Sul problema degli scrigni

Il prof. G. Boccardi, nella sua Nota "Questioni di probabilità" (Atti dell'Accad.ª di Torino, 1915-16, vol.e 51, pag. 1139), si occupa anche del ben noto problema degli scrigni e dimostra per $n=3$ e 4 un teorema esteso poi ad n qualsiasi dal sig. E. Gugino, in un articolo con titolo eguale a quello della presente Nota (ultimo fascicolo, gennaio 1918, dell'edizione livornese del Period.º di Mat.ª, direttore Lazzeri).

Ecco il risultato del Gugino: "Siano dati n scrigni identici, con $n-1$ cassetti ciascuno; ogni cassetto contiene una moneta, d'oro o d'argento; uno scrigno, che diremo primo (ma non sappiamo quale sia), ha ovunque monete d'oro; un secondo scrigno ne ha una (sola) d'argento; un terzo scrigno ne ha due, un quarto tre e così via, fino all'ultimo scrigno in cui le monete sono tutte d'argento; si è aperto ~~un~~ [1] cassetti, trovandovi una moneta d'oro; la probabilità di trovare oro anche in un altro cassetto dello stesso scrigno è $\frac{2}{3}$ ».

Mi propongo di trovare lo stesso risultato per altra via, assieme ad altri che non mi sembrano meno interessanti.

⁂

1 – Dimostriamo anzitutto la formula

[1] a caso uno degli $n(n-1)$

$$\sum_{r=k}^{n-h} \binom{n-r}{h}\cdot\binom{r}{k} = \binom{n+1}{h+k+1} \qquad (1)\,,$$

che, quando $k=0$, coincide con l'altra, ben nota,

$$\sum_{r=0}^{n-h} \binom{n-r}{h} = \binom{n+1}{h+1} \qquad (2)\,.$$

Ovviamente si vede che la (1) è valida quando $n=2$; per dimostrarla in generale basta dunque provare che, ammettendola vera fino ad un valore qualsiasi n, essa lo è anche per $n+1$.

Infatti si ha

$$\sum_{r=k}^{n+1-h} \binom{n+1-r}{h}\cdot\binom{r}{k} = \binom{n+1-k}{h} + \sum_{r=k+1}^{n+1-h} \binom{n+1-r}{h}\left\{\binom{r-1}{k-1}+\binom{r-1}{k}\right\} =$$

$$= \binom{n+1-k}{h} + \sum_{r=k}^{n-h} \binom{n-r}{h}\binom{r}{k-1} + \sum_{r=k}^{n-h} \binom{n-r}{h}\binom{r}{k} =$$

$$= \sum_{r=k-1}^{n-h} \binom{n-r}{h}\binom{r}{k-1} + \sum_{r=k}^{n-h} \binom{n-r}{h}\binom{r}{k} =$$

$$= \binom{n+1}{h+k} + \binom{n+1}{h+k+1} = \binom{n+2}{h+k+1}\,.$$

Si noti, incidentalmente, che dalla (2) si deduce, in modo ben ovvio, la

$$\sum_{r=1}^{n} r\cdot(r+1)\cdot(r+2)\cdots(r+h) = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+h+1)}{h+2}\,,$$

poco nota, ~~e non nota in generale~~, pur essendo notissimi ~~nei~~ i suoi casi particolari $h=1$ e 2.

<u>2</u> – Siamo ora in grado di trovare subito la probabilità che, aprendo a caso r cassetti di uno scrigno qualsiasi, si trovino in essi w monete d'oro ed $\alpha = r-w$ d'argento.

I casi possibili sono $\binom{n-1}{r}$ per ogni scrigno e sono quindi, complessivamente,

$$n\binom{n-1}{r} = \frac{\lfloor n}{\lfloor r \; \lfloor n-r-1}$$

Vi sono casi favorevoli solo per gli scrigni che hanno, almeno, α monete d'argento ed w monete d'oro. Sia $s \geq \alpha$ e si consideri lo scrigno che ha s monete d'argento e quindi $n-1-s$ monete d'oro; relativamente ad esso i casi favorevoli sono

$\binom{n-1-s}{w}\cdot\binom{s}{\alpha}$. Dovendo essere $n-1-s \geq w$, basta supporre $s \leq n-1-w$; sicchè il numero totale dei casi favorevoli è, per la (1),

$$\sum_{\alpha}^{n-1-w}{}_{s} \binom{n-1-s}{w}\cdot\binom{s}{\alpha} = \binom{n}{w+\alpha+1} = \binom{n}{r+1} = \frac{\lfloor n}{\lfloor r+1 \; \lfloor n-r-1}.$$

La probabilità cercata è quindi

$$\frac{\lfloor n}{\lfloor r+1 \; \lfloor n-r-1} : \frac{\lfloor n}{\lfloor r \; \lfloor n-r-1} = \frac{1}{r+1}.$$

Va notato che essa dipende solo dal numero r dei cassetti aperti e non dai numeri w ed α; comunque si scomponga r nella somma $w+\alpha$, la probabilità è sempre $\frac{1}{r+1}$.

Se, ad es., i cassetti aperti sono 3, sono $\frac{1}{4}$ tutte le 4 probabilità seguenti: che si siano trovate 3 monete d'oro, oppure 2 d'oro ed una d'argento, oppure una d'oro e 2 d'argento, oppure 3 monete d'argento.

<u>3 —</u> Dopo avere aperti r cassetti, trovando

tutte monete d'oro, quale probabilità c'è di trovare oro, aprendo un altro cassetto dello stesso scrigno?

Sia x tale probabilità incognita. Per il teorema della probabilità composta si ha, manifestamente, $\frac{1}{r+1}\cdot x = \frac{1}{r+2}$; quindi $x = \frac{r+1}{r+2}$.

Se $r=1$, si ha il risultato del sig. Gugino.

Se, ad es., fossero stati invece aperti 4 cassetti, trovando sempre oro, è $\frac{5}{6}$ la probabilità di trovare oro anche in un altro cassetto dello stesso scrigno; la probabilità di trovarvi argento è solo $\frac{1}{6}$.

+++
++

4 — Cerchiamo invece la probabilità di trovare due monete d'oro aprendo a caso due cassetti appartenenti a due scrigni diversi.

Si osservi anzitutto che, ~~la probabilità~~ essendo $(n-1)^2$ il numero dei casi possibili per ogni coppia di scrigni, il numero totale dei casi possibile è $\frac{1}{2}n(n-1)^3$.

Se uno degli scrigni aperti è il primo, il numero dei casi favorevoli è

$$(n-1)\cdot\{(n-2)+(n-3)+\cdots+3+2+1\} =$$
$$= (n-1)\cdot\frac{1}{2}(n-2)(n-1) = \frac{1}{2}(n-2)(n-1)^2 .$$

Analogamente i casi favorevoli sono $\frac{1}{2}(n-3)(n-2)^2$, se fra i due scrigni aperti c'è il secondo, ma non il primo; se c'è il terzo, ma nessuno dei primi due, i casi favorevoli sono $\frac{1}{2}(n-4)(n-3)^2$; e così via; sono soltanto $2=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2^2$, se i due scri gni aperti sono fra i tre ultimi. Complessivamente il numero dei casi favorevoli è

$$\frac{1}{2}\sum_{1}^{n-2}{}_h\, h(h+1)^2 = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n-2}{}_h\, h^3 + \sum_{1}^{n-2}{}_h\, h^2 + \frac{1}{2}\sum_{1}^{n-2}{}_h\, h =$$

$$= \frac{1}{8}(n-2)^2(n-1)^2 + \frac{1}{6}(n-2)(n-1)(2n-3) + \frac{1}{4}(n-2)(n-1) =$$

$$= \frac{1}{24}(n-2)(n-1)\{3(n^2-3n+2)+4(2n-3)+6\} =$$

$$= \frac{1}{24}(n-2)(n-1)\,n(3n-1).$$

La probabilità cercata è quindi

$$\frac{(n-2)(3n-1)}{12(n-1)^2} = \frac{3n^2-7n+2}{12(n-1)^2},$$

Ad es., è $\frac{1}{6}$, se $n=3$; se $n=4$, è $\frac{11}{54}$.

5 – Se si suppone di avere già aperto un cassetto e di avervi trovata una moneta d'oro, si trova tosto, col teorema della probabilità composta, che la probabilità di trovare ancora oro, aprendo un cassetto di un altro scrigno, è

$$y = \frac{3n^2-7n+2}{6(n-1)^2},$$

Al crescere di n tale probabilità cresce, essendo $\frac{dy}{dn} = \frac{n+3}{6(n-1)^3} > 0$; ed ovviamente si vede che essa ha per limite $\frac{1}{2}$.

La probabilità trovata nel N.° 4 cresce essa pure, essendo $\frac{1}{2}y$; il suo limite è $\frac{1}{4}$.

6 – È ovvio che quanto si disse per le monete d'oro vale, identicamente, per quelle d'argento.

Si è veduto nel N.° 2 che le probabilità di trovare, in uno stesso scrigno, due monete d'oro, o una d'oro ed una d'argento, o due d'argento sono eguali fra loro. Dal N.° 3 si vede poi che, avendo già aperto un cassetto, la probabilità di trovare in un altro cassetto dello stesso scrigno una moneta di egual metallo è $\frac{2}{3}$, mentre è solo $\frac{1}{3}$ quella di trovare una moneta di metallo diverso.

Dal N.° 4 si vede invece che, aprendo a caso due cassetti di due scrigni diversi è più probabile trovare due monete di metallo diverso piuttosto che due di egual metallo. Infatti la probabilità che le due monete siano entrambe d'oro o entrambe d'argento è $p_1 = \frac{3n^2-7n+2}{6(n-1)^2}$, mentre la probabilità che siano una d'oro ed una d'argento è $p_2 = 1-p_1 = \frac{3n^2-5n+4}{6(n-1)^2} > p_1$, c.v.d.

Al crescere di n, p_1 [N.° 5] cresce; p_2 decresce; p_1 e p_2 hanno limiti eguali.

Dal N.° 5 si vede che p_1 e p_2 sono anche le probabilità che, avendo già aperto un cassetto, in un altro cassetto di un altro scrigno si trovi una moneta di egual metallo, oppure una di metallo diverso. Questa seconda probabilità è sempre maggiore della prima; al crescere di n esse però convergono entrambe ad $\frac{1}{2}$.