SEMINARIO
MATEMATICO E FISICO
MILANO

Milano, 5 marzo 1930.

R. 12

Illustre professore,

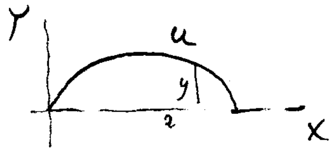
Scusi se non ho risposto prima alla Sua lettera, ma, in occasione delle vacanze di Carnevale, sono stato un po' impegnato.

La ringrazio per la lettura della tesi della Ranucci, alla quale ho comunicato le Sue osservazioni ed il Suo giudizio (e credo che la Signorina Le abbia scritto in proposito). —

Conoscevo gli esempi della spirale iperbolica, logaritmica e della curva $y = x \sin \frac{1}{x}$, ma non quelli delle curve coniche che Lei mi segnala.

Però se queste linee sono degli *archi* semplici (cioè delle figure omeomorfe ad un segmento) dovrebbe potersi stabilire una corrispondenza *biunivoca* continua fra i punti di essi e quelli di un segmento. Ciò (credo) che equivalga a dire che debba *esistere* *un* *particolare* vettore a ed un punto O tali che le coordinate dei punti di detta *figura* rispetto al sistema cartesiano O, a, ia siano legate da una funzione continua invertibile.

./.



Invece, giustamente, Lei osserva che se come asse delle x noi prendiamo la congiungente degli estremi d'un arco "di cerchio" u, allora non vi è più corrispondenza biunivoca fra le coordinate x ed y dei punti di u. Ma, però, si può riferire la figura u ad un sistema di coordinate in modo che fra x ed y (le nuove) intercede una corrispondenza biunivoca].

Ora io non so come possa farsi una cosa analoga per le linee che Lei mi segna-
a, sebbene esse soddisfacciano alla definizione di Lennes.

D'altra parte la crescenza d'una funzione reale di variabile reale è condizione necessa-
ria per la sua invertibilità? Non so. Ma parrebbe di no. Perchè, se consideriamo le funzioni f e g definite in tal modo

$$f0 = 0 \,:\, x \,\varepsilon\, 0 \frown 1 \,.\, \supset_x .\; fx = x \sin\frac{1}{x},$$
$$g0 = 0 \,:\, x \,\varepsilon\, 0 \frown 1 \,.\, \supset_x .\; gx = x^2 \sin\frac{1}{x},$$

d i loro diagrammi, questi dovrebbero essere degli "archi" (essendo la retta
tangente rappresentata); eppure il punto (0,0) è di oscillazione (cioè in ogni suo
intorno esistono infiniti massimi e minimi di f e g).

Col metodo della condensazione delle singolarità è poi possibile definire una funzione
ale di variabile reale derivabile e che ammetta come punti di oscillazione
tti i punti d'ascissa razionale. Allora la figura formata dai punti del diagramma
rtesiano d'una tal funzione dovrebbero formare una linea semplice (e pare che
formino secondo la definizione di Lennes), eppure io non riesco ad immagi-
nare come una siffatta curva possa presentarsi come diagramma d'una

SEMINARIO
MATEMATICO E FISICO
MILANO

Milano, ...

funzione continua *invertibile*.

Desidero studiare queste interessanti questioni; ma però non ora (chè sono molto occupato in altre cose ed ho avuto una triste esperienza delle cose fatte in fretta ...) e se, Lei, vorrà darmi qualche consiglio in proposito mi farà un vero regalo.

Ringraziamenti e cordiali saluti

Devot.

U. Cassina