ALGEBRA, ARITMETICA e LOGICA -MATEMATICA. (argomento)

I.

Quando fu creata la Logica-Matematica questa non aveva nessuno scopo utilitario estraneo alla Logica stessa.
Più tardi, il Professore Giuseppe PEANO, colle geniali modificazioni che egli introdusse nella notazione logica, non solo le fece fare un notevole passo innanzi, ma pure le diede la possibilità di mettersi al servizio delle scienze matematiche.

Qui studieremo il problema opposto, quello, cioè, che consiste nell'assoggettare la disciplina matematica a quella logica e nell'esaminare se sia teoricamente possibile eliminare dalla logica formale qualunque simbolo che non si usi nella notazione algebrica.

È facile provare che ogni proposizione logica (tranne $a \supset a$ e $a \supset -a$) si lascia ridurre alle operazioni seguenti:

I. Addizione logica applicata esclusivamente a proposizioni (non-identiche) : $p \smile q$.

II. Moltiplicazione logica applicata a proposizioni e classi (non-identiche) : $p \frown q$, $a \frown b$.

III. Negazione logica limitata a proposizioni e classi che non siano complesse (come lo sono $a \frown b$, $p \smile q$ &c.): $-p$, $-a$ &c.

IV. Operazione delle funzioni ψ'a.

V. Affermazione dell'esistenza : $\exists a$.

VI. Passaggio dagli individui alle classi : ιx.

(operazione inversa : ℩x).

Sostituiamo, per dette sei operazioni, ai simboli usati dal Prof. Peano le notazioni algebriche seguenti :

I. Addizione algebrica, per es. $p + q$ (cf. Leibniz).

II. Moltiplicazione algebrica, per es. pq, ab (cf. Leibniz).

III. Elevazione a quadrato (o estrazione di radice quadrata), per es. p^2, a^2, $\sqrt{p^2}$.

IV. Elevazione ad altre potenze, per es. u^a.

V. Elevazione del numero "e" ad una potenza altra che 2, per es.

$$e^a \; , \; e^{ix} .$$

VI. Moltiplicazione per l'unità imaginaria i, per es.

ix (operazione inversa $-ix$ oppure x/i).

ESEMPI. Si tratti di esprimere algebricamente la relazione

$$a \smile b \supset c .$$

Si ha

$$a \smile b \supset c = - \exists(a \smile b) \frown (-c) = - \exists(a-c \smile b-c) =$$

$$= -(\exists\, a-c . \smile \exists\, b-c) = - \exists\, a-c . - \exists\, b-c .$$

Quindi, tenendo conto delle convenzioni suddette, la si esprime con

$$e^{2ac^2} \cdot e^{2bc^2}$$

oppure con

$$e^{2c^2(a+b)} .$$

In pari modo, la relazione $-(a \smile b \supset c)$, equivalente a $\exists\, a-c. \smile \exists\, b-c$, si rappresenterà con

$$e^{ac^2} + e^{bc^2}.$$

Cosi pure $a = b$, cioè $-\exists\, a-b. -\exists\, b-a$, si noterà con

$$e^{2ab(a+b)}; \quad , \quad x \,\varepsilon\, a \text{ con } e^{ixa} \text{ o con } e^{2ixa^2}$$

e $a \smile b$ con $L(e^a + e^b)$ (espressione ~~molto~~ in uso nel Calcolo differenziale).

E facile verificare che, d'altronde, per esempio, $p \supset q$, cioè $(-p) \smile q$ diverrà

$$p^2 + q$$

e che $p = -q$, cioè $(-p) \frown (-q) \smile pq$, si trasformerà in

$$p^2 q^2 + pq,$$

oppure in

$$pq(pq + 1).$$

Cosi qualunque proposizione logica si potrà esprimere sia con un monomio, sia con un polinomio.

Personalmente ho tradotto in monomî o polinomî più di 400 proposizioni logiche. S'intende però che questo studio non ha che un interesse teorico e non mira punto a sostituire ~~l'~~ ammirabile notazione del Prof. Peano.
un sistema nuovo al

II.

Se, invece di e^{a} si adottasse la notazione

$$\frac{1}{2^{a}}$$

(e, quindi, invece di e^{2a}, la notazione

$$\frac{1}{4^{a}}\ ),$$

e se, d'altra parte, le varie classi del linguaggio corrente a, b, c...u^{a}...(marito, buono, caduto, senza marito ecc.) si esprimessero con dei numeri del tipo

$$3^{3^{N_0}},$$

ogni proposizione logica si potrebbe ridurre sia ad una potenza intera positiva di 1/2, sia ad una somma di potenze intere positive di 1/2. E, viceversa, tale potenza o tale somma di potenze si potrebbe sempre decomporsi in elementi costitutivi senza nessun pericolo di ambiguità, dato che ogni N_φ si decompone in una sola somma di elementi del tipo

$$10 \smile 3^{N_0} \smile 2.3^{N_0}.$$

Si~~x~~supponga, ad esempio, che CATTOLICO si dica 3 e PROTESTANTE, $3^3 = 27$ e che si tratti di esprimere aritmeticamente "vi sono dei cattolici e vi sono dei protestanti".

Si ha

$$\frac{1}{2^{3}} \cdot \frac{1}{2^{3^3}} = \frac{1}{2^{30}} = \frac{1}{1073741824}.$$

Quindi detta frase può essere simboleggiata dalla frazione

$$\frac{1}{1073741824}.$$

Viceversa, si voglia decifrare, per esempio il senso del la frazione

$$\frac{16777217}{134217728} \cdot$$

Poichè si ha

$$\frac{16777217}{134217728} = \frac{16777216}{134217728} + \frac{1}{134217728} =$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{134217728} = \frac{1}{2^{3}} + \frac{1}{2^{27}} = \frac{1}{2^{3}} + \frac{1}{2^{3^3}},$$

la frazione in parola significherà "esistono dei cattolici o esistono dei protestanti o esistono gli uni e gli altri", frase del tipo logico $\exists a \smile \exists b$, ossia $\exists(a \smile b)$.

'E chiaro che, quando nelle proposizioni logiche pqr... e abc... il numero dei termini aumenta infinitamente, le due proposizioni tendono verso l'assurdo logico; in ambo i casi, essendo a, b, c... positivi (maggiori dell'unità), le frazioni corrispondenti della notazione aritmetica

$$\frac{1}{2^{a+b+c\dots}} \quad e \quad \frac{1}{2^{abc\dots}}$$

hanno per limite 0 (cf. la notazione di Boole).

D'altra parte, al limite di $p \smile q \smile r \dots$ (proposizione evidente) nel sistema aritmetico corrisponderà

$$\frac{1}{2^{1}} + \frac{1}{2^{2}} + \frac{1}{2^{3}} + \frac{1}{2^{4}} + \frac{1}{2^{5}} \dots = 1$$

(cf. la notazione di Boole).

Se, per estensione, a 1 si dà anche il senso di classe universale, 1/2 significherà $\exists V$ "qualchecosa esiste" e 1/4 avrà il valore di $-\exists V$ "non vi è nulla".

Prof. Dott. G. KOLOVRAT