Caro amico,

Pochi giorni fa, due studenti venuti di Germania, hanno proposto al prof. Enriques di trovare una teoria soddisfacente e semplice del gioco, più semplice a spiegarsi a voce, che a leggere, che segue qui ~~sotto~~ accluso. Essi hanno detto di non conoscere nessuna semplice soluzione.

Io l'ho trovata, semplidssima. Forse a Torino può interessare qualcuno. Credo che il prof. Enriques stampi il problema ~~con la sua~~ senza la soluzione, nel prossimo numero del Periodico di Matematica. E' un problema interessante, perché obbliga a descrivere in modo semplice il gioco. C'é un modo più semplice di descriverlo ?

La soluzione da me ora trovata, é il risultato di un calcolo semplice e elementare, ma vi sono anche forse altre vie più semplici.

Ho ringraziato la signorina dott. Boccalatte dell'invio della sua interessante nota.

12 Dicembre 1929

Mi creda sempre suo aff.mo

Giovanni Vacca

e saluti anche da Virginia.

Via Ruggero Bonghi 26

GIOCO.

Due giocatori, A, B, giocano con palline, gettoni, fiammiferi, sassolini o altri oggetti, con queste regole:

1. Si fanno due mucchi disuguali.

2. A toglie dai due mucchi un numero eguale di oggetti, ovvero da un solo mucchio, almeno un oggetto, o quanti più ne vuole.

3. B dai mucchi rimasti toglie ancora altri oggetti con la stessa regola: un egual numero dai due mucchi, ovvero quanti vuole da uno solo dei due mucchi.

4. E così alternativamente, A toglie ancora oggetti colla stessa regola e poi B, e poi di nuovo A, ecc.

5. Vince chi per ultimo può toglierli tutti. Occorre perciò che al vincitore rimanga un solo mucchio, ovvero due mucchi eguali.

6. Dati due mucchi a caso, si domanda se c'é una regola per cui si può predire la vittoria di A o di B, supposto che almeno uno di essi giuochi nel miglior modo possibile.

7. La risposta e affermativa. Infatti:

a) Se si hanno i due mucchi di 1 e 2 oggetti, e deve giocare A, vince B. (Poiché A deve togliere un oggetto da entrambi i mucchi ovvero un oggetto dal mucchio 2, e lasciare la coppia 1-1, ovvero togliere uno dei due mucchi.)

b) Se si hanno i due mucchi di 3 e 5 oggetti, e deve giocare A, vince B. (Se infatti A ne toglie due per parte, rimangono i mucchi 1 e 3, allora B toglie uno a destra, A rimane con 1 e 2, deve giocare, e siamo nel caso precedente. Se B toglie uno per parte, rimangono 2 e 5, allora A toglie quattro a destra, e rimangono 1 e 2, ecc.)

c) Se si hanno i mucchi 4 e 7 e deve giocare A, vince B. Si riconduce al caso precedente.

d) Se si hanno i mucchi 6 e 10 e deve giocare A, vince B.

Le coppie di numeri che assicurano la vittoria di A, se deve cominciare a giocare B, sono le coppie 1-2, 3-5, 4-7, 6-10, 8-13, 9-15, 11-18, 12-20, 14-23, 16-26, 17-28, ...

7. Se si chiamano a_n e b_n i numeri degli oggetti dei due mucchi, posto per simmetria $a_0 = b_0 = 0$, caso in cui B vince perchè non ha oggetti da togliere, si ha:

1. $a_0 = 0$
2. $n \varepsilon N_0 . \supset . \; b_n = n + a_n$
3. $n \varepsilon N_0 . \supset . \; a_{n+1} = \min \left[(a_n + N_1) \sim b'1 \cdots n \right]$

ovvero, il che fa lo stesso:

3'. $n \varepsilon N_0 . \supset . \; a_{n+1} = \max \left[N_1 \frown x \ni \left(1 \cdots x \supset (a'1 \cdots n) \smile (b'1 \cdots n) \right) \right]$

Cioè, in lingua comune, posto a sinistra il mucchio minore, cioè posto $a_n < b_n$, si ha:

$b_n - a_n = n$, ed a_{n+1} è il più piccolo dei numeri maggiori di a_n che non appartengono alla succesione $b_1, b_2, \ldots b_n$.

8. Mi è stato domandato se esiste una legge di formazione più semplice dei ~~numeri~~ a_n.

È questa, trovata proprio ora:

$$n \varepsilon N_0 . \supset . \; a_n = \mathrm{E}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \times n \right)$$ cioè a_n è la parte intera del prodotto $n \times \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Roma, 12 Dicembre 1929

Giovanni Vacca