphi_1(x_1) \sum_{0}^{g(x_1)} {}_1^A \varphi_2(y) + \varphi_1(x_2) \sum_{0}^{g(x_2)} {}_1^A \varphi_2(y) + \cdots\cdots =$$

$$\text{III} \quad \varphi_2(y_1) \sum_{0}^{h(y_1)} {}_1^A \varphi_1(x) + \varphi_2(y_2) \sum_{0}^{h(y_2)} {}_1^A \varphi_1(x) + \cdots\cdots$$

formola, questa, generalissima, che nel caso di $x_1\, x_2\, x_3 \cdots$ eguale al sistema $y_1\, y_2\, y_3 \cdots\cdots$ dei numeri interi da le formule o identità generali trovate dal Cesàro nelle sue "Sur diverses questions d'arithmétique".

Ora prendendo il sisteme delle x_n eguale a quello dei numeri interi quello delle ~~y_n eguale~~ a quello delle r-sime potenze di $p_1\, p_2\, p_3 \cdots\cdots$; $\varphi_1(x) = 1$; $\varphi_2(y) = 1$ sarà se la curva f è un l'iperbole equilatera $xy = a$.

$$\text{IV} \begin{cases} \Psi\left(\frac{a}{1}\right) + \Psi\left(\frac{a}{2}\right) + \Psi\left(\frac{a}{3}\right) + \cdots\cdots = \left[\frac{a}{p_1}\right] + \left[\frac{a}{p_2}\right] + \cdots\cdots & \text{per } r=1 \text{ e più generalmente} \\ \Psi\left(\sqrt[2]{\frac{a}{1}}\right) + \Psi\left(\sqrt[3]{\frac{a}{2}}\right) + \Psi\left(\sqrt[3]{\frac{a}{3}}\right) + \cdots = \left[\frac{a}{p_1^r}\right] + \left[\frac{a}{p_2^r}\right] + \cdots & \text{ovvero} \\ \Psi\left(\sqrt[2]{\frac{a}{1}}\right) + \cdots + \Psi\left(\sqrt[r]{\frac{a}{2}}\right) + \cdots , \Psi\left(\sqrt[r]{\frac{a}{a}}\right) \equiv a \cdot \varphi_r & \end{cases}$$

in cui $\Psi(m)$ è la quotità dei p in $(0, m)$.

Passiamo ora a trovare la forma di $\Psi(a)$.

Supposta conosciuta la sola φ_1 -

avremo per la ($\underline{I}$)

$$\Psi(a) = \left(a \left(\varphi_1(a) - \sum_1^a \varphi_1\left(\frac{a}{n_1}\right)_{\frac{a}{n_1}} + \sum_1^{\sqrt{a}} \varphi_1\left(\frac{a}{n_1 n_2}\right)_{\frac{a}{n_1 n_2}} \sum_1^{\sqrt[3]{}} \varphi_1\left(\frac{a}{n_1 n_2 n_3}\right) + \frac{a}{n_1 n_2 n_3} \right) \right)$$

$n_1 \neq n_2 \neq n_3 \cdots$

Supposte conosciute tutte le φ (allora e solo allora il sistema delle p è determinato) avremo da (IV).

$$\pi(a) + \pi\left(\frac{a}{1}\right) + \pi\left(\frac{a}{2}\right) + \cdots + \pi\left(\frac{a}{a}\right) \equiv a\left(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_w\right) = \Phi_a$$

in cui $\pi(a) = \sum_1^w \Psi(\sqrt[n]{a})$

$w = \left[\frac{\log(a)}{\log 2}\right]$;

da questa per la I

$\pi(a) \equiv$

$$a\left(\Phi(a) - \sum_1^a{}' \Phi\left(\frac{a}{n_1}\right) + \sum_1^{\sqrt{a}}{}' \Phi\left(\frac{a}{n_1 n_2}\right) - \cdots\right)$$

e $\Psi(a) \equiv$

$$\pi(a) - \sum_1^w{}' \pi(\sqrt[n]{a}) + \sum_1^{\sqrt{w}}{}' \pi(\sqrt[n_1 n_2]{a}) - \sum_1^{\sqrt[3]{w}}{}' \pi(\sqrt[n_1 n_2 n_3]{a}) \cdots$$

Ancora dalle III si ha

$\Psi(a) \equiv$

$$a^n \varphi_n(a^n) - \sum_1^{a^n}{}' \varphi_n\left(\frac{a^n}{n_1}\right)\frac{a^n}{n_1} + \sum_1^{\sqrt{a^n}}{}' \varphi_n\left(\frac{a^n}{n_1 n_2}\right)\frac{a^n}{n_1 n_2} \cdots$$

ovvero $\Psi(a) \equiv a^n\left(\varphi_n(a^n) - \sum_1^{a^n}{}' \varphi_n\left(\frac{a^n}{n_1}\right)\frac{1}{n_1} + \sum_1^{\sqrt{a^n}}{}' \varphi_n\left(\frac{a^n}{n_1 n_2}\right)\frac{1}{n_1 n_2} \cdots\right)$

$$\frac{\Psi(a)}{a^n} = \varphi_n(a^n) - \sum_1^{a^n}{}' \varphi_n\left(\frac{a^n}{n_1}\right)\frac{1}{n_1} + \cdots$$

$\longleftrightarrow$

Riguardo poi a quella corrispondenza biunivoca ecc. le volevo far notare che:
se $\Phi_n(a_1 a_2 a_3 \cdots a_n)$ indica il valore del segmento corrispondente al punto unico, a sua volta corrispondente a $(a_1 a_2 a_3 \cdots a_n)$ è
$$\Phi_n(a_1 a_2 a_3 \cdots a_n) = \Phi_n(a_1 000000\ldots) + \Phi_n(0 a_2 0000) + \cdots \Phi_n(0000 \ldots a_n)$$