Teorema I

Sia dato il polinomio:

$a_1 b + a_2 b^2 + a_3 b^3 + \dots\dots + a_n b^n$, nel quale il coefficiente generico $a_r = a_{r-1} + q$, ove q sia costante, ossia i coefficienti a_r, variando r da 1 ad n, vadano secondo una progressione aritmetica. Dico che è:

$$a_1 b + a_2 b^2 + \dots\dots + a_n b^n = \frac{1}{1-b}\left[a(b-b^{n+1}) + q\left(\frac{b^2-b^{n+1}}{1-b} - [n-1]\,b^{n+1}\right)\right].$$

Infatti al posto del polinomio dato possiamo scrivere: $a_1 b + (a_1+q)b^2 + (a_1+2q)b^3 + \dots\dots + (a_1+[n-1]q)b^n$, che è uguale ad: $a_1(b+b^2+\dots b^n) + qb^2 + 2qb^3 + \dots\dots + (n-1)q\,b^n =$

$$= a_1\frac{b-b^{n+1}}{1-b} + q\left[(b^2+b^3+\dots+b^n)+(b^3+b^4+\dots+b^n)+\dots\dots+(b^{n-1}+b^n)+b^n\right] =$$

$$= a_1\frac{b-b^{n+1}}{1-b} + q\left(\frac{b^2-b^{n+1}}{1-b} + \frac{b^3-b^{n+1}}{1-b} + \dots\dots + \frac{b^n-b^{n+1}}{1-b}\right) =$$

$$= \frac{1}{1-b}\,a_1(b-b^{n+1}) + \frac{1}{1-b}\,q\left(b^2-b^{n+1}+b^3-b^{n+1}+\dots\dots+b^n-b^{n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{1-b}\left[a(b-b^{n+1}) + q\left(\frac{b^2-b^{n+1}}{1-b} - [n-1]\,b^{n+1}\right)\right].$$ C. V. D.

Teorema II

Siano a ed α_z dei numeri reali positivi ed α assuma valori diversi al variare dell'indice z; sia $a>1$ e siano n ed m dei numeri naturali positivi. Sia dato il polinomio:

$$\alpha_1 a^n + \alpha_2 a^{n-1} + \dots + \alpha_m a^{n-(m-1)}.$$

Se il coefficiente generico α_z assume al variare dell'indice z valori compresi fra zero ed $a-1$, allora si ha che:

« La somma di tutti i termini, che rimangono a destra di un termine qualsiasi $\alpha_z a^{n-z+1}$ è minore od uguale ad a^{n-z+1}. È uguale solo nel caso che il polinomio costituisca una serie e che α assuma in ogni termine il valore di $a-1$ ».

Infatti supponiamo questo caso particolare, che è nello stesso tempo caso limite. Prendiamo per esempio i termini a destra di $\alpha_1 a^n$. In essi i fattori α_2, α_3 ecc. sono tutti uguali ad $a-1$. La somma dei termini a destra di $\alpha_1 a^n$ si può scrivere:

$$(a-1)a^{n-1} + (a-1)a^{n-2} + \dots + (a-1)a^{n-m+1}.$$

Ossia: $(a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^{n-m+1}) =$

$$= (a-1)\,\frac{a^n - a^{n-m+1}}{a-1} = a^n - a^{n-m+1}.$$ Poiché

m tende all'infinito a^{u-m+1} tende a zero. Perciò la somma dei termini a destra di $\alpha_1 a^u$ è uguale nel caso dato ad a^u. Negli altri casi cioè in cui il numero dei termini sia finito o se è infinito vi sia almeno uno dei coefficienti $\alpha_2 < a-1$, la somma dei termini a destra di $\alpha_1 a^u$ è inferiore ad a^u.

C. V. D.

1° Caso particolare.

Come caso particolare del teorema II si ha che:

«In un numero espresso col sistema comune delle cifre e della base 10 (ove per convenzione 9 è la massima cifra che possa figurare come coefficiente delle potenze del 10, che non sono espresse ma sottintese dal posto delle cifre) la somma effettiva dei valori delle cifre a destra di una cifra qualsiasi è sempre inferiore alla potenza del dieci, di cui la cifra in parola è il coefficiente».

Questo fatto viene generalmente ammesso come intuitivo, invece ha bisogno di essere dimostrato od applicando il teorema II facendo $a = 10$, oppure dimostrandolo direttamente con procedimento analogo a quello seguito per la dimostrazione del teorema II.

2° Caso particolare

Facendo nel polinomio del teorema II

α_2 sempre $=1$, si ha che:

« In una progressione geometrica a termini positivi disposta come la: $a^n + a^{n-1} + \dots + a^{n-m+1}$, in cui la ragione sia maggiore di 1, un termine qualsiasi è maggiore della somma dei termini che si trovano a destra di esso».

Progressione aritmetica

Un nuovo metodo per ricavare la formola di una progressione aritmetica, più lungo, ma nuovo, è il seguente:

Sia data una matrice quadrata d'ordine $n+1$ e sia r un numero naturale che varia da 1 ad $n+1$:

$$\begin{array}{cccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & a_{1(n+1)} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & a_{2(n+1)} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & a_{3(n+1)} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} & a_{n(n+1)} \\
a_{(n+1)1} & a_{(n+1)2} & a_{(n+1)3} & \dots & a_{(n+1)n} & a_{(n+1)(n+1)}
\end{array}$$

Traccio una delle diagonali. Da una parte e dall'altra della diagonale il numero degli elementi è dato da $\sum_{r=1}^{r=n} r$. Quindi il numero degli elementi della matrice è dato da: $2\sum_{r=1}^{r=n} r + n+1$. Ossia è:

$(n+1)^2 = 2\sum_{r=1}^{r=n} r + n+1$. Quindi è:

$$\sum_{r=1}^{r=n} r = \frac{(n+1)^2 - n+1}{2} = \frac{(n+1[(n+1)-1]}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Procediamo per induzione al caso più generico di una progressione aritmetica. Avremo:

$a+(a+q)+(a+2q)+\dots+(a+[n-1]q)$, ove q sia la ragione. Questa progressione è uguale ad:

$$na+q(1+2+\dots+[n-1])=$$

$$=na+q\frac{n(n-1)}{2}=\binom{n}{1}+q\binom{n}{2}$$ che esprimono la progressione aritmetica.

Alcune formole di calcolo combinatorio:

$$D_{m,2}=m^2-m$$

$$D_{m,3}=m^3-3m^2+2m$$

$$D_{m,4}=m^4-6m^3+11m^2-6m$$

$$D_{m,5}=m^5-10m^4+35m^3-50m^2+24m$$

$$D_{m,n}=(-1)^{r+1}\left[m^n+a_2m^{n-1}+a_3m^{n-2}+\dots+a_{n-1}m^2+a_nm\right],$$ ove l'esponente e l'indice r dei coefficienti varia da 1 ad n ed a_r è al variare dell'indice r sempre un numero naturale positivo.

$$m^2 = \mathcal{S}_{m,2} + \mathcal{S}_{m,1}$$

$$m^3 = \mathcal{S}_{m,3} + 3\,\mathcal{S}_{m,2} + \mathcal{S}_{m,1}$$

$$m^4 = \mathcal{S}_{m,4} + 6\,\mathcal{S}_{m,3} + 7\,\mathcal{S}_{m,2} + \mathcal{S}_{m,1}$$

$$m^5 = \mathcal{S}_{m,5} + 10\,\mathcal{S}_{m,4} + 25\,\mathcal{S}_{m,3} + 15\,\mathcal{S}_{m,2} + \mathcal{S}_{m,1}$$

$$m^n = \mathcal{S}_{m,1} + a_2\,\mathcal{S}_{m,2} + \cdots\cdots + a_{n-1}\,\mathcal{S}_{m,n-1} + \mathcal{S}_{m,n}$$

ove a al variare dell'indice r è sempre un numero naturale positivo.

$$\mathcal{C}_{m,2} = \frac{m^2 - m}{2!}$$

$$\mathcal{C}_{m,3} = \frac{m^3 - 3m^2 + 2m}{3!}$$

. . . .

$$\mathcal{C}_{m,n} = \frac{(-1)^{r+1}(m^n + a_2 m^{n-1} + a_3 m^{n-2} + \cdots + a_{n-1} m^2 + a_n m)}{r!},$$

ove a_r è sempre un numero naturale positivo

$$m^2 = 2\,\mathcal{C}_{m,2} + \mathcal{C}_{m,1}$$

. . . .

$m^n = a_1 C_{m,1} + a_2 C_{m,2} + \dots + a_m C_{m,n}$, ove a_2 è sempre un numero naturale positivo.

Quest'ultima formola la si può ottenere anche dallo sviluppo del binomio ponendo al posto di m^n il binomio $[1+(m-1)]^n$ e facendo tutti gli n sviluppi generati da questo sviluppo. Il procedimento è lunghissimo.

Teorema III

Sia a un numero reale positivo < 1; trovare il valore di quel numero x tale che $1+x+x^2+\dots+x^{n-1}+x^n$ (ove n tende all'infinito) $= a$.

Sappiamo che la serie geometrica data è uguale ad $\frac{1}{1-x}$. Quindi sarà $\frac{1}{1-x}=a$, da cui si ricava che $x = \frac{a-1}{a}$. C.V.D.

Teorema IV

Siano a e b dei numeri interi positivi. Facendo la divisione di a per b (cioè sia **a** il dividendo e **b** il divisore) coll'operazione comune a base 10, la divisione darà per quoto un numero intero o decimale finito oppure un numero decimale periodico semplice o composto (indefinito). È interessante sapere fino a che punto la divisione possa prolungarsi per ottenere l'uno o l'altro caso.

È facile conoscere ciò considerando che i resti della divisione non possono essere che dei numeri compresi fra zero e b-1.

Perciò dopo che siano state abbassate tutte le cifre del dividendo, si ha che:

« Dopo al massimo b-2 volte (dacchè si è cominciato ad abbassare il primo zero, che non figura nel dividendo a) il dividendo risultato abbassando il (b-1)esimo zero

darà per resto un numero compreso fra ze=
ro e b-1 (compresi): nel caso di zero la divisione
sarà finita ed il quoziente della divisione sa=
rà un numero decimale;
o dopo al massimo b-1 volte, abbassando il
b$^{\text{esimo}}$ zero il dividendo darà per resto la
ripetizione di un resto ottenuto preceden=
temente ed il cui valore è compreso fra 1 e
b-1 (compresi). Aggiungendo a questo
resto lo zero come prima e proseguendo la
divisione darà origine nel quoziente al=
la ripetizione del periodo e così via ».

Teorema V

Sia da cercarsi l'integrale indefinito del prodotto di due o più funzioni definite ed integrabili nel campo a–b.

Se il prodotto in parola $f_1 x \cdot f_2 x \cdots f_n x$ è tale che:

1° esiste una $F x = \varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_{n-1} \varphi_n x$, ove gli φ_r (in cui l'indice r varia da 1 ad $n-2$) sono funzioni di funzioni che operano successivamente ed ordinatamente a cominciare da φ_{n-2} fino φ_1 sulla funzione di funzione ottenuta ossia sulla $\varphi_{n-1} \varphi_n x$;

2° e se la derivata di $\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_{n-1} \varphi_n x = f_1 x \cdot f_2 x \cdots f_n x$, ove l'ordine del secondo membro rappresenti l'ordine di derivazione,

allora è sempre possibile e facile dato il prodotto $f_1 x \cdots f_n x$ ricavare il suo integrale $\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_n x$, che si ricava nel seguente modo:

Si trova prima l'integrale di $f_n x$, che scriviamo $\int f_n x \cdot dx$ e che è uguale a $\varphi_n x$, poi si trova $\int f_{n-1} x \cdot d\varphi_n x = \varphi_{n-1} \varphi_n x$; poi $\int f_{n-2} x \cdot d\varphi_{n-1} \varphi_n x = \varphi_{n-2} \varphi_{n-1} \varphi_n x$. E così via $\int f_{n-3} x \, d\varphi_{n-2} \varphi_{n-1} \varphi_n x = \varphi_{n-3} \varphi_{n-2} \varphi_{n-1} \varphi_n x$ fino a quando si trova:

$\int f_1 x \, d\varphi_2 \varphi_3 \cdots \varphi_n x = \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \cdots \varphi_n x$, che volevasi cercare. La prova che questo procedimento è corretto si ottiene facendo la derivata di $\varphi_1\varphi_2 \dots \varphi_n x$, che risulta eguale a $f_1 x \cdot f_2 x \dots f_{n-1} x \cdot f_n x$.

Esempio. — Sia da integrarsi il prodotto:
$2 \operatorname{sen} \log e^{\cos x} \cdot \cos \log e^{\cos x} \cdot \frac{1}{e^{\cos x}} \cdot e^{\cos x} \cdot (-\operatorname{sen} x)$,
che rappresenta il prodotto $f_1 x \cdot f_2 x \dots f_n x$, ove $n = 5$.
Allora $\int f_5 x \, dx = \int - \operatorname{sen} x \, dx = \cos x = \varphi_5 x$;
$\int f_4 x \, d \varphi_5 x = \int e^{\cos x} \, d \cos x = e^{\cos x} = \varphi_4 \varphi_5 x$;
$\int f_3 x \, d \varphi_4 \varphi_5 x = \int \frac{1}{e^{\cos x}} \, d e^{\cos x} = \log e^{\cos x} = \varphi_3 \varphi_4 \varphi_5 x$;
$\int f_2 x \, d \varphi_3 \varphi_4 \varphi_5 x = \int \cos \log e^{\cos x} = \operatorname{sen} \log e^{\cos x} = \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 \varphi_5 x$;
$\int f_1 x \, d \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 \varphi_5 x = \int 2 \operatorname{sen} \log e^{\cos x} \, d \operatorname{sen} \log e^{\cos x} =$
$= (\operatorname{sen} \log e^{\cos x})^2 = \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 \varphi_5 x$. Facendo la derivata di $(\operatorname{sen} \log e^{\cos x})^2$ ossia di $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_5 x$, $(n=5)$, si ottiene il prodotto:
$2 \operatorname{sen} \log e^{\cos x} \cdot \cos \log e^{\cos x} \cdot \frac{1}{e^{\cos x}} \cdot e^{\cos x} \cdot (-\operatorname{sen} x)$.

Osservazione — Se pur esistendo una funzione $Fx = \varphi_1 \dots \varphi_n x$, la cui derivata è uguale al prodotto delle $f_r x$, il prodotto non è ordinato in modo che lo si possa integrare alla maniera dimostrata, lo si può sempre ordinare in modo che tale processo integrativo possa effettuarsi.