RIVISTA

DI

MATEMATICA

DIRETTA

DA

G. PEANO

Professore di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino.

Volume II

TORINO
FRATELLI BOCCA
LIBRAI DI S. M.

1892

INDICE

RIVISTA DI MATEMATICA

Vol. II. — 1892

Questioni non ancora risolte.

QUESTIONI II E III.

II. È possibile o no, in generale, decomporre in parti sovrapponibili due tetraedri di egual base ed altezza?

III. È possibile o no, in generale, servendosi della sola riga, costruire un segmento medio proporzionale fra due segmenti dati, anche ammettendo (se occorre) di poter prendere sopra qualsivoglia retta data, a partire da un suo punto dato qualunque e da entrambe le bande di esso, un segmento eguale a qualsiasi segmento dato?

Alessandria, 21 maggio 1891.

E. DE AMICIS.

QUESTIONE IV.

In un piano sono date n rette a_1, a_2..., a_n. Determinare graficamente la posizione di un punto P per il quale si abbia

$$\rho_1 p_1^2 + \rho_2 p_2^2 \ldots\ldots + \rho_n p_n^2 = minimum$$

essendo p_1, p_2..... p_n le distanze del punto P dalle rette date e ρ_1, ρ_2..... ρ_n coefficienti assegnati.

Si desidera una soluzione diversa da quella data dal Bertot che trovasi nei *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Acad. des Sciences.* Paris, 1876.

N. JADANZA.

Sulla questione IV.

Non essendo ancora arrivata alcuna soluzione, credo di pubblicare quanto è a mia conoscenza su questo soggetto, continuando ad invitare i lettori a studiare delle soluzioni semplici di questa questione così importante nella pratica.

È noto che il punto cercato è in equilibrio sotto l'azione di n forze rappresentate dalle perpendicolari abbassate da esso sulle rette date, moltiplicate queste perpendicolari pei coefficienti $\rho_1\,\rho_2 \ldots \rho_n$. (La regola del calcolo differenziale o la considerazione del parametro differenziale conduce a questo risultato).

Il punto cercato è il baricentro dei punti d'incontro (a distanza finita) delle rette date $(a_i\,a_j)$, cui siano affisse rispettivamente le masse $\rho_i\,\rho_j \operatorname{sen}^2 (a_i\,a_j)$. (Vedasi p. e. il mio *Calcolo geometrico*, p. 168).

Una costruzione più semplice si ottiene considerando i luoghi dei punti per cui la funzione considerata è costante; i quali luoghi (supposti i coefficienti positivi) sono ellissi omotetiche, aventi per centro il punto cercato.

Ora la costruzione del diametro coniugato ad una data direzione r rispetto a queste coniche è la seguente: Si prenda su ciascuna delle rette date a_i un segmento misurato $\rho_i \operatorname{sen}(a_i, r)$, e si compongano questi segmenti considerandoli come forze applicate ad un corpo rigido, il che si fa facilmente coi poligoni funicolari. La risultante giacerà sul diametro coniugato colla direzione r (Vedi ivi, p. 167). Costrutti i diametri coniugati a due diverse direzioni, il loro punto d'incontro è il punto cercato.

È ancora a notarsi la seguente costruzione degli assi di quelle coniche. Preso un segmento o vettore ad arbitrio x, siano $x_1\,x_2 \ldots x_n$ i simmetrici di x rispetto alle rette date. Le due rette passanti per il centro e che dividono per metà gli angoli formati dal vettore x col vettore $\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 + \ldots + \rho_n x_n$ sono gli assi. (P.)

SUL

Trattato di Aritmetica Razionale del Dott. G. M. Testi

(Livorno — 1891 — Raff. Giusti).

Nel primo numero del 1891 di questo giornale, pubblicai una recensione degli *Elementi di Geometria* del sig. Testi, cercando far conoscere ai professori delle scuole secondarie inferiori i molti pregi che quel libro possiede, e non astenendomi dal manifestare all'A. quali parti, almeno a parer mio, potessero essere vantaggiosamente modificate in una seconda edizione [1].

[1] La seconda edizione degli *Elementi di Geometria* è stata fatta in quest'anno, e mentre mi congratulo con l'A. del rapido buon esito ottenuto dal suo libro, sono ben lieto di poterlo pubblicamente ringraziare per le cortesi parole indirizzatemi nella prefazione alla seconda edizione.

Potevo anche quest'anno inserire in questo 1° numero della *Rivista* una recensione dell'*Aritmetica razionale* dello stesso autore; ma, sebbene in questo libro, come nella geometria, le mende sieno poche e i pregi molti, pure tali mende non essendo, come nella geometria, isolate e relative ad argomenti speciali, ma riguardando invece il concetto generale di numero e quindi tutto lo svolgimento del libro, ho creduto meglio rinunziare alla recensione, e fare solo alcune osservazioni di ordine generale, alle quali le mende accennate poc'anzi mi danno occasione, sia avuto riguardo ai più recenti lavori sul concetto di numero, sia avuto riguardo ad idee già da me altre volte espresse.

Non vorrei però che il lettore, per quanto ho già detto e per quanto dirò, si ingannasse riguardo all'opinione che io ho dell'aritmetica razionale del sig. Testi. Se delle mende esistono, esistono però sotto forma tale che non sono dannose in un libro scolastico, perchè, nonostante tutto, la forma scientifica vi è, e non esito punto a dichiarare essere il libro del sig. Testi preferibile agli altri trattati già esistenti, non escluso quello del Bertrand.

***

Comincio col citare le principali inesattezze che, secondo quello che ho già accennato, influiscono sul razionale svolgimento del libro, e faccio subito notare che l'A. conservando inalterato il materiale degli ordinari trattati, premette alcuni teoremi sulle grandezze discrete, per mezzo dei quali, considerando il numero come una grandezza discreta, cerca rendere rigorose quelle definizioni che negli ordinari trattati sono prive di senso.

a) Nel definire la *collezione* (pag. 1) introduce il concetto di *riunire* che ammette implicitamente come appartenente all'intuizione, e lascia il dubbio se la collezione di cui parla è composta di un numero finito o infinito di elementi, tanto che nei teoremi seguenti, per renderli veri, bisogna far seguire la parola *collezione* dalla parola *finita*. E poichè collezione finita significa *collezione composta di un* NUMERO FINITO *di elementi*, l'idea di numero che deve dedursi dal concetto di collezione è già implicitamente contenuta in questa.

b) Nel N. 2 (pag. 1) dà come postulato, introducendo anche il concetto di ordine, la proposizione: *In una collezione di oggetti possiamo cambiare l'ordine degli oggetti stessi.* Non avendo l'A. fatto uso del concetto di ordine per definire la collezione, la proposizione non ha significato.

c) Nel N. 6 è detto: « Si chiama grandezza discreta la collezione di più oggetti eguali, cioè della medesima specie » e mentre pare che la parola *eguale* serva soltanto ad indicare l'identità della specie, è poi al N. 7 definita in un senso che non ha più relazione col precedente.

d) L'antica definizione (N. 10): « Si chiama numero intero l'unità o la collezione di più unità » non è ancora resa una vera definizione dai teoremi sulle grandezze discrete, poichè, nè direttamente nè indirettamente, è definita l'*unità*.

e) Al N. 16 trovo: « Il numero è indipendente dall'ordine delle sue unità »; e poco dopo: « Questa proprietà fondamentale del numero permette, mediante convenzioni assai semplici, di poter enunciare con regole determinate un qualunque numero mediante un numero limitato di parole ». La proprietà non mi pare veramente abbia significato, sia per l'osservazione già fatta (*b*), sia perchè le unità sono eguali tra loro; ma anche se ne avesse non influirebbe certo sulla numerazione parlata e scritta, le cui regole sono convenzioni e come tali possono variare all'infinito. È vero però che se le convenzioni della numerazione soddisfano alle proprietà del numero, il meccanismo numerico viene semplificato. A ciò pare non abbia l'A. troppo badato e per far precedere alle quattro operazioni la numerazione trova necessario p. e. dimostrare il teorema II del N. 29 che sarebbe contenuto nelle convenzioni per la scrittura in cifre, se per fare tali convenzioni si ricorresse al concetto di somma.

f) L'ordinaria definizione di sommare, N. 39: « L'addizione è l'operazione per cui si riuniscono in un solo le unità di due o più numeri dati » non è ancora ridotta ad essere una definizione, perchè l'A. ha domandato fin da principio all'intuizione il significato di *riunire* e in tal caso riunire vuol dire addizionare.

g) Anche la definizione di moltiplicazione, N. 81: « La moltiplicazione dei numeri è quell'operazione per cui dati due numeri se ne trova un terzo, che sia formato col primo di essi, come il secondo è formato con l'unità » non perde nulla del metafisico che ha, poichè l'A. non ha definito il significato della parola *formare*. E del resto è chiaro che definendo, come occorre per la moltiplicazione, il significato della parola *formare*, si viene a definire il prodotto e quindi *moltiplicare* vorrà sempre dire niente altro che *trovare il prodotto*. Si aggiunga a ciò che neanche nel linguaggio comune la parola *formare* ha un significato preciso.

***

Ed eccomi ora alle osservazioni generali a cui alludevo in principio. L'A. pur volendo — per ragioni che è inutile indagare — mantenere inalterato il vecchio materiale, almeno per ciò che riguarda ordine e definizioni, ha dovuto riconoscere la necessità di porre un razionale fondamento al tarlato edifizio, ed ha cercato tale fondamento nella deduzione del concetto di numero dal concetto di grandezze discrete.

Scientificamente parlando tale metodo sarebbe possibile quando fosse dimostrato che una teoria generale delle grandezze può farsi senza ricorrere, nè per la forma nè per la sostanza, al concetto di numero intero. Ora ciò non solo non è dimostrato, ma dagli ultimi e più accurati lavori sull'argomento può dedursi il contrario.

Didatticamente l'opportunità del metodo non mi pare possa provarsi in alcun modo. Supposto, infatti, che la teoria delle grandezze possa farsi indipendentemente dal concetto di numero, allora bisognerebbe prima svolgere tale teoria e da questa dedurre il concetto e le proprietà del numero intero, e tanto varrebbe — dato che in una scuola secondaria superiore si possano fare dei ragionamenti su enti astratti dei quali, come i numeri, sono praticamente note tutte le proprietà — definita l'unità e il numero per mezzo di postulati, trattare la teoria dei numeri indipendentemente dalle grandezze discrete. Se poi, come pare vero e come è del resto fino ad ora, la teoria delle grandezze non può farsi senza ricorrere al concetto di numero intero, allora giunti ad un certo punto — alla moltiplicazione p. e. esplicitamente, implicitamente fin da principio — bisogna, come fa l'A. dare proprietà delle grandezze combinate con i numeri per dedurre poi delle proprietà fra soli numeri, cioè presentare degli enti che, come le grandezze, non bastano a sè stessi ed hanno bisogno dell'aiuto degli enti che vogliono individuare.

Il dedurre la teoria dei numeri interi da quella delle grandezze è un voler complicare la teoria. Tale complicazione del resto sarebbe scusabile e quasi giustificata se per mezzo di essa si potesse ottenere, in modo relativamente facile, l'assoluto rigore. — Tale rigore assoluto l'A. non l'ha raggiunto; ma poteva forse farlo? — Non lo credo, sia in base alle precedenti osservazioni, sia pensando che nel vecchio materiale, che l'A. ha voluto conservare, vi sono definizioni come quella di numero, *d*), di somma, *f*), di moltiplicazione, *g*), che non potranno mai esser rese rigorose. La 1ª infatti, definita che sia (indirettamente) l'unità, diventerà un teorema o, a seconda del metodo di esposizione, una definizione di nome ma non di ente; per la 2ª bisognerà definire il riunire o domandarlo all'intuizione, e nell'un caso o nell'altro riunire vorrà dire sommare; per la 3ª bisognerà definire il formare, cioè definire il prodotto, e ciò nonostante la definizione, per quanto rigorosa possa diventare, non perderà nulla del suo carattere metafisico. Questo per le principali definizioni. Per l'ordine poi delle ordinarie aritmetiche, p. e. i teoremi sulla divisione dati sotto forma algebrica, non saranno mai generali ed avranno bisogno di inutile limitazione, fino a che non si tratteranno, almeno, dopo aver definito il numero frazionario e le operazioni relative; la teoria della numerazione rimarrà oscura e scientificamente poco rigorosa fino a che non si farà, almeno, dopo aver definita la somma dei numeri interi.

***

Mi resta da esaminare come l'A. introduce i numeri frazionari.

Abbandonate le grandezze, pone per l'unità i seguenti postulati:

(N. 250) « Ammetteremo possibile la scomposizione in parti dell'unità e non porremo un limite circa al numero di queste parti ».

(N. 251) « Dividendo nello stesso numero di parti eguali due o più unità, si ottengono unità frazionarie eguali ».

e prima di questo dà la definizione:

« Un'unità si dice divisa in un certo numero di parti eguali quando ripetendo una qualunque di esse tante volte quante sono le unità di questo numero, si giunge a formare nuovamente l'unità primitiva ».

che contiene un nuovo postulato, riguardante la possibilità della divisione in parti eguali, fino a che non si aggiunge, nel 1° postulato, dopo la parola *numero* la frase *e alla specie;* e anche in tal modo la cosa non rimarrebbe troppo esatta per il significato, non dato, delle due parole *ripetere* e *specie.*

Questo modo di introdurre il numero fratto non differisce in sostanza da quello degli ordinari trattati, solo, eccettuata l'inesattezza della definizione del N. 251 che facilmente può togliersi, è resa rigorosa dai postulati che l'A. ha stabiliti.

Per finire, due osservazioni di secondaria importanza. Mi pare poco opportuna la denominazione di *frazioni di specie diversa* data a quelle che hanno diverso denominatore, sia perchè questa diversità può sempre togliersi, sia perchè la parola *specie* fa nascere p. e. il dubbio che il numero intero sia di specie diversa dal fratto. — Nelle operazioni sulle frazioni (e in parte anche su quelle per gli interi) le distinzioni dei vari casi è poco opportuna. Scientificamente i vari casi non esistono, praticamente possono ridursi tutti ad un solo e questo mi pare più conveniente nell'insegnamento.

C. Burali Forti.

Sommario del libro X d'Euclide.

Il X libro è il più voluminoso fra tutti i libri degli Elementi di Euclide. Esso tratta delle grandezze irrazionali. Sostituendo alle grandezze i numeri che le misurano, gli irrazionali considerati sono delle forme $\sqrt{m}$, $\sqrt{\sqrt{m}}$, $\sqrt{m} \pm \sqrt{n}$, $\sqrt{\sqrt{m} \pm \sqrt{n}}$, ove m ed n sono numeri razionali. Prenderemo per testo l'edizione pubblicata da Heiberg (Lipsiae, Teubner, 1886). Fatta astrazione dalla nomenclatura ivi usata, le proposizioni dipendono in gran parte da identità algebriche affatto elementari.

È a notarsi la risoluzione in numeri interi dell'equazione

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

che trovasi nel lemma I, precedente la P19, basata sull'identità

$$(2xy)^2 + (x^2 - y^2)^2 = (x^2 + y^2)^2 \ ;$$

e le proposizioni dalla 54 alla 59 e dalla 91 alla 96 che dipendono dall'identità

$$\sqrt{m \pm \sqrt{n}} = \sqrt{\frac{m + \sqrt{m^2 - n}}{2}} \pm \sqrt{\frac{m - \sqrt{m^2 - n}}{2}}$$

supposto $m^2 > n$. Questa identità parmi la cosa più notevole di tutto il libro.

Daremo ora un rapido cenno delle notazioni usate da Euclide, e trasformeremo in simboli di algebra e di logica le principali proposizioni. Ricordiamo che Q sta per *numero reale positivo*, e rappresenta le *grandezze* o *quantità* (*μεγέθη*); e che R sta per *numero razionale positivo.*

Per indicare che le grandezze a e b sono *commensurabili* (*σύμμετρα*, def. 1) scriveremo $a \overset{=}{\mathrm{R}} b$ (che si può leggere a è razionale rispetto a b). Quindi $a - \overset{=}{\mathrm{R}} b$ significa « a e b sono incommensurabili (*ἀσύμμετρα*) ».

Euclide fissa una lunghezza fondamentale, colla quale paragona tutte le altre lunghezze. Prenderemo come unità di misura la lunghezza fondamentale, ed allora tutte le proposizioni diventano proposizioni su numeri.

La radice quadrata d'un numero razionale, cioè $\sqrt{\mathrm{R}}$, è chiamata *ῥητός*, che l'Heiberg traduce in *rationalis,* ma che non bisogna interpretare nel significato che ora ha la parola *razionale.* La classe dei $\sqrt{\mathrm{R}}$ contiene quindi anche i numeri razionali.

Le prop. 1-4 si riferiscono al massimo comun divisore di più quantità, e sono analoghe alle prime del libro VII (V. *Rivista di Matem.*, vol. I, pag. 10).

$a,\ b \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\supset:\, a \underset{\mathrm{R}}{=} b \,.=.\, a/b \,\varepsilon\, \mathrm{R}$ Prop. 5, 6, 7, 8

$a,\ b,\ c,\ d \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, a/b = c/d :\supset:\, a \underset{\mathrm{R}}{=} b \,.=.\, c \underset{\mathrm{R}}{=} d$ P. 11

$a,\ b,\ c \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, a \underset{\mathrm{R}}{=} b \,.\, b \underset{\mathrm{R}}{=} c :\supset.\, a \underset{\mathrm{R}}{=} c$ P. 12, 13

$a, b, c, d \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, a > b . a/b = c/d \,.\, \sqrt{a^2 - b^2} \underset{\mathrm{R}}{=} a :\supset.\, \sqrt{c^2 - d^2} \underset{\mathrm{R}}{=} c \,.$ P. 14

$a, b \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\supset:\, a \underset{\mathrm{R}}{=} b \,.=.\, a + b \underset{\mathrm{R}}{=} b$ P. 15, 16

» $.\, a > b :\supset:\, a + \sqrt{a^2 - b^2} \underset{\mathrm{R}}{=} a - \sqrt{a^2 - b^2} \,.=.\, \sqrt{a^2 - b^2} \underset{\mathrm{R}}{=} a$ P. 17, 18

$a, b \,\varepsilon\, \sqrt{\mathrm{R}} \,.\, a \underset{\mathrm{R}}{=} b :\supset.\, ab \,\varepsilon\, \mathrm{R}$ P. 19

$a \,\varepsilon\, \sqrt{\mathrm{R}} \,.\supset.\, 1/a \,\varepsilon\, \sqrt{\mathrm{R}}$ P. 20

$a, b \,\varepsilon\, \sqrt{\mathrm{R}} \,.\, a \,-\!\underset{\mathrm{R}}{=}\, b :\supset.\, ab \,-\varepsilon\, \mathrm{R}$ P. 21

A questo punto Euclide considera le radici quarte dei numeri razionali non quadrati perfetti, che chiama *μέση* (media), e che per abbreviazione indicheremo con μ:

$$\mu = \sqrt[4]{\mathrm{R} - \mathrm{R}^2}\,.$$

Le proprietà delle μ sono:

$a \,\varepsilon\, \mu \,.\, b \,\varepsilon\, \sqrt{\mathrm{R}} :\supset:\, a^2/b \,\varepsilon\, \sqrt{\mathrm{R}} \,.\, a^2/b \,-\!\underset{\mathrm{R}}{=}\, b \,.$ P. 22

$a, b \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, a \,\varepsilon\, \mu \,.\, b \underset{\mathrm{R}}{=} a :\supset.\, b \,\varepsilon\, \mu$ P. 23

$a, b \,\varepsilon\, \mu \,.\, a \underset{\mathrm{R}}{=} b :\supset.\, \sqrt{ab} \,\varepsilon\, \mu$ P. 24

» $.\, a \,-\!\underset{\mathrm{R}}{=}\, b \,.\, a^2 \underset{\mathrm{R}}{=} b^2 :\supset.\, \sqrt{ab} \,\varepsilon\, \mu \cup \sqrt{\mathrm{R}}$ P. 25

» $.\, a > b :\supset.\, a^2 - b^2 \,-\varepsilon\, \mathrm{R}$ }

$m, n \,\varepsilon\, \mathrm{R} - \mathrm{R}^2 \,.\, m > n :\supset.\, \sqrt{m} - \sqrt{n} \,-\varepsilon\, \mathrm{R}$ } P. 26

Le prop. 27-35 si riferiscono all'esistenza di certe coppie di irrazionali:

$a, b \,\varepsilon\, \mu \,.\, a \,-\!\underset{\mathrm{R}}{=}\, b \,.\, a^2 \underset{\mathrm{R}}{=} b^2 \,.\, \sqrt{ab} \,\varepsilon\, \sqrt{\mathrm{R}} :-= \Lambda$ P. 27

» » » $.\, \sqrt{ab} \,\varepsilon\, \mu :-= \Lambda$ P. 28

» » $a > b \,.\, \sqrt{a^2 - b^2} \underset{\mathrm{R}}{=} a :-= \Lambda$ P. 29

» » » $.\, \sqrt{a^2 - b^2} \,-\!\underset{\mathrm{R}}{=}\, a :-= \Lambda$ P. 30

» » $a^2 \underset{\mathrm{R}}{=} b^2 \,.\, \sqrt{ab} \,\varepsilon\, \sqrt{\mathrm{R}} \,.\, a > b \,.\, \sqrt{a^2 - b^2} \underset{\mathrm{R}}{=} a :-= \Lambda$ P. 31

» » » $.\, \sqrt{ab} \,\varepsilon\, \mu \,.$ » » $:-= \Lambda$ P. 32

$a, b \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, a^2 \,-\!\underset{\mathrm{R}}{=}\, b^2 \,.\, \sqrt{a^2 + b^2} \,\varepsilon\, \sqrt{\mathrm{R}} \,.\, \sqrt{ab} \,\varepsilon\, \mu :-= \Lambda$ P. 33

» » $.\, \sqrt{a^2 + b^2} \,\varepsilon\, \mu \,.\, \sqrt{ab} \,\varepsilon\, \sqrt{\mathrm{R}} :-= \Lambda$ P. 34

» » » $.\, \sqrt{ab} \,\varepsilon\, \mu \,.\, ab \,-\!\underset{\mathrm{R}}{=}\, a^2 + b^2 :-= \Lambda$ P. 35

Nelle prop. 36-41 e le 73-78 sono contenute le definizioni di dodici nuove specie di irrazionali, che si ottengono sommando o sottraendo le coppie di irrazionali ora considerate. Noi le indicheremo coi segni [1], [2], ... [6], e [1'], [2'], ... [6']. I nomi di queste specie sono contenuti nella seguente tabella:

[1] *ἐκ δύο ὀνομάτων,*	[1'] *ἀποτομή*
[2] » *μέσων πρώτη,*	[2'] *μέσης ἀποτομὴ πρώτη,*
[3] » » *δευτέρα,*	[3'] » » *δευτέρα,*
[4] *μείζων,*	[4'] *ἐλάσσων,*
[5] *ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη,*	[5'] *μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα*
[6] *δύο μέσα δυναμένη.*	[6'] » *μέσου* » »

Le definizioni sono:

$a,\ b \,\varepsilon\, \sqrt{\mathrm{R}} \,.\, a \,-\!\underset{\mathrm{R}}{=}\, b :\supset.\, a + b \,\varepsilon$ [1] P. 36

» » $.\, a > b :\supset.\, a - b \,\varepsilon$ [1'] P. 73

$a,\ b \,\varepsilon\, \mu \,.\, a \,-\!\underset{\mathrm{R}}{=}\, b \,.\, a^2 \underset{\mathrm{R}}{=} b^2 \,.\, \sqrt{ab} \,\varepsilon\, \sqrt{\mathrm{R}} :\supset.\, a + b \,\varepsilon$ [2] P. 37, v. p. 27

» » » » $.\, a > b :\supset.\, a - b \,\varepsilon$ [2'] P. 74

» » » $\sqrt{ab} \,\varepsilon\, \mu :\supset.\, a + b \,\varepsilon$ [3] P. 38, v. p. 28

» » » » $.\, a > b :\supset.\, a - b \,\varepsilon$ [3'] P. 75

$a,\ b \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, a^2 \,-\!\underset{\mathrm{R}}{=}\, b^2 \,.\, \sqrt{a^2 + b^2} \,\varepsilon\, \sqrt{\mathrm{R}} \,.\, \sqrt{ab} \,\varepsilon\, \mu :\supset.\, a + b \,\varepsilon$ [4] P. 39, v. p. 33

» » » » $.\, a > b :\supset.\, a - b \,\varepsilon$ [4'] P. 76

» » $.\, \sqrt{a^2 + b^2} \,\varepsilon\, \mu \,.\, \sqrt{ab} \,\varepsilon\, \sqrt{\mathrm{R}} :\supset.\, a + b \,\varepsilon$ [5] P. 40, v. p. 34

» » » » $.\, a > b :\supset.\, a - b \,\varepsilon$ [5'] P. 77

» » » $.\, \sqrt{ab} \,\varepsilon\, \mu \,.\, ab \,-\!\underset{\mathrm{R}}{=}\, a^2 + b^2 :\supset.\, a + b \,\varepsilon$ [6]
P. 41, v. p. 35

» » » » » $.\, a > b :\supset.$
$a - b \,\varepsilon$ [6'] P. 78

Mettendo in evidenza certi fattori, gli irrazionali [1] ... [6] si possono ridurre alle seguenti forme:

$m,\ x \,\varepsilon\, \mathrm{R} \,.\, x < 1 \,.\, x \,-\varepsilon\, \mathrm{R}^2 :\supset:\, \sqrt{m}\,(1 + \sqrt{x}) \,\varepsilon$ [1]

» » » $.\, m \,-\varepsilon\, \mathrm{R}^2 \,.\, mx \,\varepsilon\, \mathrm{R}^2 :\supset.\, \sqrt[4]{m}\,(1 + \sqrt{x}) \,\varepsilon$ [2]

» » » » $.\, mx \,-\varepsilon\, \mathrm{R}^2 :\supset.$ » ε [3]

» » » $.\, 1 - x \,-\varepsilon\, \mathrm{R}^2 :\supset.\, \sqrt{m}\left(\sqrt{1 + \sqrt{x}} + \sqrt{1 - \sqrt{x}}\right) \varepsilon$ [4]

$m, x \,\varepsilon\, \mathrm{R} . x < 1 . x \,-\varepsilon\, \mathrm{R}^2 . m \,-\varepsilon\, \mathrm{R}^2 . m(1 - x) \,\varepsilon\, \mathrm{R}^2 :\supset.\, \sqrt[4]{m}\left(\sqrt{1 + \sqrt{x}} + \sqrt{1 - \sqrt{x}}\right) \varepsilon$ [5]

» » » » » $.\, (1 - x) \,\varepsilon\, \mathrm{R}^2 :\supset.$ » ε [6]

E se nei binomii entro parentesi, invece della somma si considera la differenza dei due termini, si hanno gli altri irrazionali [1′] ... [6′].

Le prop. 42-47 e 79-84 dicono che due grandezze della stessa specie [1] ... [6], [1′] ... [6′] eguali hanno i due termini rispettivamente eguali:

$$m, n, m', n' \varepsilon \mathrm{R} . m | n - \varepsilon \mathrm{R}^2 . m > n . m' > n' . \sqrt{m} + \sqrt{n} = \sqrt{m'} + \sqrt{n'} : \supset : m = m' . n = n' \qquad \text{Prop. } 42$$

$$\text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad . \sqrt{m} - \sqrt{n} = \sqrt{m'} - \sqrt{n'} : \supset : m = m' . n = n' \qquad \text{Prop. } 79$$

$$\text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad . \sqrt{m} - \sqrt{n} = \sqrt{m'} + \sqrt{n'} : = \Lambda \qquad \text{Prop. } 111$$

$$m, m', x, x' \varepsilon \mathrm{R} . x < 1 . x' < 1 . x, x' \varepsilon - \mathrm{R}^2 . mx, m'x' \varepsilon \mathrm{R}^2 . \sqrt[4]{m}(1 + \sqrt{x}) = \sqrt[4]{m'}(1 + \sqrt{x'}) : \supset : m = m' . x = x' . \qquad \text{Prop. } 43$$

Gli irrazionali [1] vengono suddivisi in sei classi, che Euclide chiama prima, seconda ... sesta; e che qui indicheremo con [11], [12], ... [16]. Parimenti gli irrazionali [1′] sono divisi in sei classi corrispondenti alle precedenti, e che noi indicheremo con [1′1], [1′2], ... [1′6]. Le definizioni di queste classi sono:

$$m, x \varepsilon \mathrm{R} . x < 1 . x - \varepsilon \mathrm{R}^2 . m \varepsilon \mathrm{R}^2 . (mx - \varepsilon \mathrm{R}^2) . 1 - x \varepsilon \mathrm{R}^2 : \supset : \sqrt{m}(1 + \sqrt{x}) \varepsilon [11] . \sqrt{m}(1 - \sqrt{x}) \varepsilon [1'1]$$

$$\text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad . (m - \varepsilon \mathrm{R}^2) . mx \varepsilon \mathrm{R}^2 . \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad [12] . \quad \text{»} \quad [1'2]$$

$$\text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad . m - \varepsilon \mathrm{R}^2 . mx - \varepsilon \mathrm{R}^2 . \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad [13] . \quad \text{»} \quad [1'3]$$

$$\text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad . m \varepsilon \mathrm{R}^2 . (mx - \varepsilon \mathrm{R}^2) . 1 - x - \varepsilon \mathrm{R}^2 : \supset : \quad \text{»} \quad [14] . \quad \text{»} \quad [1'4]$$

$$\text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad . (m - \varepsilon \mathrm{R}^2) . mx \varepsilon \mathrm{R}^2 . \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad [15] . \quad \text{»} \quad [1'5]$$

$$\text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad . m - \varepsilon \mathrm{R}^2 . mx - \varepsilon \mathrm{R}^2 . \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad [16] . \quad \text{»} \quad [1'6]$$

Le condizioni chiuse entro ( ) furono scritte solo per simmetria, essendo esse conseguenza delle altre ipotesi già fatte.

Le proposizioni successive 48-53 e 85-90 dimostrano l'esistenza di tutte queste categorie di irrazionali:

$$[11] - = \Lambda . [12] - = \Lambda . \ldots . [16] - = \Lambda . [1'1] - = \Lambda . \ldots . [1'6] - = \Lambda .$$

Le proposizioni 54-65, 71, 72 e 91-102, 108-110 dicono:

$$[1]^2 = [11] . [2]^2 = [12] . [3]^2 = [13] . [4]^2 = [14] . [5]^2 = [15] . [6]^2 = [16]$$
$$[1']^2 = [1'1] . \ldots\ldots\ldots\ldots . [6'] = [1'6]$$

Le prop. 67-70 e 103-107 dicono che un numero commensurabile con uno appartenente ad una qualunque delle categorie considerate appartiene alla stessa categoria:

$$\mathrm{R} \times [1] = [1] . \ldots . \mathrm{R} \times [6'] = [6']$$

$$1/[1] = [1'] \qquad \text{Prop. 112 e 113}$$

$$m, n \varepsilon \mathrm{Q} . \supset . (\sqrt{m} + \sqrt{n})(\sqrt{m} - \sqrt{n}) = m - n \qquad \text{Prop. } 114$$

Nella prop. 115, che è l'ultima, si accenna all'esistenza di infinite altre classi di irrazionali tutte distinte dalle precedenti e distinte fra loro, che si ottengono con successive estrazioni della radice quadrata dagli R non quadrati perfetti.

(P.)

RECENSIONI

Otto Hölder. — *Ueber den casus irreducibilis bei der Gleichung dritten Grades* (¹).

Per dimostrare l'impossibilità d'evitare il *casus irreducibilis*, suppone data un'equazione di terzo grado, a discriminante D positivo, irriducibile in un dato campo reale di razionalità: se questo campo non contiene $\sqrt{\mathrm{D}}$, aggiunge questa radice quadrata ed ottiene così un nuovo campo che è ancora reale perchè D è positivo. L'equazione acquista così la proprietà di aver ogni radice esprimibile razionalmente con ciascun'altra. Suppone che l'equazione sia soddisfatta da un'espressione ottenuta combinando estrazioni di radici senza introdurre imaginarii ed osserva che per ciò deve esser possibile aggiungere al campo di razionalità una radice di quantità contenutavi, al nuovo ancora una radice di quantità contenutavi e così via, senza mai introdurre imaginarii ed in modo da pervenire finalmente ad un campo reale, contenente la radice dell'equazione: e perchè questo avvenga bisogna che una volta un'equazione di terzo grado, avente ogni radice esprimibile razionalmente con ciascun'altra ed irriducibile in un dato campo reale di razionalità, divenga riducibile per l'aggiunta d'una radice reale di grado primo d'una quantità dello stesso campo. Prova poi che ciò non può essere, dimostrando il teorema: Un'equazione del grado n irriducibile in un campo reale di razionalità, con ogni radice esprimibile razionalmente con ciascun'altra ed una radice reale (quindi tutte) non può divenire riducibile per l'aggiunta d'una radice reale di grado primo, a meno che questo grado sia 2 epperò n divisibile per 2.

Dimostra poi più generalmente, ricorrendo alla Teoria di Galois, che: Tra le equazioni, a radici tutte reali, irriducibili in dato campo reale di razionalità, hanno radice esprimile per radicali reali solo quelle risolubili per radicali quadratici.

Osserverò che il sig. prof. Mollame aveva già fatto vedere (²), molto semplicemente, che il necessario intervento dell'imaginario nel *casus irreducibilis* è dovuto alla mancanza di funzioni reali, a più valori, le cui terze

(¹) Mathematische Annalen. Band XXXVIII, p. 307-12. December, 1890.

(²) R. Accad. delle Scienze Fis. e Mat. Napoli. Adun. 7 giugno 1890.

potenze abbiano due soli valori. Però egli ha pur creduto di notare casi speciali in cui l'imaginario può esser evitato, per il solo fatto che la radice cubica d'un numero complesso possa talora esser data da un ordinario numero complesso: ma questo non permette d'evitare il *casus irreducibilis*. Sia infatti

$$x_1 = \sqrt[3]{a+bi} + \sqrt[3]{a-bi}$$

una radice d'un'equazione cubica e sia

$$\sqrt[3]{a+bi} = p + qi.$$

Sarà $x_1 = 2p$ epperò p o sarà razionale, o sarà irrazionale quadratico, oppure sarà irrazionale cubico: nei primi due casi l'equazione di terzo grado sarà riducibile; nel caso rimanente le sue radici saranno il valor reale $2p$ ed i due valori coniugati a $2p$.

In generale, se p e q sono reali ed è $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, le tre quantità reali

$$p+qi+p-qi \qquad \omega\,.\,(p+qi)+\omega^2.\,(p-qi) \qquad \omega^2.\,(p+qi)+\omega\,.\,(p-qi)$$

ossia $\qquad 2p \qquad -p+\sqrt{3}\,.\,q \qquad -p-\sqrt{3}\,.\,q$

sono radici dell'equazione cubica

$$x^3 - 3\,(p^2+q^2)\,x - 2p^3 + 6pq^2 = 0.$$

Considerando p. es. il caso particolare, indicato dal medesimo prof. Mollame

$$\sqrt[3]{1+i} = 2^{-\frac{1}{3}}.\,(-1+i)$$

si trova che le tre quantità reali

$$-\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{1+i} + \sqrt[3]{1-i} \qquad \frac{1+\sqrt{3}}{2}.\,\sqrt[3]{4} = \omega\,.\,\sqrt[3]{1+i} + \omega^2.\,\sqrt[3]{1-i}$$

$$\frac{1-\sqrt{3}}{2}.\,\sqrt[3]{4} = \omega^2.\,\sqrt[3]{1+i} + \omega\,.\,\sqrt[3]{1-i}$$

sono radici dell'equazione cubica a coefficienti irrazionali

$$x^3 - 3\sqrt[3]{2}\,.\,x - 2 = 0,$$

mentre l'equazione irriducibile a coefficienti razionali caratterizzata dalla sua radice $\sqrt[3]{1+i}+\sqrt[3]{1-i}$, ossia $-\sqrt[3]{4}$, è

$$x^3 + 4 = 0.$$

Se poi la penultima equazione si considerasse nel campo di razionalità formato di tutti i numeri razionali e di $\sqrt[3]{2}$, essa equazione sarebbe riducibile, essendo

$$x^3 - 3\sqrt[3]{2}\,.\,x - 2 = (x+\sqrt[3]{2^2})\,.\,(x^2 - \sqrt[3]{2^2}\,.\,x - \sqrt[3]{2}).$$

Le tre quantità considerate sarebbero poi le tre radici reali dell'equazione di nono grado

$$(x - 3\sqrt[3]{2}\,.\,x - 2)\,.\,(x^3 - 3\,.\,\omega\sqrt[3]{2}\,.\,x - 2)\,.\,(x^3 - 3\,.\,\omega^2\sqrt[3]{2}\,.\,x - 2)$$
$$= x^9 - 6x^6 - 42x^3 - 8 = (x^3+4)\,.\,(x^6 - 10x^3 - 2) = 0.$$

Calcolo approssimativo delle radici delle equazioni cubiche con discriminante positivo. — Non potendosi evitare il *casus irreducibilis*, quando si presenta, credo non inopportuno far conoscere come in tal caso la stessa equazione guidi immediatamente al calcolo approssimato delle radici. Siccome per $z = -x$ la

$$z^3 - pz + q = 0$$

diviene

$$x^3 - px - q = 0,$$

così basterà, pel nostro scopo, che ci occupiamo di quest'ultima, dove si suppone

$$p > 0 \qquad q > 0 \qquad \frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27}.$$

La nostra equazione si può scrivere, p. es., anche in questi tre modi

$$x = \sqrt[3]{q+px} \qquad x = -\frac{q}{p} + \frac{x^3}{p} \qquad x = -\sqrt{p+\frac{q}{x}}.$$

Conformemente a queste espressioni, pongasi

$$\alpha_1 = \sqrt[3]{q} \qquad \alpha_r = \sqrt[3]{q+p\alpha_{r-1}}$$

$$\beta_1 = -\frac{q}{p} \qquad \beta_r = -\frac{q}{p} + \frac{\beta^3_{r-1}}{p}$$

$$\gamma_1 = -\sqrt{p} \qquad \gamma_r = -\sqrt{p+\frac{q}{\gamma_{r-1}}}$$

e sarà $\qquad \alpha_{r-1} < \alpha_r \qquad \beta_{r-1} > \beta_r \qquad \gamma_{r-1} < \gamma_r.$

Si ha, per la relazione ammessa tra p e q,

$$\alpha_1 < 2\sqrt{\frac{p}{3}}$$

e, supposto

$$\alpha_{r-1} < 2\sqrt{\frac{p}{3}},$$

trovasi ancora

$$\alpha_r < 2\sqrt{\frac{p}{3}}.$$

Le α_r crescono dunque sempre senza sorpassare $2\sqrt{\frac{p}{3}}$ epperò esse tendono ad un limite.

Si ha

$$-\beta_1 < \sqrt{\frac{p}{3}}$$

e, supposto

$$-\beta_{r-1} < \sqrt{\frac{p}{3}},$$

trovasi ancora

$$-\beta_r < \sqrt{\frac{p}{3}}.$$

Le β_r decrescono dunque sempre senza divenir minori di $-\sqrt{\frac{p}{3}}$ epperò esse pure tendono ad un limite.

Si ha

$$-\gamma_1 > \sqrt{\frac{p}{3}}$$

e, supposto

$$-\gamma_{r-1} > \sqrt{\frac{p}{3}},$$

trovasi ancora

$$-\gamma_r > \sqrt{\frac{p}{3}}.$$

Le γ_r crescono dunque sempre senza divenir maggiori di $-\sqrt{\frac{p}{3}}$ per cui ancor esse tendono ad un limite.

Pongasi $\quad \lim. \alpha_r = x_1 \quad \lim. \beta_r = x_2 \quad \lim. \gamma_r = x_3$

e s'avrà per quanto fu detto, ed anche perchè $-\sqrt{\frac{p}{3}}$ non è radice dell'equazione,

$$x_1 > 0 > x_2 > -\sqrt{\frac{p}{3}} > x_3,$$

per cui x_1 x_2 x_3 sono tre valori diversi.

Posto $\alpha_n = x_1 + \varepsilon_n$, si ha, per le definizioni di α_r e di x_1,

$$0 = \alpha^3{}_r - p\alpha_{r-1} - q = x_1{}^3 - px_1 - q + (3x_1{}^2 + 3x_1\,\varepsilon_r + \varepsilon^2{}_r)\,.\,\varepsilon_r - p\varepsilon_{r-1}$$

$$0 = \lim._{n=\infty}\,\varepsilon_n = \lim._{r=\infty}\,[(3x_1{}^2 + 3x_1\,\varepsilon_r + \varepsilon_r{}^2)\,.\,\varepsilon_r - p_{r-1}],$$

epperò è

$$x_1{}^3 - px_1 - q = 0,$$

cioè x_1 è radice dell'equazione

$$x^3 - px - q = 0.$$

In modo simile si riconosce che x_2 ed x_3 sono le rimanenti radici di questa medesima equazione.

Palermo, 1891. F. GIUDICE.

DOMENICO AMANZIO. — *Elementi di Algebra elementare* (1).

Il trattato d'Algebra del prof. Amanzio, recentemente uscito, è molto ben fatto sotto ogni riguardo: il rigore non vi è mai sacrificato alla semplicità, cioè la semplicità non è mai raggiunta per mezzo di omissioni o dimostrazioni illusorie. Molti ed opportuni esempi vi sono risolti, ed all'occorrenza discussi accuratamente, per ogni singolo argomento: vi è pure un grandissimo numero d'esercizi semplicemente proposti, per cui ancora la parte pratica non poteva esser curata meglio.

(1) Napoli. Libreria B. Pellerano, 1892.

Esso trattato è diviso in tre libri ed il contenuto dei medesimi si rileva dallo schema seguente:

LIBRO I. — Algoritmo algebrico.

§ 1. *Numeri algebrici.* — Contiene le definizioni relative ai numeri positivi e negativi, e le regole per il calcolo dei medesimi.

§ 2. *Espressioni algebriche.* — Contiene le definizioni relative alle espressioni letterali; si occupa del valore di queste per assegnati valori numerici delle lettere e della riduzione dei termini simili.

§ 3. *Addizione e sottrazione dei monomii e polinomii.*

§ 4. *Moltiplicazione dei monomii e dei polinomii.* — Oltre alle regole per la moltiplicazione letterale in genere e per quella dei polinomii ordinati, ed omogenei, in particolare, dà le regole per la formazione di quadrato e cubo d'un polinomio e per il prodotto della somma di due quantità per la loro differenza. Applica la formula $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ alla scomposizione, in fattori, di dati trinomii di 2° grado, e dà il prodotto $(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)$.

§ 5. *Divisione algebrica.* — Oltre alle regole per la divisione letterale, contiene pure alcune proprietà di monomii e polinomii. Si occupa del quoziente e resto della divisione d'un polinomio intero in x per un binomio di 1° grado in questa lettera, e della scomposizione in fattori nei casi già trattabili.

§ 6. *Del massimo comun divisore dei polinomii interi.*

§ 7. *Del minimo multiplo comune di più polinomii interi rispetto ad una stessa lettera.*

§ 8. *Frazioni algebriche.*

§ 9. *Radicali aritmetici.* — Dopo d'aver date le regole per la trasformazione dei radicali e per il calcolo coi medesimi, si occupa della riduzione di alcune frazioni a denominatore irrazionale ad altre aventi denominatore razionale.

§ 10. *Limiti ed esponenti.* — Contiene le definizioni e le proposizioni principali sui limiti: tratta delle potenze con esponente qualsiasi, razionale od irrazionale, positivo o negativo. Contiene pure proposizioni relative alle potenze e radici di grado variabile.

LIBRO II. — Equazioni.

§ 1. *Equazioni intere in generale.*

§ 2. *Equazioni di primo grado ad un'incognita.* — Oltre alla teoria delle equazioni di primo grado ad una incognita, contiene utili insegnamenti per le questioni la cui soluzione dipende da equazioni siffatte.

§ 3. *Sistemi di equazioni di primo grado.* — Oltre alla teoria elementare dell'eliminazione e della risoluzione dei sistemi d'equazioni di primo grado, contiene esempi di artifici utili per ottenere o speditamente o con eleganza la risoluzione di particolari sistemi.

§ 4. *Equazioni di secondo grado ad un'incognita.* — Oltre alla formula di risoluzione ed alle relazioni tra coefficienti e radici d'un'equazione di secondo grado ad un'incognita, dà la nota regola per scomporre in fattori di primo grado un trinomio di secondo grado.

§ 5. *Equazioni frazionarie razionali.* — Si occupa delle espressioni della forma $\frac{m}{0}$, $\frac{0}{0}$, e delle radici finite di equazioni, e sistemi, contenenti l'incognita nei denominatori.

§ 6. *Continuazione delle equazioni. Casi di risoluzione dipendenti da quelli già esaminati.* — Si occupa dell'equazione biquadratica, della nota trasformazione del radicale $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$, di equazioni irrazionali nell'incognita e di altre equazioni, e di sistemi riducibili ai primi due gradi.

Libro III. — **Logaritmi e progressioni.**

§ 1. *Logaritmi.* — Tratta dell'equazione esponenziale e dei logaritmi. Riporta una pagina delle tavole logaritmiche di Hoüel.

§ 2. *Progressioni aritmetiche.*

§ 3. *Progressioni geometriche.*

Il libro termina con un'appendice di tre note. La prima contiene delle considerazioni sul modo di comportarsi di polinomii ad una lettera nell'intorno di un valore di questa che non annulla essi polinomii. La seconda contiene un'osservazione relativa all'innalzamento a potenza dei due membri d'un'equazione. La terza si occupa dei limiti a cui convergono le radici di un'equazione di secondo grado ad un'incognita, allorchè il coefficiente del primo termine converge a zero.

Tenendo calcolo delle difficoltà grandi che s'incontrano per scrivere un libro di testo sostanzialmente buono, indipendentemente dal favore che può incontrare nella maggior parte degli insegnanti, potremmo dire che il libro di cui ci occupiamo non ha difetti. Tuttavia faremo poche osservazioni suggerite dalla lettura del medesimo.

Generalmente diconsi numeri algebrici le radici delle equazioni irreducibili, a coefficienti numerici interi, trascendenti quelli non algebrici ed è noto che infiniti numeri non contenuti nel campo dei numeri positivi e negativi sono algebrici e che infiniti altri contenutivi sono trascendenti: quindi non è conveniente che negli Elementi d'Algebra si dicano numeri algebrici i numeri positivi e negativi.

Al N. 56 riporta la comune definizione: « *il prodotto è formato per mezzo del moltiplicando, come il moltiplicatore è formato per mezzo dell'unità* »; e benchè essa abbia già una forma migliore di quella che ha questa definizione in altri libri, tuttavia ad essa si possono ancora applicare le osservazioni già fatte (V. *Periodico di matematica*, 1890, p. 157, e *Rivista di matematica*, 1891, p. 101 e 121).

La teoria del M. C. D. può esser resa più precisa e più chiara premettendo p. es. il teorema: « Il prodotto di due polinomii interi nei coefficienti e nelle lettere, privi di divisori interi, diversi da 1, indipendenti da una lettera x, è un polinomio avente come coefficienti delle diverse potenze di x delle espressioni intere prime fra loro, cioè aventi solamente 1 per divisore intero comune. Da questa si possono dedurre facilmente altre proposizioni che permettono di definire M. C. D., e quindi M. M. C., in modo veramente univoco e di chiarirne la teoria sviluppandola in modo da evitare le frazioni così pei coefficienti numerici, come per quelli letterali.

Nella definizione (N. 247) del limite l d'una successione indefinita di numeri a_1, a_2, ... a_n ... l'A. aggiunge la condizione che nessuna delle differenze fra i numeri della successione ed l sia nulla: e non vediamo la necessità di questa condizione; anzi, ammessa questa condizione, non ne viene più, p. e., che il limite d'una somma sia la somma dei limiti (N. 250), poichè può avvenire che i termini della somma tendano ai rispettivi limiti senza raggiungerli mai, e che invece la somma raggiunga il suo limite infinite volte.

Il teorema (N. 254): che *il limite del quoziente ..... è eguale al quoziente dei limiti*, ha bisogno di qualche condizione, p. e. che il limite del denominatore non sia nullo. La dimostrazione che se ne dà (e che è assai comune) è la seguente:

« *Indicando con w il quoziente $\frac{u}{v}$ si ha $u = vw$, $\lim v \times \lim w$, ecc.* »

Ora all'ultimo passaggio si può obbiettare, che se v e w hanno limiti, allora è stato prima dimostrato che $\lim u = \lim v \times \lim w$; ma qui siamo in caso diverso; qui si sa che uno dei fattori v ed il prodotto u hanno limiti, ma l'esistenza del limite del quoziente w è dubbia, ed è appunto il teorema che vogliamo dimostrare che ci dice che questo limite esiste.

Faremo ancora un'ultima osservazione e che si potrebbe pur fare al maggior numero di trattati d'Algebra. L'A. (N. 291 e segg.) si ferma lungamente sulla trasformazione delle equazioni. Il 1° teorema dice:

Aggiungendo ad ambo i membri di un'equazione intera una stessa quantità di valore definito, si ottiene un'altra equazione equivalente alla prima.

Noi non vediamo differenza fra questa proposizione e quella affatto elementare (N. 31):

Se a numeri eguali si aggiungono numeri eguali, le somme sono eguali, e viceversa, salvochè in quella i sommandi invece di essere chiamati *numeri*, sono chiamati *membri d'un'equazione intera;* poichè, se a e b sono numeri, si può affermare che $a + b$, $a \times b$, e tutte le espressioni intere, o anche fratte, purchè i denominatori non siano nulli, e così via, sono numeri.

F. Giudice e G. Peano.

Elementi di Geometria metrica del Dott. OSKAR SCHLÖMILCH. Prima versione italiana dei Prof.ri D. Gambioli e V. Bernardi (1891 — Paravia — Torino).

(Pag. 2) « Se cioè un punto può muoversi continuamente per descrivere una linea, esso deve lasciare la posizione dello spazio in cui si trova e trasferirsi in un altro luogo dello spazio; esso deve QUINDI allontanarsi in qualunque senso (!?). Rispetto a ciò (?) possono darsi due casi: cioè, o il punto nel suo movimento, una volta presa una direzione, la conserva continuamente, o no; per cui risultano naturalmente diverse linee. Nel primo caso la linea descritta si chiama *linea retta*, o semplicemente *retta*, e QUINDI (!?) possiamo dire: *la linea retta è quella che* SCORRE *sempre nella medesima direzione; .....* »

I commenti sono inutili.

(Pag. 5) « Le proprietà della linea retta sono PRESS'A POCO tutte così originarie (!?) e semplici, che di esse non si può dare alcuna dimostrazione, ma solo una prova (!!) facendo vedere come esse si connettono inseparabilmente al concetto di retta ».

Bello quel *press'a poco* in matematica, ed anche bello il far vedere come quelle proprietà si *connettono inseparabilmente* al concetto di un ente che non è dato!

(Pag. 5) « Ma, se oltre la direzione della retta è conosciuto anche il punto, dal quale essa parte, o per cui passa, allora non vi può essere ALCUN DUBBIO sulla posizione della retta; QUINDI: *Una retta è determinata nella sua posizione, ogniqualvolta sia dato un suo punto e la sua direzione.* Ne SEGUE immediatamente (?) che tutte le rette che hanno la stessa direzione e passano per un medesimo punto, coincidono perfettamente, o, COME SI SUOL DIRE, SONO CONGRUENTI (1) ».

(Pag. 6). Perciò la retta condotta tra due punti si dice anche *distanza* dei due punti tra loro, e designa PERCIÒ una retta tale, che le lettere poste ai suoi estremi si possono LEGGERE E SCRIVERE IMMEDIATAMENTE L'UNA DOPO L'ALTRA (!?).

(Pag. 6) « Se la retta in questo movimento (cioè, secondo l'A., *ruota intorno ad un suo estremo*) (2) conserva ancora la sua lunghezza, il suo estremo descrive una linea, ...; la linea così generata SI CHIAMA CERCHIO, ... » !!!

(Pag. 6) « In secondo luogo, se la retta cambia la sua grandezza, essa subisce un allungamento o un accorciamento; allora la retta AB PUÒ essere allungata (!) in modo da assumere la nuova grandezza AC, ed aumenta QUINDI del segmento BC. AC si dice in tal caso la somma di AB e BC ..... »

Elegante questa definizione di somma!!!

(1) Aperto a caso il libro a pag. 27 (linea 16 del § 8) mi apparisce che *congruenti* vuol anche dire *eguali!!!*

(2) Una volta per sempre — *retta* vuol dir *segmento*.

(Pag. 7) « Inversamente deve essere anche possibile dividere una retta data in un assegnato numero di parti uguali, poichè, se non esistesse l'n^{ma} parte di una retta data, non potrebbe esser dato nemmeno il doppio, il triplo, ecc., di questa n^{ma} parte. Ma tra queste molteplici successive c'è anche la molteplice n^{ma} di quella n^{ma} parte, e perciò la molteplice n^{ma} dell'n^{ma} parte di una retta, cioè la retta stessa (,) non esisterebbe, ciò che contraddice l'ipotesi che la retta sia data ».

I commenti guasterebbero questo capolavoro di rigore.

(Pag. 8) « Siano ora le rette effettivamente prolungate in modo da incontrarsi in un punto, ... in O; si forma IN QUESTO PUNTO una NUOVA FIGURA GEOMETRICA (!): l'*angolo*. Esso indica QUANTO le direzioni delle rette AB e CD DIVERGONO L'UNA DALL'ALTRA; *un angolo determina* DUNQUE (!?) *la differenza tra le direzioni di due rette.*

(Pag. 9) « Si può pensare ancora che l'angolo sia generato in un altro modo, che non differisce affatto dal precedente (!?), ma che fa riconoscere (!!?) facilmente la natura dell'angolo ».

Ecco il secondo modo.

(Pag. 9) « Facciamo cioè rotare una retta OA intorno al punto d'origine O, finchè sia giunta nella posizione OC, si forma parimenti l'angolo AOC; si può QUINDI dire: *l'angolo AOC è determinato dalla grandezza della rotazione, ...* » !!!

E ..... mi pare che basti.

Se ho parlato di questa traduzione l'ho fatto per due ragioni:

1° Per far vedere a coloro che, per sistema, stimano ottimo un trattato solo perchè è tradotto dal tedesco — quasi che tra noi non vi fosse nessuno capace di scriver bene un libro per le scuole secondarie — che qualche volta sbagliano e molto.

2° Per protestare contro l'opinione dei signori traduttori (prefazione, pag. IV): « A noi pare che la *Geometria della misura* dello Schlömilch RISPONDA COMPLETAMENTE AL METODO DI INSEGNAMENTO CHE SI SEGUE NEI NOSTRI ISTITUTI TECNICI, ... » perchè fino a prova in contrario mi rifiuterò di credere che nei nostri istituti i nostri professori possano insegnare in cento anni tanti errori quanti ne sono contenuti in nove pagine della traduzione italiana della *Geometria della misura.*

Dicembre 1891. C. BURALI FORTI.

Alcune applicazioni cinematiche della teoria dei vettori

di F. CASTELLANO *a Torino.*

La teoria dei vettori si applica con vantaggio allo studio di molte questioni di cinematica, ed in questo lavoro me ne servo per ricercare le principali proprietà delle accelerazioni d'ordine qualunque dei punti di un corpo di forma invariabile in movimento. Queste proprietà sono per la maggior parte note da tempo, e dai diversi autori studiate con vario metodo. Espongo in fine una costruzione che mi pare abbastanza semplice del centro delle accelerazioni di primo ordine, e rilevo una interessante corrispondenza tra i punti del corpo, ed un sistema di paraboloidi passanti per il centro delle accelerazioni.

1) Siano P_1, P_2 punti di una retta mobile, e P', P'', P''', ... $P^{(n)}$ le derivate di P rispetto al tempo t, cioè le accelerazioni d'ordine $n-1$ del punto P; sarà [1]

$$(P_1 - P_2)^2 = \text{costante}$$

e derivando successivamente rispetto a t,

$$(P_1 - P_2)(P_1' - P_2') = 0 \qquad (1)$$
$$(P_1 - P_2)(P_1'' - P_2'') + (P_1' - P_2')^2 = 0 \qquad (2)$$
$$(P_1 - P_2)(P_1''' - P_2''') + 3(P_1' - P_2')(P_1'' - P_2'') = 0$$
$$(P_1 - P_2)(P_1'''' - P_2'''') + 4(P_1' - P_2')(P_1''' - P_2''') + 3(P_1'' - P_2'')^2 = 0$$

. . . .

formole che esprimono note relazioni tra le accelerazioni di due punti di una retta.

2) Siano P, P_1, P_2 tre punti di una retta mobile p, sarà:

$$P = m_1 P_1 + m_2 P_2 \qquad (\alpha)$$

dove
$$m_1 = \frac{P\,P_2}{P_1P_2}, \quad m_2 = \frac{P_1P}{P_1P_2}.$$

Derivando n volte rispetto a t, ed avvertendo che le m sono costanti, si ha:

$$P^{(n)} = m_1 P_1^{(n)} + m_2 P_2^{(n)} \qquad (\beta)$$

cioè « Le accelerazioni dello stesso ordine dei punti di una retta sono complanari ».

Sommando membro a membro le (α) e (β), e ponendo $P + P^{(n)} = Q$, si ottiene:

$$Q = m_1 Q_1 + m_2 Q_2 \qquad (\gamma)$$

che esprime il teorema « Gli estremi delle accelerazioni dei punti di una retta p sono in una retta q, e determinano sulla q una punteggiata simile alla punteggiata p ».

---

[1] Se a, b sono due vettori, la scrittura ab esprime il loro prodotto geometrico, cioè il prodotto delle loro grandezze per il coseno del loro angolo.

Se ne deduce che:

a) Date le accelerazioni di due punti P_1 e P_2 di una retta p, è determinata l'accelerazione di ogni punto P della stessa. (Basterà condurre da P il vettore complanare ai vettori $P_1^{(n)}$, $P_2^{(n)}$ che termina alla q).

b) Se un punto O della p ha accelerazione zero, le accelerazioni degli altri punti sono parallele, ed in grandezza proporzionali alle distanze dei loro punti di applicazione da O. Se in particolare si tratta di velocità (accelerazione d'ordine zero), saranno perpendicolari alla p.

c) Se $P_1^{(n)}$, $P_2^{(n)}$ non sono paralleli, esiste un punto sulla p la cui accelerazione è parallela ad un dato piano π, non parallelo al vettore $P_1^{(n)} - P_2^{(n)}$.

Infatti sia a un vettore del piano π complanare ai vettori $P_1^{(n)}$, $P_2^{(n)}$, sarà
$$a = \alpha_1 P_1^{(n)} + \alpha_2 P_2^{(n)}$$
dove $\alpha_1 + \alpha_2 \gtrless 0$, perchè se $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, sarebbe $a = \alpha_1 (P_1^{(n)} - P_2^{(n)})$ contro l'ipotesi.

Posto
$$P = \frac{\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$$
sarà
$$P^{(n)} = \frac{\alpha_1 P_1^{(n)} + \alpha_2 P_2^{(n)}}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{a}{\alpha_1 + \alpha_2}$$
quindi $P^{(n)}$ parallelo ad a, sarà parallelo al piano π.

Il punto P non esiste quando $P_1^{(n)} - P_2^{(n)}$ è parallelo a π, senza che lo sia $P_1^{(n)}$, e quindi $P_2^{(n)}$; è indeterminato quando $P_1^{(n)}$ e $P_2^{(n)}$ sono paralleli a π. In particolare se $P_1^{(n)} - P_2^{(n)}$ non è perpendicolare alla p, esiste un punto solo della p la cui accelerazione è normale alla p. Chiamerò questo punto *polo* delle accelerazioni della retta p.

d) Se $P_1^{(n)} = P_2^{(n)}$, sarà $P^{(n)} = (m_1 + m_2) P_1^{(n)} = P_1^{(n)}$.

3) Se P_1, P_2, P_3, sono punti non in linea retta di un piano π, e P è un punto di π, sarà:

$$P = m_1 P_1 + m_2 P_2 + m_3 P_3 \qquad (\alpha')$$

dove $m_1 = \dfrac{P_2 P_3 P}{P_1 P_2 P_3}$, $m_2 = \dots$, $m_3 = \dots$, quindi $m_1 + m_2 + m_3 = 1$;

derivando n volte rispetto a t,

$$P^{(n)} = m_1 P_1^{(n)} + m_2 P_2^{(n)} + m_3 P_3^{(n)} \qquad (\beta')$$

Sommando (α') con (β'),

$$Q = m_1 Q_1 + m_2 Q_2 + m_3 Q_3 \qquad (\gamma')$$

cioè: « Gli estremi delle accelerazioni dei punti di un piano π stanno in un piano γ ed i due sistemi di punti si corrispondono in una affinità tra due piani punteggiati ».

Dalla (β') si deduce:

a') Date le accelerazioni di tre punti di un piano è determinata l'accelerazione di ogni altro punto del piano.

b') Se $P_1^{(n)}, P_2^{(n)}, P_3^{(n)}$ sono complanari, $P^{(n)}$ è complanare ad essi.

c') Se $P_1^{(n)}, P_2^{(n)}, P_3^{(n)}$ non sono complanari, esiste un punto del piano la cui accelerazione è parallela ad un dato vettore a non complanare ai vettori $P_1^{(n)} - P_2^{(n)}$, $P_1^{(n)} - P_3^{(n)}$. Infatti si possono determinare i numeri $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tali che:

$$a = \alpha_1 P_1^{(n)} + \alpha_2 P_2^{(n)} + \alpha_3 P_3^{(n)}$$

ed $$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \gtrless 0 .$$

Posto $$P = \frac{\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$$

sarà $$P^{(n)} = \frac{a}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} .$$

In particolare esiste un punto del piano la cui accelerazione è normale al piano quando il piano $P_1^{(n)} - P_2^{(n)}$, $P_1^{(n)} - P_3^{(n)}$ non è normale al piano dei punti. Chiamerò questo punto *polo* delle accelerazioni del piano.

d') Sia M il punto del piano π la cui accelerazione è minima; dovrà essere:

$$M^{(n)}(P_1^{(n)} - P_2^{(n)}) = M^{(n)}(P_2^{(n)} - P_3^{(n)}) = M^{(n)}(P_3^{(n)} - P_1^{(n)})$$

ossia $$M^{(n)} P_1^{(n)} = M^{(n)} P_2^{(n)} = M^{(n)} P_3^{(n)} .$$

Ne segue che $M^{(n)} P^{(n)} = M^{(n)} P_1^{(n)} = M^{(n)} P_2^{(n)} = \ldots$

cioè: « È costante la proiezione dell'accelerazione di un punto qualunque del piano sulla direzione dell'accelerazione minima ».

e') Il luogo dei punti del piano le cui accelerazioni sono parallele ad un dato piano è una retta facile a determinarsi, ed è anche una retta il luogo dei punti del piano le cui accelerazioni giacciono nel piano.

4) Siano P_1, P_2, P_3, P_4 punti non complanari dello spazio, sarà:

$$P = m_1 P_1 + m_2 P_2 + m_3 P_3 + m_4 P_4 \qquad (\alpha'')$$

dove $$m_1 = \frac{P_2 P_3 P_4 P}{P_1 P_2 P_3 P_4}, \quad m_2 = \ldots \text{ ed } m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 1.$$

Si deduce derivando:

$$P^{(n)} = m_1 P_1^{(n)} + m_2 P_2^{(n)} + m_3 P_3^{(n)} + m_4 P_4^{(n)} \qquad (\beta'')$$

e sommando membro a membro

$$Q = m_1 Q_1 + m_2 Q_2 + m_3 Q_3 + m_4 Q_4 \qquad (\gamma'')$$

che esprime la corrispondenza dei punti P e Q in due spazi affini sovrapposti. Si deduce immediatamente che:

a'') I punti dello spazio le cui accelerazioni sono parallele ad un dato piano α, sono in un piano β.

b'') I punti le cui accelerazioni sono parallele ad una retta a sono in una retta b.

c'') I piani β corrispondenti a tutte le giaciture, e le rette b corrispondenti a tutte le direzioni sono piani e raggi di una stella, il cui centro è il *centro delle accelerazioni*, punto del corpo di accelerazione zero. Se non esiste il centro delle accelerazioni, i piani β e le rette b sono parallele ad una medesima retta.

d'') Se i vettori $P_1^{(n)}, P_2^{(n)}, P_3^{(n)}$ non sono complanari, si può porre: $$P_4^{(n)} = n_1 P_1^{(n)} + n_2 P_2^{(n)} + n_3 P_3^{(n)}$$
quindi

$$P^{(n)} = (m_1 + m_4 n_1) P_1^{(n)} + (m_2 + m_4 n_2) P_2^{(n)} + (m_3 + m_4 n_3) P_3^{(n)} \qquad (\delta)$$

e se I è un vettore tale che

$$P_1^{(n)} I = P_2^{(n)} I = P_3^{(n)} I$$

sarà $$P^{(n)} I = P_1^{(n)} I + m_4 (n_1 + n_2 + n_3 - 1) P_1^{(n)} I$$

cioè: « Esiste una direzione su cui le proiezioni delle accelerazioni di tutti i punti del corpo sono uguali, solo quando tra le coordinate n_1, n_2, n_3 della $P_4^{(n)}$ passa la relazione

$$n_1 + n_2 + n_3 = 1$$

e se questa ipotesi si verifica, sarà qualunque sia P:

$$P^{(n)} = \alpha_1 P_1^{(n)} + \alpha_2 P_2^{(n)} + \alpha_3 P_3^{(n)}$$

dove $$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1.$$

5) *Centro delle accelerazioni.* — Possiamo proporci il problema: « Determinare il punto del corpo di accelerazione zero ». Sia O questo punto, e siano m_1, m_2, m_3, m_4 le sue coordinate rispetto a P_1, P_2, P_3, P_4, cioè poniamo

$$O = m_1 P_1 + m_2 P_2 + m_3 P_3 + m_4 P_4$$

sarà $$m_1 P_1^{(n)} + m_2 P_2^{(n)} + m_3 P_3^{(n)} + m_4 P_4^{(n)} = 0.$$

a''') Se i vettori $P_1^{(n)}, P_2^{(n)}, P_3^{(n)}$ non sono complanari, posto

$$P_4^{(n)} = n_1 P_1^{(n)} + n_2 P_2^{(n)} + n_3 P_3^{(n)}$$

sarà $(m_1 + m_4 n_1) P_1^{(n)} + (m_2 + m_4 n_2) P_2^{(n)} + (m_3 + m_4 n_3) P_3^{(n)} = 0$

quindi
$$\begin{aligned} m_1 + m_4 n_1 &= 0 \\ m_2 + m_4 n_2 &= 0 \\ m_3 + m_4 n_3 &= 0 \\ m_1 + m_2 + m_3 + m_4 &= 1. \end{aligned}$$

Se $n_1 + n_2 + n_3 \gtrless 1$ il sistema ammette la soluzione:

$$m_4 = \frac{-1}{n_1 + n_2 + n_3 - 1}, \quad m_1 = \frac{n_1}{n_1 + n_2 + n_3 - 1}, \quad \text{ecc.},$$

ed il punto O è determinato.

Se $n_1 + n_2 + n_3 = 1$ il sistema non ammette soluzione e non esiste il centro delle accelerazioni.

b''') Se $P_1^{(n)}$, $P_2^{(n)}$, $P_3^{(n)}$, $P_4^{(n)}$ sono complanari, e due qualunque di essi non sono paralleli, potremo porre:

$$P_3^{(n)} = l_1 P_1^{(n)} + l_2 P_2^{(n)}; \quad P_4^{(n)} = q_1 P_1^{(n)} + q_2 P_2^{(n)}$$

e $\quad (m_1 + l_1 m_3 + q_1 m_4) P_1^{(n)} + (m_2 + l_2 m_3 + q_2 m_4) P_2^{(n)} = 0$

quindi dovrà essere:

$$\begin{aligned} m_1 + l_1 m_3 + q_1 m_4 &= 0 \\ m_2 + l_2 m_3 + q_2 m_4 &= 0 \\ m_1 + m_2 + m_3 + m_4 &= 0, \end{aligned}$$

sistema che secondo l'ipotesi ammette infinite soluzioni. In questo caso i punti del corpo che hanno accelerazione zero sono infiniti e stanno su di una retta.

c''') Si possono considerare altri casi particolari in cui due o più vettori di riferimento sono paralleli, e si deduce facilmente che in questa ipotesi il centro delle accelerazioni non esiste, oppure ce ne sono infiniti.

Oss. In modo analogo a quello che si è fatto per il centro delle accelerazioni, si può determinare, quando esiste, il punto del corpo la cui accelerazione è uguale ad un dato vettore

$$a = \alpha_1 P_1^{(n)} + \alpha_2 P_2^{(n)} + \alpha_3 P_3^{(n)}.$$

VELOCITÀ.

6) Se P' e Q' sono le velocità di due punti P e Q del corpo, sarà per la (1) del N. 1

$$(P - Q)(P' - Q') = 0 \tag{1}$$

quindi $P' - Q'$ è normale a $P - Q$.

Date le velocità di tre punti P_1, P_2, P_3 si può colla (1) determinare la velocità di ogni altro punto del corpo. Sia P un punto esterno al piano $P_1 P_2 P_3 = \pi$, dovrà essere:

$$(P - P_1)(P' - P_1') = 0, \ (P - P_2)(P' - P_2') = 0, \ (P - P_3)(P' - P_3') = 0.$$

Portiamo sulle PP_1, PP_2, PP_3 dei segmenti PQ_1, PQ_2, PQ_3 uguali alle proiezioni di P_1', P_2', P_3' sulle PP_1, PP_2, PP_3; sarà P' il diametro condotto da P della sfera circoscritta al tetraedro $PQ_1 Q_2 Q_3$.

7) Siano P_1', P_2', P_3' tre velocità non complanari, e sia A il punto del piano $P_1 P_2 P_3$ di velocità minima, sarà:

$$A' P_1' = A' P_2' = A' P_3' = A'^2.$$

Il vettore A' non può cadere nel piano $P_1 P_2 P_3$ perchè, dovendo essere:

$$\begin{aligned} (P_1' - P_2')(P_1 - P_2) &= (P_1' - P_2') A' = (P_1' - P_3')(P_1 - P_3) \\ &= (P_1' - P_3') A' = 0, \end{aligned}$$

se A' è nel piano $P_1 - P_2$, $P_1 - P_3$, saranno $P_1' - P_2'$ e $P_1' - P_3'$ perpendicolari a questo piano e quindi paralleli, e P_1', P_2', P_3' complanari contro l'ipotesi.

8) Sia a la retta condotta per A che contiene A'. La retta a si chiama *asse centrale* della velocità. Gode delle seguenti proprietà:

1°) Tutti i punti di a hanno uguale velocità.

Sia M un punto di a, sarà

$$M - A = \alpha A'$$

dove α è un numero; quindi

$$\begin{aligned} (M' - A')(M - P_1) &= (P_1' - A')(M - P_1) = (P_1' - A')(M - A) \\ &= (P_1' - A') \alpha A' = 0 \end{aligned}$$

ed essendo P_1 un punto qualunque del piano π,

sarà $\quad M' - A' = 0, \quad M' = A'$

2°) È costante la proiezione su a della velocità di un punto qualunque P del corpo, cioè $P' A' = A'^2$.

Infatti i punti P_1 P_2 P_3 M non sono in un piano, quindi

$$\begin{aligned} P &= m_1 P_1 + m_2 P_2 + m_3 P_3 + m_4 M, \quad m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 1 \\ P' &= m_1 P_1' + m_2 P_2' + m_3 P_3' + m_4 M' \\ P' A' &= (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) A'^2 = A'^2 \end{aligned}$$

3°) I punti delle rette parallele ad a hanno uguale velocità.

Conduciamo da P la parallela ad a, e sia P_1 il punto in cui incontra il piano π, sia P_2 un punto qualunque del piano π, sarà

$$P - P_1 = \alpha A'$$

$$\begin{aligned} (P' - P_1')(P_1 - P_2) &= (P' - P_2')(P_1 - P_2) = (P' - P_2')(P_1 - P) \\ &= \alpha A' (P_2' - P') = 0 \end{aligned}$$

quindi $P' - P_1'$ è normale al piano π; ma

$$(P' - P_1')(P - P_1) = 0$$

quindi $\quad P' - P_1' = 0, \quad P' = P_1'.$

4°) Se p è un vettore normale al piano Pa, ed in grandezza uguale alla distanza di P da a, sarà

$$P' = A' + \omega p$$

dove ω è un numero costante per tutti i punti del corpo.

Poniamo $$P' = A' + \alpha$$

sarà $\alpha A' = A'(P' - A') = 0$; $\alpha (P - A) = (P' - A')(P - A) = 0$

quindi α è normale al piano Pa.

Sia P_1 un altro punto del corpo, e poniamo

$$P_1' = A' + \beta$$

sia Q il punto d'incontro della parallela condotta da P_1 ad a col piano normale ad a condotto da P, sarà

$$Q' = P_1' = A' + \beta$$

e siano PN, QN le perpendicolari condotte da P e da Q sulla a, ed $\overline{\alpha}$ $\overline{\beta}$ le grandezze dei vettori α e β. Sarà

$$(\alpha - \beta)(P - Q) = (P' - Q')(P - Q) = 0$$

$$\alpha (P - Q) = \beta (P - Q)$$

$$\overline{\alpha} \cos(\alpha_1, P - Q) = \overline{\beta} \cos(\beta_1, P - Q)$$

$$\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} = \frac{\cos(\beta_1, P - Q)}{\cos(\alpha_1, P - Q)} = \frac{\text{sen NQP}}{\text{sen NPQ}} = \frac{PN}{QN} = \frac{PN}{P_1N_1};$$

quindi $$\frac{\overline{\alpha}}{PN} = \frac{\overline{\beta}}{P_1N_1} = \omega$$

ed ω è costante.

Sarà dunque: $$\overline{\alpha} = \omega \, . \, \overline{PN}$$

e se p è un vettore normale al piano Pa ed in grandezza uguale a PN, sarà $$\alpha = \omega p.$$

La costante ω si chiama *velocità angolare*.

5°) Se φ è l'angolo che una retta PP_1 fa con a, ed ω la velocità angolare, sarà:

$$(P' - P_1')^2 = \omega^2 \, \overline{PP_1}^2 \, \text{sen}^2 \varphi.$$

Infatti conservando le notazioni precedenti,

$$(P' - P_1')^2 = \omega^2 (p - p_1)^2 = \omega^2 \, \overline{PQ}^2 = \omega^2 \, \overline{PP_1}^2 \, \text{sen}^2 \varphi.$$

9) Abbiamo supposto che le velocità di tre punti del corpo non siano complanari; se le velocità di tre punti non allineati del corpo

sono complanari senza essere uguali, si può dimostrare con procedimenti analoghi a quelli già seguiti, che:

1°) Esiste una retta a i cui punti hanno velocità zero (asse di rotazione).

2°) La velocità di ogni punto P del corpo è normale al piano Pa.

3°) È costante il rapporto della grandezza di P' alla distanza di P da a.

Il moto del corpo in quell'istante e per quanto riguarda la velocità si dice essere *rotatorio* attorno alla retta a.

10) Se le velocità di tre punti non allineati del corpo sono uguali, saranno uguali le velocità di tutti i punti del corpo. Il moto del corpo in quell'istante si dice essere, riguardo alle velocità, *progressivo*.

Accelerazioni di 1° Ordine.

11) Il vettore P'' è l'accelerazione di 1° ordine di P; in quanto segue lo chiameremo senz'altro *accelerazione del punto* P.

Tra le accelerazioni di due punti P_1, P_2 passa, per la (2) del N. **1**, la relazione: $(P_1 - P_2)(P_1'' - P_2'') + (P_1' - P_2')^2 = 0.$ (2)

Se $P_1 - P_2$ è parallelo ad a asse della velocità, sarà $P_1' = P_2'$, quindi

$$(P_1 - P_2)(P_1'' - P_2'') = 0.$$

Tenendo conto della (9) N. **7**, la (2) si può scrivere:

$$(P_1 - P_2)(P_1'' - P_2'') + \omega^2 \, \overline{P_1P_2}^2 \, \text{sen}^2 \varphi = 0. \qquad (2')$$

Date le velocità ed accelerazioni di tre punti $P_1 P_2 P_3$ di un corpo si può determinare colla (2) l'accelerazione di ogni altro punto P esterno al piano $P_1 P_2 P_3$ con procedimento meno semplice, ma analogo a quello indicato per le velocità al N. 6.

12) Esiste nel corpo un piano π' parallelo ad a, asse della velocità, luogo dei punti le cui accelerazioni sono normali ad a; esiste in questo piano una retta b, parallela ad a, i cui punti hanno accelerazioni normali al piano π'; sulla retta b si trova il *centro delle accelerazioni*, unico punto del corpo di accelerazione nulla. Determinerò questi elementi.

1°) Siano $P_1'' P_2'' P_3''$ le accelerazioni dei tre punti $P_1 P_2 P_3$ del piano π, non parallelo ad a, e sia P il *polo* delle accelerazioni in quel piano (V. (c') N. 3); siano N_1 ed N_2 i punti delle $P_1 P_2$, $P_1 P_3$ le cui accelerazioni sono normali ad a (V. (c) N. 2); la retta $N_1 N_2$ che chiameremo p contiene i punti del piano π le cui accelerazioni sono normali ad a. Sia N il *polo* delle accelerazioni della retta p, cioè sia

$N''(N - N_1) = 0$, e conduciamo per N la retta b parallela ad a; determino sulla b un punto O tale che

$$(O - N)\,P'' - (N' - P')^2 = 0.$$

Sarà O il centro delle accelerazioni.

Infatti si ha per costruzione:

$$O' = N', \quad N''(N - N_1) = N''(N - O) = N_1''(N - O) = P''(N - P) = 0$$

quindi:

$$O''(O - N) = N''(O - N) = 0$$
$$O''(O - N_1) = N_1''(O - N_1) - (O' - N_1')^2 = N_1''(N - N_1) - (N' - N_1')^2$$
$$= -(N - N_1)(N'' - N_1'') - (N' - N_1')^2 = 0$$
$$O''(O - P) = P''(O - P) - (O' - P')^2 = P''(O - N) - (N' - P')^2 = 0$$

per ipotesi.

I punti N, N_1, P non sono complanari con O, quindi $O'' = 0$.

Il punto P non può cadere sulla p; se ciò fosse, coinciderebbe con N, ed il piano π normale a P″ coinciderebbe col piano π' normale ad N″, e sarebbe parallelo ad a, ciò che è contro l'ipotesi.

2°) « I punti del piano π' hanno accelerazioni normali ad a ». Infatti sia M un punto di questo piano ed MN_1 la parallela ad a che termina in N_1 sulla p; sarà:

$$M''(M - N') = N_1''(M - N_1) - (M' - N_1')^2 = 0.$$

3°) « I punti della b hanno accelerazioni normali a π' ».

Infatti se B è un punto della b, sarà:

$$B = mO + nN\,,$$

quindi

$$B'' = nN''.$$

Ma N″ è perpendicolare alla p ed alla a, ossia al piano π', quindi anche B″ è normale al piano π'.

13) Sia P un punto, J la grandezza della sua accelerazione, r una retta per P, φ ed α gli angoli di r con a e P″, M il polo della r. Si può determinare la distanza ρ di P da M. Infatti si ha:

$$(M - P)(M'' - P'') + \omega^2\,\overline{MP}^2 \operatorname{sen}^2\varphi = 0$$

ed essendo $M'' = 0$,

$$J\rho \cos\alpha = \rho^2\,\omega^2 \operatorname{sen}^2\varphi$$

da cui

$$\rho = \frac{J\cos\alpha}{\omega^2 \operatorname{sen}^2\varphi}\,. \tag{a}$$

Se facciamo variare la direzione di r nello spazio, il punto M descrive una superficie. Se prendiamo P come origine, per asse della z

la parallela ad a che fa angolo acuto con P″, per asse della x la normale ad a nel piano P″a che fa angolo acuto con P″, posto $P''z = \beta$, l'equazione (a) diventa:

$$x^2 + y^2 = \frac{J}{\omega^2}(x \operatorname{sen}\beta + z\cos\beta),$$

quindi: « Il luogo dei poli delle accelerazioni dei raggi di una stella di centro P è un paraboloide di rivoluzione passante per P, normale a P″, ed il cui asse è parallelo ad a ».

Se P″ è normale ad a, cioè se P è sul piano π, sarà $\beta = \frac{\pi}{2}$, quindi

$$x^2 + y^2 = \frac{J}{\omega^2}x$$

che rappresenta un cilindro.

Se P coincide con O, l'equazione si riduce a

$$x^2 + y^2 = 0$$

e rappresenta l'asse delle z, cioè la retta b.

Se P è un punto della b, il cilindro corrispondente è tangente lungo la b al piano π'.

14) Abbiamo stabilito una corrispondenza tra un punto dello spazio ed un paraboloide che passa per esso. I paraboloidi corrispondenti a tutti i punti dello spazio sono tutti di rivoluzione, hanno gli assi paralleli, e debbono passare per un punto, cioè per il *centro delle accelerazioni*. Infatti questo punto è polo di ogni retta passante per esso.

In questa corrispondenza, si nota che:

1°) I paraboloidi $\Pi_1\,\Pi_2$ corrispondenti a due punti $P_1\,P_2$ si intersecano secondo una conica C perchè sono di rivoluzione intorno ad assi paralleli; la C è una elisse se $P_1\,P_2$ non è parallelo ad a, ed è una parabola se $P_1\,P_2$ è parallela ad a. La C incontra la retta $P_1\,P_2$ nel suo polo P. Il paraboloide corrispondente a P contiene la C ed è tangente in P alla $P_1\,P_2$. Ai punti della retta $P_1\,P_2$ corrisponde un fascio di paraboloidi che hanno di comune la stessa conica C. Questa linea è il luogo dei *poli* dei piani che passano per $P_1\,P_2$. Ad ogni retta dello spazio corrisponde dunque una conica che la incontra in un punto.

2°) I paraboloidi $\Pi_1\,\Pi_2\,\Pi_3$ corrispondenti ai punti $P_1\,P_2\,P_3$ non allineati passano per due punti, il polo P del piano $P_1\,P_2\,P_3$ ed il centro O delle accelerazioni. Al punto P corrisponde un paraboloide tangente in P al piano. Il paraboloide corrispondente ad ogni altro punto del piano passa per gli stessi punti O e P. Ai punti del piano pb corrispondono cilindri aventi la b per generatrice comune.

3°) Il piano $P_1\,P_2\,P_3$ taglia la rete di paraboloidi corrispondenti ai suoi punti secondo una rete di ellissi passanti tutti per lo stesso punto P, polo del piano. Sia E_1 l'ellisse corrispondente al punto P_1, essa taglia la $P_1 P_2$ nel punto Q, polo della $P_1 P_2$; la E_2 passerà per Q per P e per P_2; la E_3 passerà per P, per P_3 e per i punti d'incontro di $P_3 P_1$ con E_1 e di $P_3 P_2$ con E_2; la E_4 corrispondente al punto P_4 passa per i punti P, P_4, e per i punti d'incontro di $P_4 P_1$ con E_1, $P_4 P_2$ con E_2, $P_4 P_3$ con E_3, e così di seguito. Ogni elisse del piano è normale alla proiezione sul piano dell'accelerazione del punto a cui corrisponde, ed ha uno degli assi parallelo alla proiezione sul piano dell'asse a. Per i piani normali all'asse a il sistema di elisse è un sistema di circonferenze.

4°) Dato il fascio di ellissi corrispondente ad una retta r in un piano, è determinata per punti l'ellisse corrispondente ad ogni punto P del piano non posto sulla r. Infatti se P_1 è un punto qualunque della r, il punto d'incontro della PP_1 con E_1 diverso da P_1 appartiene alla E.

5°) Costruita la rete di paraboloidi corrispondenti ai punti di un piano, è determinato per punti il paraboloide corrispondente ad un punto P non contenuto nel piano. Infatti se P_1 è un punto qualunque del piano, il 2° punto d'incontro di PP_1 col paraboloide Π_1 appartiene al paraboloide Π.

6°) Se $P = m_1 P_1 + m_2 P_2 + m_3 P_3 + m_4 P_4$,

sarà $$\Pi = m_1 \Pi_1 + m_2 \Pi_2 + m_3 \Pi_3 + m_4 \Pi_4$$

dove $\Pi = 0$ è l'equazione del paraboloide corrispondente a P.

Infatti se M è un punto qualunque di Π sarà:

$$\begin{aligned}\Pi &= (P - M) P'' + (P' - M')^2 = [m_1 (P_1 - M) + \ldots][m_1 P_1'' + m_2 P_2'' + \ldots] \\ &\quad + [m_1 (P_1' - M') + \ldots]^2 \\ &= m_1^2 [(P_1 - M) P_1'' + (P_1' - M')^2] + \ldots \\ &\quad + m_1 m_2 [(P_1 - M) P_2'' + (P_2 - M) P_1'' + 2 (P_1' - M')(P_2' - M')] + \ldots = \\ &= m_1^2 \Pi_1 + \ldots + m_1 m_2 [\Pi_1 + \Pi_2 + (P_1 - P_2)(P_1'' - P_2'') + (P_1' - P_2')^2] + \ldots \\ &= m_1 \Pi_1 (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) + m_2 \Pi_2 (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) + \ldots \\ &= m_1 \Pi_1 + m_2 \Pi_2 + m_3 \Pi_3 + m_4 \Pi_4 .\end{aligned}$$

Lo studio di queste serie lineari di elissi nel piano e di paraboloidi nello spazio non è priva di interesse anche dal punto di vista puramente geometrico.

7°) Se si considera il moto di una figura piana nel proprio piano, la (a) si riduce alla
$$\rho = \frac{J \cos \alpha}{\omega^2}$$
che rappresenta una circonferenza passante per P, il cui centro è sulla P'' ed il cui diametro è $\frac{J}{\omega^2}$. Date le accelerazioni di due punti è determinato il centro delle accelerazioni e quindi l'accelerazione di ogni altro punto del piano. La circonferenza corrispondente al centro delle velocità contiene i punti della figura la cui accelerazione normale è zero.

15) Date le accelerazioni di tre punti $P_1 P_2 P_3$ di un corpo, e determinato il centro O delle accelerazioni, è di molto semplificata la costruzione dell'accelerazione di ogni altro punto P del corpo. Sia P_4 il punto in cui la OP incontra il piano $P_1 P_2 P_3$, si costruisca P_4'' e sia $Q_4 - P_4 = P_4''$; la parallela alla P_4'' condotta da P e terminata alla OQ_4 è l'accelerazione di P.

Osservazioni sul « Traité d'Analyse par H. Laurent »

di G. Peano.

Questo trattato consta di 7 volumi: I (1885), II (1887), III (1888), IV (1889), V e VI (1890), e il VII (1891). Quest'opera è senza dubbio meritevole di encomio e per la vastità della materia svolta, e per la precisione e chiarezza con cui sono enunciate le proposizioni. Qui io non intendo di fare una recensione di questo trattato, ma, approfittando delle doti del medesimo, mi propongo di rilevare solo quei punti in cui si può aggiungere o maggior rigore o maggior precisione; insomma mi propongo di pubblicare le osservazioni che feci leggendo quest'opera.

Continuità delle funzioni (I, 79).

« Théorème. — Deux fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$, ayant même dérivée, et restant continues, ne peuvent (tant qu'elles restent continues) différer l'une de l'autre que par une costante. »

In questo enunciato si possono sopprimere le parole « restant continues » e quelle entro parentesi, poichè, come l'A. già osservò a pag. 66, una funzione avente derivata è necessariamente continua. La stessa osservazione si può fare alle pag. 129 e 155, ove l'A. ripete la condizione della continuità.

Formola di Taylor (I, 125).

L'A. dimostra la formola:
$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^n(x) + \frac{h^n}{n!} \varepsilon ,$$
ove ε è una quantità infinitesima con h, aggiungendo, insieme a tutti gli Autori, « Cette formule suppose la continuité de $f^n(x)$. » Già nelle

annotazioni al « Calcolo differenziale » (1884) io aveva annunziato che questa condizione delle continuità non è necessaria e l'ho dimostrato nel *Mathesis*, IX, p. 182. In conseguenza moltissimi teoremi sulle espressioni che si presentano sotto forma indeterminata, sui massimi e minimi, sul piano osculatore, ecc., possono essere semplificati.

SULLE DIFFERENZE FINITE (I, 102).

« Si $f^{n+1}(x)$ existe, ou si $f^{n}(x)$ est continu, la limite de $\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}$ pour $\Delta x = 0$ est $f'(x)$. »

Le ipotesi dell'esistenza di $f^{n+1}(x)$, o della continuità di $f^n(x)$ sono inutili. Già fece questa osservazione il prof. DINI (Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali, Pisa 1878, pag. 227) dimostrandolo però solo per $n = 2$.

Ricorrendo alla formola di Taylor, come si è ora scritta, se ne ha una dimostrazione generale, e più semplice. Invero ponghansi in essa, al posto di h, i valori $0, h, 2h, \ldots nh$, e siano $0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ i valori corrispondenti di ε; poi si prendano le differenze n^{me}. Nel secondo membro le differenze dei termini il cui grado in h è minore di n sono nulle; si ha poi

$$\Delta^n (h^n) = n!\, \Delta x^n$$

$$\Delta^n f(x) = \Delta x f^n(x) + \frac{1}{n!} \Delta^n (h^n \varepsilon).$$

e dividendo per $h^n = \Delta x^n$ si ha:

$$\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n} = f^n(x) + \text{un polinomio omogeneo di primo grado}$$
$$\text{in } \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \text{ a coefficienti numerici.}$$

Al limite, poichè tutte le ε tendono a zero, si avrà la formola a dimostrarsi.

SUI SIMBOLI DISTRIBUTIVI (I, 133)

L'A. definisce:

« Un symbole P est *distributif* quand on a $P(a+b) = Pa + Pb$. »

Poi enuncia la proposizione:

« En appellant A une constante numérique, on a $P.Aa = A.Pa$, »

e lo dimostra per a intero, o razionale $= \frac{p}{q}$ poi aggiunge:

« Cette proposition étant vraie, quels que soient p et q, est vraie pour les valeurs incommensurables de A. »

In questo passaggio trovasi una grave difficoltà. Anzitutto non è vero che ogni proprietà dimostrata pei numeri razionali, sussista pure per gli incommensurabili, ma occorrono condizioni restrittive; la condizione che si suol comunemente ammettere in siffatti passaggi, è quella della continuità. Ma in questa questione speciale la continuità non ha alcun senso; p. e. l'operazione P può rappresentare il segno d di differenziazione; non ha alcun significato il dire che questa operazione d sia continua o discontinua.

In alcune mie ricerche sullo stesso soggetto (Calcolo geometrico, Torino 1888, p. 145) io fui obbligato ad assumere per definizione delle funzioni distributive le due proprietà

$$P(a+b) = Pa + Pb, \quad \text{e} \quad P(ma) = m(Pa),$$

qualunque sià il numero reale m.

SULL'INVERSIONE DELLE DERIVAZIONI (I, 139).

La formola $\frac{d^2 f}{dx\,dy} = \frac{d^2 f}{dy\,dx}$ è dimostrata con un numero eccessivo di condizioni restrittive, e la dimostrazione stessa lascia ancora a desiderare. Non mi fermerò su questo punto, tanto più che dimostrazioni esatte trovansi nei trattati di SERRET e JORDAN, e che la questione di ridurre al minimo numero le condizioni restrittive, fu trattata da SCHWARZ, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Berlin, 1890, t. II, p. 275; da BETTAZZI, *Sulla derivata totale delle funzioni di due variabili reali, e sull'inversione delle derivazioni* (Giornale di Matematiche, vol. XXVI), e da me, nel giornale *Mathesis*, 1890.

SUI DIFFERENZIALI TOTALI (I, 148).

« THÉORÈME FONDAMENTAL. — L'accroissement que subit une fonction de plusieurs variables, quand on donne des accroissements de même ordre à ses variables, est, aux infiniment petits d'ordre supérieur près, égal à sa différentielle, et par suite, dans un limite de rapport, l'accroissement d'une fonction peut être remplacé par sa différentielle sans changer le résultat. »

Questa proposizione trovasi, con leggiere modificazioni, in quasi tutti i trattati (JORDAN, SERRET, TODHUNTER, ecc.). Ma essa non è esattamente enunciata.

Invero, sia p. e. $f(x, y)$ una funzione intera di grado superiore al primo. Si attribuiscano ad x ed y gli incrementi h e k; sarà $\Delta f(x, y)$ funzione intera di h e k; supponiamo che essa non sia divisibile per

$\frac{df}{dx}h + \frac{df}{dy}k$. Allora facendo tendere h e k a zero, incondizionatamente, il rapporto $\frac{\Delta f}{df}$ ha per estremi oscillatori $-\infty$ e $+\infty$, e non ha per limite l'unità.

Se invece h e k tendono a zero, sotto certe condizioni, bisogna esaminare se i valori che può successivamente assumere $\frac{k}{h}$ possano essere comunque prossimi a $-\frac{df}{dx} / \frac{df}{dy}$, ovvero no; nel primo caso la proposizione è falsa; nel secondo è vera.

La condizione imposta dal LAURENT, che h e k siano infinitesimi dello stesso ordine, ossia che $\frac{k}{h}$ sia in valor assoluto sempre compreso fra due numeri finiti e positivi, non ha per conseguenza che i valori di questo rapporto non possano essere comunque prossimi a $-\frac{df}{dx} / \frac{df}{dy}$, ossia non ha per conseguenza la verità del teorema.

Analogamente la proposizione (pag. 150):

« THÉORÈME. — Les quantités $d^n f$ et $\Delta^n f$ sont égales, à des termes près d'ordre supérieur à n. »

ha bisogno di condizioni restrittive; essa è vera assoggettando gli incrementi delle variabili a convenienti limitazioni. Essa è vera, senza limitazione alcuna per questi incrementi, se $d^n f$ è una forma definita.

SUI DETERMINANTI JACOBIANI (I, 164).

« THÉORÈME de M. BERTRAND. — Le déterminant d'un système de fonctions $u_1, u_2, \ldots u_n$ par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots x_n$ est le rapport du déterminant du système d'accroissements que prennent ces fonctions au déterminant du système correspondent d'accroissements infiniment petits des variables. »

Questa proposizione così enunciata è inesatta; si possono ottenere delle proposizioni vere in più modi, con convenienti restrizioni. Veggasi un mio articolo nel *Giornale di Matematiche*, vol. XXVII.

(*Continua*).

Questione V.

Costrurre il triangolo avente per bisettrici interne tre segmenti dati, solo usando di rette e cerchi.

In caso d'impossibilità, provarla.

Prof. M. A. ROSSOTTI.

ENRICO NOVARESE

Il 14 gennaio scorso il Prof. NOVARESE, nella verde età di 33 anni, veniva rapito alla scienza, all'amore dei suoi cari ed all'affetto degli amici, affetto che Egli si era cattivato colle doti elette dell'animo suo.

Enrico Novarese nacque a Novara il 15 giugno 1858. Si distinse nei suoi studii superiori all'Ateneo torinese. Professore di meccanica razionale nella R. Accademia militare, ed aiuto ai corsi di terzo anno della facoltà di matematica della R. Università, ebbe stima e lode per la precisione e coscienza colle quali Egli dettava le sue lezioni. Pubblicò parecchie note, che in gran parte trattano questioni di meccanica. Fu uno dei fondatori della nostra *Rivista di Matematica*, nella quale collaborò con attività e amore.

Ecco l'elenco dei suoi lavori:

Intorno ad alcune formule di Hermite per l'addizione delle funzioni ellittiche (Atti R. Acc. delle Scienze di Torino, 26 marzo 1882).

Intorno alla moltiplicazione delle funzioni ellittiche (Atti R. Acc. delle Scienze di Torino, 11 giugno 1882).

Sulle accelerazioni nel moto d'una figura piana nel proprio piano (Atti R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XIX).

Sur une propriété du paraboloïde hyperbolique (Mathesis, Gand).

Di una analogia fra la teoria delle velocità e la teoria delle forze (Atti R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XXI).

Sopra una trasformazione delle equazioni di equilibrio delle curve funiculari (Atti R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XXII).

Note sur les nombres parfaits (Jornal de Sciencias Mathematicas e e Astronomicas, Coimbra, vol. VIII).

Proprietà stereometriche dei sistemi di forze (Rendiconto del R. Istituto Lombardo, serie 2ª, vol. XXI).

Studio sulla accelerazione di ordine n *nel moto d'una retta* (Atti R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XXIV).

Sulla accelerazione di second'ordine nel moto rotatorio attorno a un punto (Atti R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XXVI).

Sulla definizione della velocità d'un punto (Rivista di Matem., vol. I).

Necrologia di Sofia Kowalevscki (Rivista di Matem., vol. I).

LA REDAZIONE.

Osservazione relativa al resto nello sviluppo di Taylor.

Da una lettera del prof. G. MORERA
al Direttore della *Rivista*.

Se $f(x)$ è una funzione che, insieme alle sue prime m derivate, è finita e continua nell'intervallo (a, b) e ammette la derivata $(m+1)^{ma}$; e se $\varphi(x)$ indica una funzione finita e continua nell'intervallo $(o, b-a)$, la quale non assume lo stesso valore agli estremi di questo intervallo e ammette la derivata, si ha:

$$f(b) = f(a) + \sum_{n=1}^{m} \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \mathrm{R}_m\,,$$

$$\mathrm{R}_m = \frac{\varphi(b-a) - \varphi(o)}{\varphi'(b-a-\theta(b-a))} \; \frac{(b-a-\theta(b-a))^m}{m!} f^{(m+1)}(a+\theta(b-a))$$

dove $$o < \theta < 1\,;$$

purchè, essendo comunque $f^{(m+1)}(x)$, la funzione $\varphi'(x)$ non si annulli mai nell'intervallo $(o,\, b-a)$, oppure, essendo comunque $\varphi'(x)$, la funzione $f^{(m+1)}(x)$ non si annulli mai nell'intervallo $(a,\, b)$.

Si noti però che se $\varphi'(x)$ non si annulla mai nell'intervallo $(o, b-a)$, non può essere:

$$\varphi(b-a) = \varphi(o).$$

Orbene, se $f^{(m+1)}(x)$ non si annulla mai e per conseguenza

$$f^{(m)}(b) \neq f^{(m)}(a)\,,$$

è lecito assumere:

$$\varphi(x) = -f^{(m)}(b-x)\,;$$

e si ottiene così:

$$\mathrm{R}_m = \theta'^m \left\{ f^{(m)}(b) - f^{(m)}(a) \right\} \frac{(b-a)^m}{m!}$$

$$o < \theta' < 1\,,$$

formula che merita di essere notata.

Sopra un massimo.

Il colonnello B. Plebani ci comunica questo risultato degno di nota, che il massimo valore della $\sqrt{\dfrac{\sec x}{x}}$ vale 1,335, a meno di un milionesimo.

(P.)

Aggiunte all'articolo

Il teorema fondamentale della Teoria delle equazioni algebriche

di GINO LORIA.

(*Rivista di Matematica*, I, 185-248).

Nel redigere un riassunto di questo articolo da pubblicarsi nella *Bibliotheca mathematica* per soddisfare il desiderio del sig. G. Eneström, mi accadde di arrecarvi alcune aggiunte delle quali, se non mi inganno, i lettori della *Rivista* hanno il diritto di prendere cognizione, onde credo opportuno darne qui un rapido cenno; mi dispenso invece dall'indicare gli errori di stampa che vi si trovano essendo sicuro che saranno stati da tutti rilevati e corretti senza il mio aiuto.

1. p. 186-187. Fra coloro che ammisero come evidente l'esistenza di radici in ogni equazione, va posto anche Cartesio, il quale se ne servì nell'enunciare la sua celebre regola dei segni. V. *Géométrie*, ed. Hermann, Paris, 1886, p. 55.

2. p. 222. Fra i migliori espositori della dimostrazione di Mourey va citato il Catalan. V. *Cours d'Analyse de l'Université de Liège*, II éd., p. 187.

3. p. 236. Una buona dimostrazione algebrica dell'attitudine di ogni funzione algebrica razionale intera di una variabile di assumere tutti i valori, leggesi in: Murphy, *A Treatise of the Theorie of algebraic Equation*, London (senza data; la prefazione però è segnata 3 febbraio 1838).

4. p. 239. Alle versioni citate della dimostrazione di Dehana unisco la dimostrazione che H. Scheffer fece conoscere nel T. XV dell'*Archiv für Mathematik und Physik* e che ha recentemente ripubblicata sotto forma più perfetta nei *Beiträge zur Theorie der Gleichungen* (Leipzig, 1891): essa però la vince sulle analoghe perchè conduce, non soltanto ad una, ma a tutte le radici dell'equazione proposta.

5. p. 239. La dimostrazione di Zeuthen — di cui, quando pubblicai il mio articolo, non possedevo che una cognizione superficiale, avendola soltanto scorsa rapidamente nella biblioteca del seminario matematico dell'Università di Lipsia — può riassumersi come segue:

Rappresentiamo nel modo consueto i valori della variabile z sui punti di un piano e chiamiamo $\varphi(z)$ una funzione continua ma plurivalente di z. Come si sa, quando dopo che z ha descritta una linea chiusa l, si trova che $\varphi(z)$ non ha al principio e al termine del movimento di z lo stesso valore, forza è concludere che entro l esista qualche punto di diramazione di $\varphi(z)$. Ciò premesso, si prenda

$$\varphi(z) = \sqrt{z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m};$$

i punti di diramazione di questa funzione, se esistono, sono quelli che annullano il polinomio sottoposto al segno di radice; laonde per dimostrare il teorema fondamentale è sufficiente assicurarsi dell'esistenza di punti dell'anzidetta specie. Ora, in forza di quanto si è notato prima, a tale scopo basta trovare un contorno chiuso tale che, quando z lo percorre, $\varphi(z)$ non riprenda lo stesso valore all'origine ed alla fine del movimento. E siccome è facile vedere che per tale contorno si può scegliere una circonferenza di raggio infinito, così esistono valori di z che annullano il polinomio

$$z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m \qquad \text{q. e. d.}$$

6. p. 243. Il n. XIX va completato così:

Burg, « Ueber die Existenz der Wurzeln einer höheren Gleichung ». Jahrb. des k. k. polytechn. Institutes (Wien) T. 17, 1832, p. 141, e T. 19, 1837, p. 155.

7. p. 245. Dopo il n. XXIV si ponga la citazione del seguente lavoro che contiene una dimostrazione affine a quella di Airy:

Cayley, « Sketch of a Proof of the Theorem that Every Algebraic Equation has a Root ». Philosophical Magazine, vol. XVIII, 1859, p. 436, oppure The Collected Mathematical Papers, vol. IV, 1891, p. 116.

Genova, 30 gennaio 1892.

Sull'infinitesimo attuale. (1)

Osservazioni di Rodolfo Bettazzi.

1. Son lieto che le mie « Osservazioni all'articolo del Dr Vivanti « sull'*Infinitesimo attuale* » (V. *Rivista*, vol. I, pag. 174) abbiano dato motivo ad un nuovo ed interessante scritto dello stesso autore (*ivi*, pag. 248): e constato con piacere come regni fra noi due l'accordo completo sulle questioni principali — 1° Il concetto d'infinitesimo attuale non è contradditorio, in quanto esistono classi (proprie) di grandezze nelle quali per due grandezze opportune A, B si ha $n\mathrm{A} < \mathrm{B}$ qualunque sia n intero, e quindi A è da dirsi un infinitesimo (attuale) rispetto a B (classi di 2a specie) (1). 2° Nella classe dei segmenti destinati allo studio dei fenomeni naturali è da escludersi il segmento infinitesimo.

(1) V. *Rivista*, anno I, pagg. 135, 174, 248.

Noto peraltro che l'autore non approva i miei argomenti relativi alla 2a questione, là dove io dico che il segmento attualmente infinitesimo non esiste per ragione di analogia con quello che si riscontra in pratica *dentro i limiti delle nostre osservazioni;* ritenendo egli esser *necessario* per la natura stessa della nostra mente il fatto che io ho detto essere soltanto *opportuno* come rappresentazione della realtà basata su osservazioni necessariamente limitate, vale a dire la continuità della classe degli ordinari segmenti, che esclude l'esistenza dell'infinitesimo. Essendo la questione entrata così nel campo filosofico, dove io non volevo condurla perchè affatto profano ai relativi studi, non intendo aprire la discussione in quell'indirizzo. Mi limito ad osservare che la questione strettamente matematica alla quale intendevo arrestarmi può dirsi esaurita; inquantochè definita la retta, e definiti i segmenti come sue parti, ritenendo per essi i consueti concetti di uguale, maggiore, minore, somma e differenza è *logicamente* libera la scelta fra i due postulati « La classe dei segmenti è connessa » e « La classe dei segmenti non è connessa », i quali conducono rispettivamente alla non esistenza ed all'esistenza di coppie di segmenti di cui uno è infinitesimo rispetto all'altro.

2. Mi siano permesse poche parole su una delle osservazioni di dettaglio che io facevo all'articolo del Dr Vivanti (V. § 3 del mio articolo) e che a lui non sembra fondata (V. § 7 del suo 2° articolo).

Io dissi *non esser provato* che il numero transfinito del Cantor sia la più alta espressione del numero: e il Dr Vivanti mi giudica in errore, giacchè, come egli scrive, « Un numero transfinito non è altro « che il concetto che si ottiene da un insieme ben ordinato, facendo « astrazione dalla natura speciale dei suoi elementi: per modo che a « qualunque insieme bene ordinato corrisponde *ipso facto* un numero « transfinito ». Ma, domando, e se una grandezza non si può definire come un insieme bene ordinato, quale numero transfinito le corrisponderà? O piuttosto tutte le grandezze sono da ritenersi quali insieme bene ordinati? Siccome quest'ultima cosa non è da affermarsi in generale, dato il concetto comune di grandezza, così mi pare chiara la insufficienza del numero transfinito come concetto corrispondente alle grandezze, a meno che o ci si limiti a loro classi speciali, o si aggiunga qualcosa di più all'idea che ordinariamente si ha di esse.

(1) V. per le denominazioni usate la mia *Teoria delle grandezze*, § 58.

A quest'ultimo modo si attiene del resto per il caso dei segmenti l'autore, il quale così prosegue: « Ora nel caso nostro abbiamo a fare « appunto con un insieme bene ordinato, e cioè con una serie di seg- « menti infinitesimi tutti eguali, disposti l'uno di seguito all'altro sopra « una linea retta ». Mi pare chiaro che qui si enuncia una ipotesi nuova ed indipendente, e non un fatto necessariamente incluso nel concetto di segmento infinitesimo. Le grandezze comuni sono composte di parti che si seguono, ma quando queste sono finite, cioè della stessa natura delle grandezze che esse ricompongono; nulla invece mi pare che l'osservazione o la logica c'insegnino circa il modo in cui si deve concepire una grandezza come insieme di altre che non sono della sua stessa natura. E se manca questa disposizione dei segmenti infinitesimi che fa del segmento finito un insieme bene ordinato, manca l'appoggio che per il suo assunto l'autore chiede alla dimostrazione del Cantor circa la non esistenza dell'infinitesimo.

3. Faccio un'ultima osservazione che non riguarda il merito della questione, ma solo un'inesattezza che io ho creduto vedere in una dimostrazione del D^r^ Vivanti (V. suo 1° articolo, § 10; 2° art., § 8; mio art., § 4) e che consiste nel concludere che se due segmenti uguali sono ciascuno somma di segmenti tutti uguali, gli uni e gli altri in numero infinito e di egual potenza, devono essere i segmenti componenti la 1ª somma uguali a quelli componenti la 2ª. Se l'esempio che ho citato ad illustrazione di quella inesattezza (cioè che infiniti segmenti uguali fra loro, anche se disuguali ad altri infiniti pure uguali fra loro, possono, sommati, riprodurre la stessa semiretta di questi) non è valido a confutare il ragionamento del D^r^ Vivanti perchè, come egli dice, « la semiretta è un segmento infinito ed s (segmento) è finito », e « nulla prova che quanto può dirsi per un segmento infinito, possa « applicarsi senz'altro ad un segmento finito e viceversa » sussiste per altro ancora la mia obiezione che egli cita un teorema vero per un numero finito di segmenti finiti, usandolo per un numero infinito di segmenti infinitesimi, obiezione che può anche ricavarsi dalle stesse sue parole ora citate, giacchè i vocaboli usati, infinito e finito, o finito e infinitesimo, hanno un significato che è differente soltanto in modo relativo.

E di più, siccome l'autore osserva, per sostenere la sua dimostrazione, che data l'esistenza dei segmenti infinitesimi $\frac{s}{i}$ ed $\frac{s}{i_1}$ (dove s è un segmento finito ed i, i_1 sono numeri transfiniti) si potrebbe concludere dover essere s parte di sè stesso « ciò che è contrario alla « proprietà caratteristica dei segmenti finiti », io dico invece che questa contraddizione non c'è, altro che se si ammette già la non esistenza dell'infinitesimo, contro l'ipotesi da cui si muove: giacchè la differenza fra s e la sua parte s_1 potrebbe consistere appunto in un segmento infinitesimo, ed s, s_1 sarebbero allora da dirsi uguali — così come due enti infiniti (per es.: due semirette) sono uguali anche se differiscono fra loro per una grandezza finita (segmento) da dirsi infinitesima rispetto ad essi.

4. Nel terminare debbo rendere vive grazie al Ch^mo^ D^r^ Vivanti per la discussione che si è compiaciuto di sostenere con me su un argomento così interessante: del quale altro per ora non scrivo, ritenendo aver detto quanto era il caso di esporre sotto la modesta forma di « Osservazioni ».

Torino, 21 dicembre 1891 (*).

Esempi di funzioni sempre crescenti e discontinue in ogni intervallo.

La possibilità di funzioni d'una variabile, sempre crescenti e discontinue in ogni intervallo, fu riconosciuta da Harnack, *Mathematische Annalen,* Bd. XXIII, e il dott. R. Bettazzi, nella sua nota: *Su una corrispondenza fra un gruppo di punti ed un continuo ambedue lineari* (Annali di Matematica, 1888, p. 49) studiò le proprietà del gruppo dei valori di queste funzioni.

Io mi propongo di portare alcuni esempi semplici di funzioni siffatte. Sia x un numero dell'intervallo da 0 ad 1, e sia precisamente

$$0 \leqq x < 1.$$

Si sviluppi x in frazione decimale infinita:

$$x = 0,\ \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \ldots$$

cioè:

$$x = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{100} + \frac{\alpha_3}{1000} + \ldots\ ,$$

ove α_1 α_2 ... sono *cifre,* cioè dei numeri 0, 1, ... 9. Ogni numero x dà luogo ad una sola frazione decimale, cioè ad una sola serie di cifre, eccettuato il caso in cui x sia eguale ad una frazione decimale finita; nel qual caso fra i due sviluppi infiniti, dei quali il primo da

(*) In uno dei prossimi fascicoli si svilupperà la dimostrazione del Cantor sull'impossibilità di segmenti infinitesimi costanti. (P.)

una certa cifra in poi, ha tutte le cifre eguali a 0, e l'altro ha tutte le cifre eguali a 9, sceglieremo il primo. Pongasi:

$$f(x) = \left(\frac{\alpha_1}{10}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_2}{100}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_3}{1000}\right)^2 + \ldots$$

Si ha per es.:

$$\begin{array}{ll} \text{per } x = 0 & f(x) = 0, \\ x = 0{,}5 & f(x) = 0{,}25, \\ x = 0{,}1111\ldots & f(x) = 0{,}01010101\ldots \\ x = 0{,}4342\ldots & f(x) = 0{,}16091604\ldots \end{array}$$

. . . .

Si vede immediatamente che $f(x)$ è crescente mentre x varia da 0 ad 1, e che è discontinua per ogni valore di x rappresentabile con una frazione decimale finita.

Si arriva allo stesso risultato ponendo

$$\varphi(x) = 0,\ 0\alpha_1 0\alpha_2 0\alpha_3 \ldots$$

cioè

$$\varphi(x) = \frac{\alpha_1}{100} + \frac{\alpha_2}{100^2} + \frac{\alpha_3}{100^3} + \ldots$$

e così via.

Si vede da questi esempi e da altri già pubblicati, che sviluppando la variabile x in frazione decimale $x = 0,\ \alpha_1\ \alpha_2 \ldots$ e poi colle cifre $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots$ formando un nuovo numero, si ottengono facilmente delle funzioni presentanti date discontinuità, o anche funzioni continue, mancanti di derivata, ecc.

Le funzioni precedentemente considerate sono integrabili; e si ha

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{32}{111}\,, \qquad \int_0^1 \varphi(x)dx = \frac{5}{111}\,.$$

G. Peano.

Questione VI.

L'equazione $f(x, y) = 0$, ove il primo membro è funzione intera delle due variabili numeriche x e y, ha le seguenti tre proprietà:

1° Qualunque sia x, si ha $f(x, x) = 0$.

2° Se $f(x, y) = 0$, sarà pure $f(y, x) = 0$.

3° Se $f(x, y) = 0$, e $f(x, z) = 0$, sarà pure $f(y, z) = 0$.

Si può dedurre da queste ipotesi che l'equazione proposta si può ridurre alla forma $\varphi(x) = \varphi(y)$, ove φ è funzione intera?

G. Peano.

Costruzioni baricentriche

per E. Cesàro.

Ad una curva data nel piano è possibile farne corrispondere un'altra, tale che il baricentro di qualunque arco della prima curva appartenga alla corda del corrispondente arco della seconda curva? Prendiamo come assi la tangente e la normale alla prima curva in un punto mobile M, la cui posizione è determinata sulla curva stessa dalla lunghezza s dell'arco, misurata a partire da un punto fisso O. Immaginiamo, per semplicità, che il punto M si sposti sulla sua traiettoria con una velocità che si assume ad unità, e rammentiamo che le componenti della velocità assoluta di qualunque punto (x, y) del piano sono

$$\dot{x} = x' - \frac{y}{\rho} + 1\,, \quad \dot{y} = y' + \frac{x}{\rho}\,, \tag{1}$$

rappresentando con ρ il raggio di curvatura, e con x', y' le derivate di x, y rispetto ad s, componenti della velocità relativa del punto (x, y) nel sistema rigido determinato dagli assi mobili. Ora x ed y, funzioni della sola s, siano le coordinate del punto N, che sulla seconda curva corrisponde ad M, e siano M′, N′ le nuove posizioni di M, N dopo il tempo ds. Quando M′ tende ad M, anche il baricentro dell'arco MM′ tende a confondersi con M, e però NN′ deve tendere a passare per M, cioè la tangente alla curva (N), in N, passa per M: ciò si esprime scrivendo

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{y}}{y}\,. \tag{2}$$

In coordinate polari (u, ω) le formole (1) diventano

$$\dot{u} = u' + \cos\omega\,, \quad \dot{\omega} = \omega' + \frac{1}{\rho} - \frac{\operatorname{sen}\omega}{u}\,,$$

e la condizione (2) equivale ad $\dot{\omega} = 0$.

Siano ξ, η le coordinate del baricentro G dell'arco M_0M. Mentre M si muove, si lasci fisso M_0 nella posizione occupata da M al tempo s_0. Il baricentro dell'arco M_0M' ha evidentemente le coordinate

$$\xi + \dot{\xi}\,ds = \frac{(s - s_0)\,\xi}{s - s_0 + ds}\,, \quad \eta + \dot{\eta}\,ds = \frac{(s - s_0)\,\eta}{s - s_0 + ds}\,,$$

e però

$$\frac{\dot{\xi}}{\xi} = \frac{\dot{\eta}}{\eta} = -\frac{1}{s - s_0}\,. \tag{3}$$

Dunque la tangente alla curva (G), in G, passa per M. Intanto osserviamo che le coordinate x_0, y_0, rispetto agli assi di origine M, del punto N_0 corrispondente ad M_0, sono funzioni di s e di s_0, coincidenti, per $s=s_0$, coi valori a, b, che prendono x, y, per questo valore di s. Siccome poi N_0 rimane fisso, si ha, in virtù delle (1),

$$x'_0 = \frac{y_0}{\rho} - 1 \,, \quad y'_0 = -\frac{x_0}{\rho} \,. \tag{4}$$

Ciò premesso, esprimiamo che G è situato su NN_0 scrivendo

$$\xi = x + k\frac{x-x_0}{s-s_0} \,, \quad \eta = y + k\frac{y-y_0}{s-s_0} \,. \tag{5}$$

Per derivazione, tenendo conto delle formole (1), (3), (4), si ottiene

$$\left\{\begin{array}{l} x + k'(x-x_0) + (s-s_0+k)\dot{x} = 0 \,, \\ y + k'(y-y_0) + (s-s_0+k)\dot{y} = 0 \,. \end{array}\right. \tag{6}$$

Perchè si possa soddisfare alle (6) ed in pari tempo alle (2) è necessario che sia $k'=0$, cioè che k sia funzione della sola s_0. Sostituendo nelle (6) si vede ancora che $k-s_0$ dev'essere costante, e si può supporre $k=s_0$ per una conveniente scelta dell'origine degli archi. Ora le (6) assumono la forma

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{y}}{y} = -\frac{1}{s} \,, \tag{7}$$

e le uguaglianze (5) diventano

$$\xi = \frac{sx - s_0x_0}{s-s_0} \,, \quad \eta = \frac{sy - s_0y_0}{s-s_0} \,. \tag{8}$$

Esse mostrano che, se dai centri N, N_0 si descrivono circonferenze con raggi inversamente proporzionali agli archi s, s_0, un centro di similitudine di queste circonferenze è appunto G. Paragonando poi (7) con (3) si vede che N può essere il baricentro dell'arco OM, e così la proprietà della curva (N) è resa evidente, e si vede inoltre che i punti N si possono anche trasferire sulle rispettive circonferenze parallelamente ad una direzione invariabile, perchè immaginando che due qualunque di queste circonferenze vengano trascinate nel moto dei centri, esse non cessano evidentemente di conservare inalterato un centro di similitudine. Bisogna notare che in tal modo si ottengono tutte le possibili curve (N) corrispondenti ad una data (M), perchè, rappresentando con $x=x_1$, $y=y_1$ una particolare soluzione del sistema (7), e ponendo

$$\varphi = -\int\frac{ds}{\rho} \,,$$

la soluzione generale è data dalle formole

$$x = x_1 \pm \frac{c^2}{s}\cos\varphi \,, \quad y = y_1 \pm \frac{c^2}{s}\operatorname{sen}\varphi \,.$$

Finalmente conviene osservare che, fra le infinite coppie di funzioni soddisfacenti alle (3), la coppia (8) è proprio quella che rappresenta le coordinate del baricentro, perchè le espressioni (8) si riducono a zero per $s=s_0$. Si deduce infatti dalle (5) che i valori di ξ, η per $s=s_0$ sono

$$a + s_0 \lim \frac{x-x_0}{s-s_0} = a + \dot{a}s_0 \,, \quad b + s_0 \lim \frac{y-y_0}{s-s_0} = b + \dot{b}s_0 \,,$$

sono cioè, in virtù delle (7), uguali a zero. Ciò si poteva prevedere, perchè il punto M_0 è, fra quelli che soddisfano alle condizioni (3), l'unico che si trovi sulla tangente ad (N), in N_0. Si può inversamente fare a meno di ogni considerazione geometrica, e stabilire la proporzione (2) con metodo puramente analitico, osservando appunto che, per distinguere il baricentro fra gli infiniti punti che soddisfano alle (3), basta esprimere che ξ, η prendono, per $s=s_0$, il valore 0. In tal modo si ricava dalle (5)

$$0 = a + k_0\dot{a} \,, \quad 0 = b + k_0\dot{b} \,.$$

Dunque si ha

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{\dot{b}}{b} = -\frac{1}{k_0} \,,$$

e se in questa relazione, vera per ogni valore di s_0, si cambia s_0 in s, si ottiene precisamente la proporzione (2), grazie alla quale non possono aver luogo le relazioni (6) se non è k indipendente da s; ecc.

In conclusione possiamo dire che le coordinate di N sono obbligate soltanto a soddisfare alle condizioni (7), alle quali si può, osservando le (1), dar la forma seguente:

$$\frac{dsx}{ds} = \frac{sy}{\rho} - s \,, \quad \frac{dsy}{ds} = -\frac{sx}{\rho} \,. \tag{9}$$

Se, per esempio, si vuole che sia $x=0$, la prima uguaglianza (9) mostra che dev'essere $y=\rho$; poi la seconda, integrata, fornisce l'equazione intrinseca della clotoide:

$$\rho s = a^2 \,.$$

Dunque ogni arco di clotoide gode della notevole proprietà di avere per baricentro un centro di similitudine dei circoli osculatori nei punti estremi, e l'analisi precedente permette di aggiungere che non esiste altra curva piana, che abbia il baricentro di ogni suo arco in linea retta coi centri estremi di curvatura. In coordinate polari le (9) assumono la forma

$$\frac{1}{s}\frac{dsu}{ds} = -\cos\omega \,, \quad \omega' = -\frac{1}{\rho} + \frac{\operatorname{sen}\omega}{u} \,. \tag{10}$$

Se si vuole che la curva (N) sia una sviluppoide della (M) bisogna supporre ω costante. In questa ipotesi si deduce dalle (10) l'equazione

$$\rho = \frac{a^2}{s} - \frac{s}{2}\cot\omega ,$$

che rappresenta, per $\omega = 90^\circ$, una clotoide, e per $a = 0$ una spirale logaritmica. Si ottiene così una nota (*) costruzione del baricentro di un arco di spirale logaritmica. Quando invece si prescrive la forma di u, l'eliminazione di ω fra le relazioni (10) fornisce subito l'equazione intrinseca della curva:

$$\rho = u\,\frac{\sqrt{1-\left(\frac{1}{s}\frac{dsu}{ds}\right)^2}}{1-\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left(u\frac{dsu}{ds}\right)} . \tag{11}$$

Convenienti determinazioni della funzione u fanno coincidere questa equazione con qualsivoglia equazione intrinseca prestabilita, dimodochè le curve (N) si possono sempre considerare come traiettorie ortogonali di circonferenze descritte dai punti di (M) con raggio che varia da punto a punto secondo una data legge. In particolare, se le circonferenze son tutte uguali fra loro, se cioè u conserva un valore costante a, l'equazione (11) diventa

$$\rho = \frac{a}{s}\sqrt{s^2 - a^2} , \tag{12}$$

e rappresenta una curva notevole, le cui coordinate cartesiane estrinseche sono

$$x = a\int\frac{t\cos t\,dt}{\sqrt{1+t^2}} , \quad y = a\int\frac{t\,\mathrm{sen}\,t\,dt}{\sqrt{1+t^2}} .$$

Dato su questa curva un arco qualunque, si traccino le circonferenze che hanno i centri alla distanza a dagli estremi dell'arco e toccano le normali estreme nei centri di curvatura. Il baricentro dell'arco considerato è centro di similitudine delle due circonferenze così costruite.

Per ottenere l'equazione intrinseca della curva (N), corrispondente ad una data curva (M), osserviamo che la velocità assoluta del punto N è $\dot u$, e che gli angoli di contingenza delle due curve differiscono di $d\omega$, cioè si ha

$$\frac{ds_1}{ds} = \dot u , \quad \frac{ds_1}{\rho_1} - \frac{ds}{\rho} = d\omega .$$

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1883, p. 88.

Dunque, in virtù delle (10),

$$s_1 = -\int\frac{u}{s}\,ds , \quad \rho_1 = -\frac{u^2}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{s}\frac{dsu}{ds}\right)^2}} .$$

L'eliminazione di s fornisce, in ogni caso particolare, l'equazione intrinseca domandata. È così che si ottiene, per $u = a$, l'equazione

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1}} , \tag{13}$$

che rappresenta la curva (N) corrispondente alla (12). Dal paragone dell'equazione (13) con quella della trattrice si deduce immediatamente che la curva (13) si può far corrispondere punto a punto ad una trattrice in modo che due archi corrispondenti qualunque siano uguali fra loro ed il prodotto delle curvature in due punti corrispondenti sia costante. Ne segue che se la curva (13) rotola all'esterno d'una trattrice di parametro a, in modo che all'inizio del movimento l'origine degli archi coincida col punto di regresso della trattrice, il centro di curvatura della linea mobile, nel punto di contatto, descrive l'assintoto della curva fissa. Quando invece si mantiene fissa la curva (13), il centro di curvatura della trattrice rotolante descrive una sviluppante della curva (12).

Dalle condizioni (9) si deduce senza difficoltà un modo di eseguire meccanicamente la costruzione del baricentro d'un arco di curva. Se si pone

$$sx = ax_1 , \quad sy = ay_1 \tag{14}$$

e

$$s^2 = 2as_1 , \quad \rho s = a\rho_1 , \tag{15}$$

essendo a una costante, le relazioni (9) si possono scrivere così:

$$\frac{dx_1}{ds_1} = \frac{y_1}{\rho_1} - 1 , \quad \frac{dy_1}{ds_1} = -\frac{x_1}{\rho_1} . \tag{16}$$

Eliminando s fra le eguaglianze (15) si ottiene l'equazione intrinseca di una curva (M_1), tale che le funzioni x_1, y_1, definite dalle (14), rappresentano, in virtù delle (16), le coordinate d'un punto N_1, fisso nel piano, rispetto alla tangente ed alla normale a (M_1), in M_1. Supponendo che le curve (M) ed (M_1) siano messe a contatto in due punti corrispondenti, e chiamando C, C_1 i rispettivi centri di curvatura, la posizione di ogni punto N soddisfacente alle (9) si dedurrà da quella di un certo punto N_1 in modo semplicissimo. Osservando infatti che dalle (14) e dalle (15) si deduce

$$\frac{x_1}{x} = \frac{y_1}{y} = \frac{\rho_1}{\rho}$$

si vede subito che il punto N si trova all'intersezione della retta MN_1 con la parallela a C_1N_1 condotta da C. Ne segue che, se il piano della (M_1) subisce intorno ad M_1 una dilatazione o una contrazione, per la quale C_1 si trasferisce in C, per effetto della stessa deformazione il punto N_1 va a coincidere con N, il punto M_1' con M', e però il contatto fra le due curve, nei punti corrispondenti, persiste quando una di esse rotola sull'altra. Dunque, se la curva (M) è nell'origine degli archi messa a contatto, in un punto O_1 convenientemente scelto, con la corrispondente curva (M_1), e se questa rotola su (M) dilatandosi o contraendosi intorno al punto di contatto in modo che fra le due curve si conservi costantemente un contatto del secondo ordine, il punto O_1 è ad ogni istante il baricentro dell'arco OM, ed ogni altro punto rigidamente legato in principio alla (M_1), se prende parte al moto ed alla deformazione del piano di questa curva, descrive una delle curve (N) corrispondenti alla data (M). Per esempio, nel caso della clotoide, la curva (M_1) è un circolo, che deve, rotolando, dilatarsi in modo da osculare costantemente la curva fissa. Dunque il baricentro d'un arco di clotoide, con un estremo nel punto d'inflessione, appartiene alla circonferenza osculatrice nell'altro estremo. Così per qualunque curva data nel piano si può in modo cinematicamente intelligibile eseguire l'integrazione delle (9) ed in conseguenza costruire il baricentro d'un arco qualsiasi. Come per la clotoide occorre un circolo, per un circolo occorre una sviluppante di circolo, e più generalmente per una n^{ema} sviluppante occorre una $(2n+1)^{\text{ema}}$ sviluppante di circolo. Per lo stesso scopo ad una spirale logaritmica corrisponde una spirale logaritmica, ad un'epicicloide con due cuspidi una cicloide, ad una cicloide un'ipocicloide a quattro cuspidi, e più generalmente ad una linea cicloidale una linea analoga in modo che ad un vertice della linea fissa corrisponda un punto di regresso della rotolante.

Similmente, se i punti dello spazio si riferiscono alla tangente, alla binormale ed alla normale principale in un punto mobile M di una data linea, la velocità assoluta del punto (x, y, z) ha le componenti

$$\dot{x} = x' - \frac{z}{\rho} + 1 \ , \quad \dot{y} = y' - \frac{z}{r} \ , \quad \dot{z} = z' + \frac{x}{\rho} + \frac{y}{r} \, .$$

Le coordinate x, y, z del punto N, e quelle ξ, η, ζ del baricentro G dell'arco M_0M debbono soddisfare alle condizioni

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{z}}{z} \ , \quad \frac{\dot{\xi}}{\xi} = \frac{\dot{\eta}}{\eta} = \frac{\dot{\zeta}}{\zeta} = -\frac{1}{s - s_0} \, .$$

Ponendo poi

$$\frac{x - \xi}{x - x_0} = \frac{y - \eta}{y - y_0} = \frac{z - \zeta}{z - z_0} = -\frac{k}{s - s_0}$$

per esprimere che G appartiene alla retta N_0N, e derivando, si ottiene $k = s_0$ e si perviene alle relazioni

$$\frac{dsx}{ds} = \frac{sz}{\rho} - s \ , \quad \frac{dsy}{ds} = \frac{sz}{r} \ , \quad \frac{dsz}{ds} = -\frac{sx}{\rho} - \frac{sy}{r} \ , \tag{17}$$

che si possono, in coordinate polari, scrivere così:

$$\frac{1}{s}\frac{dsu}{ds} = -\cos\omega \, , \quad \omega' = -\frac{\cos\theta}{\rho} + \frac{\operatorname{sen}\omega}{u} \, , \quad \theta' = \frac{1}{r} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\rho}\cot\omega \, . \tag{18}$$

Basta porre uguali a zero la torsione $\frac{1}{r}$ e l'angolo θ, che la proiezione del raggio vettore sul piano normale fa con la normale principale, per ritrovare le formole (10).

L'integrazione delle (17) si effettua cinematicamente facendo rotolare sulla curva (M) un'altra curva (M_1), in modo che per una conveniente dilatazione della (M_1) intorno al centro istantaneo di rotazione le eliche circolari osculatrici in questo punto alle due curve coincidano costantemente. I punti trascinati nel moto e nella deformazione di (M_1) descrivono precisamente le traiettorie (N). Le equazioni intrinseche della (M_1) si deducono dalle relazioni

$$s^2 = 2as_1 \ , \quad \rho s = a\rho_1 \ , \quad rs = ar_1 \ , \tag{19}$$

grazie alle quali, dopo aver posto

$$\frac{x_1}{x} = \frac{y_1}{y} = \frac{z_1}{z} = \frac{s}{a} \ ,$$

le formole (17) si trasformano nelle condizioni necessarie e sufficienti perchè il punto (x_1, y_1, z_1) sia immobile nel piano della (M_1).

Cerchiamo se nello spazio esistono curve dotate di quella proprietà che nel piano caratterizza la clotoide, vediamo cioè se è possibile che la (N) sia una sviluppata della corrispondente curva (M). Quando si suppone $\omega = 90^\circ$, le (18) danno immediatamente

$$u = \frac{a^2}{s} \ , \quad \rho = u\cos\theta \ , \quad \theta = \int \frac{ds}{r} \, .$$

Dunque le curve per le quali sussiste fra le curvature e l'arco la relazione

$$\rho s = a^2 \cos \int \frac{ds}{r} \tag{20}$$

sono tali che il baricentro di ogni loro arco appartiene alla corda del corrispondente arco di una loro sviluppata. Si può anzi dire che il baricentro d'un arco è centro di similitudine delle sfere descritte dagli estremi dell'arco di sviluppata tangenzialmente alla curva che si considera. Del resto è facile dimostrare che fra l'arco e la flessione di (N) esiste la relazione $a^2\rho = s^3$, che nel piano caratterizza la sviluppata della clotoide. Dunque, se si deforma per semplice torsione la sviluppata d'una clotoide, la clotoide stessa si cambia in una delle curve (20), e continua a godere, ad esclusione di ogni altra linea dello spazio, della proprietà accennata. Si noti che le curve (M_1) relative alle (20) sono caratterizzate, in virtù di (19), dalla condizione

$$\rho = a \cos \int \frac{ds}{r} \, .$$

Esse sono dunque tracciate sopra una sfera di raggio a. Fra le curve (20) sono comprese le linee a torsione costante definite dall'equazione intrinseca

$$\rho = \frac{a^2}{s} \cos \frac{s}{b} \, ,$$

che per b crescente all'infinito tende a rappresentare una clotoide. Similmente, fra le curve a flessione costante è compresa una linea (20), definita dall'equazione $r^2 + s^2 = costante$. Se poi si vuol sapere quali fra le curve (20) sono eliche, basta supporre costante il rapporto di ρ ad r. La derivazione di (20) dà, in questa ipotesi,

$$\frac{1}{s} \frac{d}{ds} \sqrt{a^4 - \rho^2 s^2} = costante \, ;$$

poi integrando si ottiene, in particolare, l'equazione $\rho^2 + ks^2 = costante$, che rappresenta una linea cicloidale. Per tutte le eliche appartenenti alla famiglia (20) la linea (M_1) è un'elica sferica. Finalmente, se si vuol sapere per quali curve i punti M ed N appartengono simultaneamente ad un piano passante per l'asse centrale, basta supporre

$$\frac{x}{\rho} + \frac{y}{r} = 0 \tag{21}$$

nelle relazioni (17), che danno subito $sz = a^2$, e

$$\frac{dsx}{ds} = \frac{a^2}{\rho} - s \, , \quad \frac{dsy}{ds} = \frac{a^2}{r} \, . \tag{22}$$

L'eliminazione di x ed y fra queste relazioni e la (21) conduce alla condizione

$$\rho s = a^2 + a^2 \rho \frac{d}{ds} \left(\frac{\rho}{r} \int \frac{ds}{r} \right) \, . \tag{23}$$

Le corrispondenti curve (M_1) sono invece caratterizzate dalla condizione

$$\rho = a + a\rho \frac{d}{ds} \left(\frac{\rho}{r} \int \frac{ds}{r} \right) \, . \tag{24}$$

Se, per esempio, si vuole che la curva (M) sia un'elica, si ponga $r = -\rho \operatorname{tg} \varphi$, con φ costante. La condizione (23) diventa $\rho s \operatorname{sen}^2 \varphi = a^2$, e d'altra parte la relazione $z = \rho \operatorname{sen}^2 \varphi$ mostra che il punto N appartiene all'asse centrale. Dunque la curva che si ottiene applicando la clotoide, per semplice torsione, sopra un certo cilindro, è tale che il baricentro d'un arco qualunque è in linea retta con certi due punti degli assi centrali corrispondenti agli estremi dell'arco. Siccome poi l'integrazione delle (22) fornisce, in particolare, i valori

$$x = -\frac{1}{2} s \cos^2 \varphi \, , \quad y = -\frac{1}{2} s \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \, ,$$

si vede che per punto N sopra un dato asse centrale si può prendere il punto medio del segmento staccato sul detto asse dalla normale principale di (M), a partire da un piano fisso. Finalmente si deduce dalla (24) che la curva (M_1) è un'elica circolare. Quando questa curva rotola sulla (M), dilatandosi o contraendosi in modo da osculare costantemente la curva fissa, un suo punto è ad ogni istante il baricentro dell'arco di questa curva, che ha subìto il contatto della curva rotolante.

I risultati ottenuti precedentemente sussistono nell'ipotesi che lungo la curva (M) varii la densità; ma è ovvio che ad una data curva corrispondono curve (N) ed (M_1) diverse secondo il diverso modo di variare della densità. Limitiamoci, per semplicità, alle curve piane, e rappresentiamo con hds la massa accumulata sull'elemento ds. Le coordinate di N debbono soddisfare alle condizioni

$$\frac{d}{ds} \left(x \int_0^s hds \right) = \left(\frac{y}{\rho} - 1 \right) \int_0^s hds \, , \quad \frac{d}{ds} \left(y \int_0^s hds \right) = -\frac{x}{\rho} \int_0^s hds \, . \tag{25}$$

Queste sono sempre riducibili alla forma (16): basta porre

$$\frac{x_1}{x} = \frac{y_1}{y} = \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{ds_1}{ds} = \frac{1}{a} \int_0^s hds \, .$$

Per una conveniente distribuzione di massa ogni curva del piano acquista la proprietà caratteristica della clotoide, perchè ad ogni equazione intrinseca si può dar la forma

$$\rho\int hds = costante\,.$$

In particolare, se la densità è proporzionale alla curvatura, si ottiene $= ae^{\frac{s}{a}}$. La curva rappresentata da questa equazione è dunque tale che il baricentro di curvatura d'un arco qualunque è centro di similitudine dei circoli osculatori negli estremi dell'arco. Questa proprietà sussiste per qualunque curva se i baricentri si riferiscono ad una distribuzione di massa, fatta lungo la curva con densità proporzionale alla variazione della curvatura. In generale, per una data densità $h(s)$, le equazioni

$$\frac{\rho}{s}\int_0^s hds = costante\ ,\quad \rho = \frac{s}{a}\int_0^s hds - \frac{1}{a}\int_0^s hsds\ , \tag{26}$$

rappresentano rispettivamente le curve (M) alle quali corrisponde come curva (M_1) una sviluppante o una sviluppata delle stesse (M). Nel primo caso, e nell'ipotesi che la massa sia distribuita proporzionalmente alla curvatura, si ottiene successivamente

$$\frac{\rho}{s}\int\frac{ds}{\rho} = costante\ ,\quad \rho = a\left(\frac{s}{a}\right)^n ,$$

purchè n sia diverso da 1. Le linee che hanno la curvatura proporzionale ad una potenza dell'arco ammettono sviluppanti dotate di questa stessa proprietà, tranne la curva rappresentata dall'equazione intrinseca $a\rho = s^2$, che ha per sviluppante la curva $\rho = ae^{\frac{s}{a}}$ considerata precedentemente. Se C e D sono i punti che sulla sviluppata e sulla sviluppante della nuova curva corrispondono ad un dato punto M, la retta CD (o la perpendicolare abbassata da M su questa retta, secondo che n è pari o dispari) divide il raggio di curvatura della n^{ema} sviluppata nel rapporto di 1 ad n. Quando (C) e (D) rotolano sulla curva considerata (M), dilatandosi in modo da conservare con essa un contatto del secondo ordine, i punti che sulle due curve corrispondono al punto O, origine degli archi di (M), occupano ad ogni istante le posizioni del baricentro ordinario e del baricentro di curvatura dell'arco (OM).

Se si cerca di soddisfare alle (25) attribuendo speciali forme ad x, y, si ottengono varie costruzioni dei baricentri. Così, rappresentando con

a e b due costanti, con x_0 ed y_0 le coordinate del punto O, origine degli archi, e ponendo

$$x\int_0^s hds = u + ax_0 - by_0\ ,\quad y\int_0^s hds = v + bx_0 + ay_0\ ,$$

le funzioni u e v debbono soddisfare alle condizioni

$$u' = a + \frac{v}{\rho} - \int_0^s hds\ ,\quad v' = b - \frac{u}{\rho}\ ,$$

e ridursi a zero per $s = 0$. Se, per esempio, si considerano le curve rappresentate dalla prima equazione (26), si può soddisfare alle ultime condizioni prendendo $a = 0$, $u = 0$, $v = bs$, dimodochè si ha

$$x = -\frac{\rho y_0}{s}\ ,\quad y = \frac{\rho x_0}{s} + \rho\,.$$

Ne segue che, in una curva qualunque, il punto comune alle perpendicolari abbassate sulle rette OD, OM, dai punti M, C, è baricentro di una massa distribuita lungo l'arco OM con densità proporzionale alla variazione del prodotto dell'arco per la curvatura. Si ottiene così, come caso particolare, una nota (*) costruzione del baricentro di curvatura delle linee che hanno la curvatura proporzionale ad una potenza dell'arco.

Finalmente osserviamo che gli sviluppi precedenti facilitano lo studio e la costruzione dei baricentri delle aree piane. Si consideri, per esempio, una coppia di punti mobili, A e B. La tangente alla traiettoria del baricentro dell'area generata dal segmento di retta AB incontra AB in un punto M. Per applicare le formole precedentemente ottenute bisogna riferire i punti del piano alla tangente ed alla normale, in M, alla traiettoria (M). Sia Q il punto in cui la retta AB tocca il suo inviluppo, e P il punto medio di AB. Se l, p, q sono rispettivamente le lunghezze dei segmenti AB, PQ, MQ, si ha

$$q = p + \frac{l^2}{12p}\ ,$$

cioè il punto M si costruisce osservando che, se Q' è il coniugato armonico di Q, rispetto ad AB, il segmento MQ' è diviso nel rapporto

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1886, p. 517.

di 1 a 3 dal punto P. La lunghezza q è inoltre legata alla curvatura di (M) ed all'angolo ω di (M) con AB dalla relazione

$$\omega' = -\frac{1}{\rho} + \frac{\operatorname{sen} \omega}{q} .$$

Il baricentro dell'area limitata dagli archi A_0A, B_0B, e dalle rette A_0B_0, AB, coincide col baricentro dell'arco M_0M, nell'ipotesi che la densità della massa distribuita lungo (M) sia

$$h = \frac{pl}{q} \operatorname{sen} \omega .$$

Sopra la compatibilità o incompatibilità di più equazioni di primo grado fra più incognite.

1. In un'opera da me pubblicata in collaborazione col prof. G. Garbieri (*) ho già avuto occasione di mostrare i vantaggi, così scientifici come didattici, della nozione di *caratteristica di una matrice,* quadrata o rettangolare, di numeri dati, come quella che permette di enunciare in modo assai semplice i teoremi relativi alla dipendenza o indipendenza di più equazioni lineari omogenee ed al grado di multiplicità dei loro sistemi di soluzioni.

Dato infatti un sistema di m equazioni lineari omogenee

$$(1) \quad \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_1 + \dots + a_{2n} x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = 0 \end{cases}$$

fra le n incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$, se h è la caratteristica della matrice:

$$(2) \quad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}$$

cioè *il massimo ordine di determinanti minori diversi da zero contenuti in essa* si ha quanto segue:

(*) *Corso di Analisi algebrica.* Vol. I: Teorie introduttorie, p. 373 e seg.

1°) Delle m equazioni (1) soltanto h sono indipendenti e le altre $m - h$ sono una semplice conseguenza di esse e possono quindi trascurarsi.

2°) Le h equazioni indipendenti che equivalgono all'intero sistema (1) si potranno, in generale, scegliere fra le (1) in più modi diversi. A tale oggetto è necessario e sufficiente di scegliere fra le (1) h equazioni tali che la caratteristica della loro matrice sia eguale ad h.

3°) Per soddisfare poi alle h equazioni indipendenti, e quindi anche all'intero sistema (1), si potranno assegnare ad arbitrio i valori di $n - h$ incognite (che però non si possono sempre scegliere a piacere) dopodichè i valori delle h rimanenti incognite resteranno perfettamente determinati.

La semplicità di questi enunciati mi fece pensare, alquanto più tardi, che la nozione di caratteristica potesse anche applicarsi con eguale vantaggio all'enunciato delle condizioni per la *compatibilità* o *incompatibilità* di più equazioni lineari non omogenee con un numero qualunque di incognite, cioè per la possibilità o impossibilità di risolverle con valori *finiti* delle incognite. Nel fatto mi riuscì facile di stabilire il seguente teorema:

Dato un sistema qualunque di m *equazioni di* 1° *grado con* n *incognite*

$$(I) \quad \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = \alpha_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = \alpha_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = \alpha_n \end{cases}$$

affinchè esso sia compatibile con valori finiti delle incognite è necessario e sufficiente che le due matrici

$$(A) \quad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \qquad \text{e} \qquad (B) \quad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \alpha_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \alpha_n \end{matrix}$$

abbiano la stessa caratteristica.

Ho stimato far cosa grata ai lettori di questa *Rivista* comunicando loro questo teorema, che io ho pubblicato già da tre anni nel corso litografato delle mie lezioni universitarie (*), perchè la forma del suo

(*) *Lezioni di Algebra complementare date nella R. Università di Napoli* nell'anno accademico 1888-89, presso Vincenzo Cavaliere libraio nella R. Università. Vedi cap. III, § 6, p. 159 e seg.

enunciato mi sembra, anche dal punto di vista didattico, non privo d'importanza. In vista di ciò mi permetto di aggiungere qui la dimostrazione che io ne ho data nelle mie lezioni, togliendola quasi per intero dal corso già citato.

2. Il problema di ricercare se il sistema di equazioni lineari non omogenee (I) sia risolubile con valori finiti delle $x_1, x_2, \dots x_n$ equivale, come sappiamo, a quello di ricercare se il sistema omogeneo:

$$(\mathrm{I})' \left\{ \begin{array}{l} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1n} y_n + \alpha_1 y_{n+1} = 0 \\ a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{2n} y_n + \alpha_2 y_{n+1} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} y_1 + a_{m2} y_2 + \dots + a_{mn} y_n + \alpha_m y_{n+1} = 0 \end{array} \right.$$

sia risolubile con valori finiti delle $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$, dei quali l'ultimo y_{n+1} sia inoltre *diverso da zero*.

Si comincierà dunque, servendosi degli stessi criterii esposti nell'art. precedente per le equazioni (1), dal cancellare nel sistema (I)' quelle equazioni che possono ritenersi come conseguenza delle rimanenti. Se la matrice (B) ha per caratteristica h, il sistema (I)' si ridurrà a sole h equazioni che, senza nuocere alla generalità della questione, possiamo sempre supporre essere le prime h del sistema, cioè:

$$(\mathrm{I})'' \left\{ \begin{array}{l} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1n} y_n + \alpha_1 y_{n+1} = 0 \\ a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{2n} y_n + \alpha_1 y_{n+1} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{h1} y_1 + a_{h2} y_2 + \dots + a_{hn} y_n + \alpha_h y_{n+1} = 0 \end{array} \right.$$

e la caratteristica della matrice:

$$(\mathrm{B})' \left\{ \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \alpha_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \alpha_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hn} & \alpha_h \end{array} \right.$$

corrispondente a questo sistema sarà precisamente eguale ad h.

Supponendo ora, dapprima, che anche la matrice (A) abbia per caratteristica lo stesso numero h, è evidente che le h equazioni (I)'' si potranno sempre scegliere in modo che almeno uno dei determinanti di ordine h contenuti nella matrice parziale:

$$(\mathrm{A})' \left\{ \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hn} \end{array} \right.$$

sia diverso da zero. In tale supposto il sistema (I)'' sarà certamente risolubile con valori finiti delle $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$, l'ultimo dei quali diverso da zero. Sia infatti per esempio:

$$(\mathrm{C}) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1h} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2h} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hh} \end{vmatrix} \gtrless 0$$

Allora, scritte le (I)'' sotto la forma:

$$\begin{array}{l} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1h} y_h = -(a_{1,h+1} y_{h+1} + \dots + a_{1n} y_n + \alpha_1 y_{n+1}) \\ a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{2h} y_h = -(a_{2,h+1} y_{h+1} + \dots + a_{2n} y_n + \alpha_2 y_{n+1}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{h1} y_1 + a_{h2} y_2 + \dots + a_{hh} x_h = -(a_{h,h+1} y_{h+1} + \dots + a_{hn} y_n + \alpha_h y_{n+1}) \end{array}$$

è chiaro che si potranno assegnare ad arbitrio dei valori finiti quali si vogliano alle $y_{h+1}, \dots, y_n, y_{n+1}$, dopodichè le altre h incognite, dovendo soddisfare ad h equazioni di 1° grado col determinante (C) che è diverso da zero, saranno date da altrettanti valori finiti determinabili in un unico modo. Nella ipotesi fatta il sistema (I) sarà dunque compatibile con valori finiti delle incognite.

3. Se invece la matrice (A) avesse la sua caratteristica inferiore ad h, il sistema (I) sarebbe incompatibile. Supponiamo infatti, se è possibile, che, essendo nulli tutti i minori di ordine h contenuti in (A), e quindi a maggior ragione tutti quelli contenuti in (A)', si potessero ciononostante soddisfare le (I)'' con valori finiti delle $y_1, y_2, \dots y_{n+1}$, l'ultimo dei quali *diverso da zero*. Si avrebbe allora per questi valori

$$\begin{vmatrix} a_{1,i_1} & a_{1,i_2} & \dots & a_{1,i_{h+1}} & a_{11} y_1 + \dots + a_{1n} y_n + \alpha_1 y_{n+1} \\ a_{2,i_1} & a_{2,i_2} & \dots & a_{2,i_{h+1}} & a_{21} y_1 + \dots + a_{2n} y_n + \alpha_2 y_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{h,i_1} & a_{h,i_2} & \dots & a_{h,i_{h+1}} & a_{h1} y_1 + \dots + a_{hn} y_n + \alpha_h y_{n+1} \end{vmatrix} = 0$$

comunque si scelgano gli indici $i_1, i_2, \dots, i_{h-1}$ fra i numeri 1, 2, ..., n, poichè gli elementi dell'ultima colonna, che sono i primi membri delle (I)'' sono nulli per supposto. Ma, decomponendo il determinante del primo membro in tanti determinanti quanti sono i termini dei polinomî dell'ultima colonna, quest'equazione prende la forma:

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=n} y_\rho \begin{vmatrix} a_{1,i_1} & a_{1,i_2} & \dots & a_{1,i_{h-1}} & a_{1\rho} \\ a_{2,i_1} & a_{2,i_2} & \dots & a_{2,i_{h-1}} & a_{2\rho} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{h,i_1} & a_{h,i_2} & \dots & a_{h,i_{h-1}} & a_{h\rho} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,i_1} & a_{1,i_2} & \dots & a_{1,i_{h-1}} & \alpha_1 \\ a_{2,i_1} & a_{2,i_2} & \dots & a_{2,i_{h-1}} & \alpha_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{h,i_1} & a_{h,i_2} & \dots & a_{h,i_{h-1}} & \alpha_h \end{vmatrix} y_{n+1} = 0$$

Considerando ora che i determinanti sotto il segno Σ sono tutti compresi nella matrice (A)' e quindi nulli per supposto, e che y_{n+1} è per supposto diverso da zero, si vede che l'equazione si riduce ad

$$\begin{vmatrix} a_{1,i_1} & a_{1,i_2} & \dots & a_{1,i_{h-1}} & \alpha_1 \\ a_{2,i_1} & a_{2,i_2} & \dots & a_{2,i_{h-1}} & \alpha_2 \\ \cdot & \vdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{h,i_1} & a_{h,i_2} & \dots & a_{h,i_{h-1}} & \alpha_h \end{vmatrix} = 0$$

Poichè gli indici $i_1, i_2, \dots, i_{h-1}$ possono poi scegliersi a piacere, quest'equazione ci dice che nella matrice (B)' corrispondente al sistema (I)'' anche quei determinanti di ordine h nella cui composizione entra l'ultima colonna sono come gli altri eguali a zero. La matrice del sistema (I)'' avrebbe dunque la sua caratteristica inferiore ad h contro il supposto. Il teorema resta così dimostrato completamente.

Napoli, Gennaio 1892. ALFREDO CAPELLI.

Dimostrazione dell'impossibilità di segmenti infinitesimi costanti.

Si dice che una grandezza u è infinitesima rispetto alla grandezza v, se ogni multiplo di u, secondo un numero intero finito, è minore di v. L'esistenza o meno di grandezze infinitesime dipende dal significato che attribuiamo alla parola *grandezza*. Ed effettivamente si sono formate delle categorie di enti, sui quali si possono definire le relazioni e operazioni analoghe a quelle dell'algebra sui numeri, nelle quali categorie di enti si trovano degli infinitesimi. Così l'ordine di infinità d'una funzione può essere infinitesimo rispetto all'ordine di infinità d'un'altra. In un mio scritto (*) già feci vedere che nella stessa formula di Taylor i successivi termini si possono considerare a nostro arbitrio come infinitesimi variabili o costanti d'ordine diverso.

In tutti questi casi l'ente è determinato da una funzione reale di una variabile reale. Ma fra le grandezze comuni, p. e. fra i segmenti rettilinei, esistono degli infinitesimi?

(*) *Sulla formula di Taylor*, Atti R. Acc. Scienze di Torino, 22 novembre 1891.

Questa questione, dibattutasi fra i dott. VIVANTI e BETTAZZI sulla *Rivista di Matematica*, è assai interessante tanto più che negli ultimi tempi sull'ipotesi della loro esistenza si sono fatte teorie e stampati dei volumi. Ad essa rispose negativamente il CANTOR; ma la dimostrazione che questo illustre matematico ne diede è così concisa, che fu giudicata incompleta. Scopo della presente nota si è di sviluppare questa dimostrazione.

1. Su d'una retta si fissi un'origine o; i punti della retta da una stessa parte di o, p. e. a destra di o, saranno chiamati *punti della semiretta*, o più semplicemente P. Il punto o è un estremo della semiretta, ma non è un punto della classe P:

$o - \varepsilon$ P. « il punto o non è un P ».

2. Essendo p un punto della semiretta, con op intenderemo l'insieme dei punti compresi fra o e p. La classe op dicesi *segmento terminato*; o ne è l'*origine*, p il *termine*. Siccome tutti i segmenti che considereremo hanno la stessa origine, colle parole *il segmento avente per termine p* intenderemo il segmento op. Scriveremo S invece di *segmento terminato*:

$$p \,\varepsilon\, \mathrm{P} \,.\, \supset .\, op \,\varepsilon\, \mathrm{S}$$

« Se p è un punto della semiretta, op è un segmento terminato ».

3. Spesso indicheremo un segmento con una lettera sola u, v, ... Il termine del segmento u, la sua origine essendo o, è indicato con $\bar{o}u$, in virtù della convenzione sull'inversione delle funzioni (*Sul concetto di numero*, § 5, prop. 3; *Riv. di Mat.* I, p. 97).

$$u \,\varepsilon\, \mathrm{S} \,.\, \supset .\, \bar{o}u \,\varepsilon\, \mathrm{P}$$

« Se u è un segmento, il suo termine è un punto della semiretta ».

Si badi che un segmento op è una classe di punti; gli estremi o e p non appartengono alla classe op (*).

4. Se u è una classe di punti P, ou rappresenta (*Id.*, § 1, prop. 3; *Riv. di Mat.* I, p. 87) la classe dei segmenti che hanno per termini i punti di u. Come caso particolare, se u è un segmento, ou rappresenta

(*) È inutile l'osservare pel lettore intelligente che il non appartenere o e p alla classe op dipende dalla convenzione fatta di indicare con op l'insieme dei punti compresi fra o e p. Si avrebbe potuto fare la convenzione di indicare con op l'insieme del punto o, dei punti compresi fra o e p, e del punto p; ma le formule riuscirebbero inutilmente complicate.

la classe dei segmenti che hanno per termine qualche punto di u, cioè i segmenti minori di u:

$$u, v \,\varepsilon\, \mathrm{S} \,.\, \supset : v < u \,.=.\, u > v \,.=.\, v \,\varepsilon\, ou \,.=.\, \bar{o}v \,\varepsilon\, u$$

« Essendo u e v due segmenti, dire che v è minore di u, ossia che u è maggiore di v, equivale a dire che v è un segmento terminato ad un punto di u, ovvero che il termine di v è un punto di u ».

5. Se k è una classe di segmenti, e quindi una classe di classi di punti, allora $\cup' k$ rappresenta l'insieme dei punti ciascuno dei quali appartiene almeno ad un segmento della classe k (*Id.*, § 9, prop. 6; *Riv. di Mat.* I, p. 259). Quindi se u è una classe di punti, e quindi ou una classe di segmenti, $\cup' ou$ rappresenta l'insieme dei punti, ciascuno dei quali sta su qualche segmento ou, cioè ciascuno dei quali ha alla sua destra qualche punto della classe u.

6. I segmenti terminati si sanno sommare; e qui si suppongono note le proprietà della somma, che permettono di dedurre il teorema:

$$u, v \,\varepsilon\, \mathrm{S} \,.\, \supset .\, u + v = \bar{o}(ou + ov)$$

« Essendo u e v due segmenti terminati, il segmento $u+v$ è il luogo dei termini dei varii segmenti che si ottengono sommando un segmento qualunque terminato ad un punto di u con un segmento qualunque terminato ad un punto di v ».

7. Si ha:

$$u \,\varepsilon\, \mathrm{S} \,.\, \supset .\, u \,-\!\!= \Lambda \,.\, u \,-\!\!= \mathrm{P} \,.\, \cup' ou = u$$

« Essendo u un segmento terminato, esso:

1° Contiene effettivamente dei punti.

2° Non contiene tutti i punti della semiretta.

3° Ogni punto compreso fra o e un punto di u è pure un punto di u.

4° E viceversa: ogni punto di u è compreso fra o e qualche altro punto di u ».

8. Ora considereremo le classi di punti che hanno le quattro proprietà ora enunciate, cioè le classi u che contengono effettivamente dei punti, ma senza contenerli tutti; se un punto appartiene alla classe u, ogni punto alla sua sinistra appartiene pure alla classe u; e se un punto è un u, sonvi degli altri punti della classe u alla sua destra. Le classi di punti siffatte si diranno *segmenti*, e per brevità s:

$$u \,\varepsilon\, \mathrm{s} \,.=.\, u \,\varepsilon\, \mathrm{KP} \,.\, u \,-\!\!= \Lambda \,.\, u \,-\!\!= \mathrm{P} \,.\, \cup' ou = u \,.$$

Risulta dalle cose dette che ogni S è un s; la proposizione inversa, che ogni segmento sia limitato, costituisce il postulato di DEDEKIND (V. *Riv. di Mat.* I, p. 109, nota 3ª). Da questo postulato deriva, come è ben noto, e come del resto risulterà da quanto segue, l'impossibilità dell'infinitesimo costante. Quindi noi non ammetteremo nè negheremo questo postulato.

È chiaro che se k è una classe di S, tutti minori d'un segmento dato, la classe di punti indicata con $\cup' k$ è un segmento. Esso si potrebbe chiamare *il limite* superiore dei segmenti k.

9. La somma di due segmenti in generale si riconduce alla somma di segmenti terminati prendendo la proprietà 6 come definizione:

$$u, v \,\varepsilon\, \mathrm{s} \,.\, \supset .\, u + v = \bar{o}(ou + ov)$$

« Per somma dei segmenti u e v si intende il segmento luogo degli estremi di tutti i segmenti che si ottengono sommando due segmenti terminati l'uno ad un punto di u e l'altro ad un punto di v ».

10. Sapendo sommare due segmenti, terminati o no, si può definire il multiplo d'un segmento u secondo il numero intero e positivo n, indicato con nu. Ricordiamo che N sta per le parole « numero intero positivo »; quindi Nu rappresenta i multipli di u. La scrittura $\cup'$Nu rappresenta i punti che stanno su qualche segmento multiplo di u, cioè i termini dei segmenti minori di qualche multiplo di u.

Porremo $\qquad \infty u = \cup' \mathrm{N}u$,

cioè chiamiamo multiplo d'ordine infinito di u l'insieme dei punti che stanno sopra qualcuno dei segmenti u, $2u$, $3u$, ... o il limite superiore dei multipli di u. È chiaro che se non esistono segmenti infinitesimi, ∞u rappresenta l'intera semiretta P.

11. Dicesi che il segmento u è infinitesimo rispetto al segmento v, e scriveremo $u \,\varepsilon\, v/\infty$, se ogni multiplo di u è minore di v:

$$u, v \,\varepsilon\, \mathrm{S} \,.\, \supset .\, u \,\varepsilon\, v/\infty \,.=.\, \bar{o}v \,-\varepsilon\, \cup' \mathrm{N}u.$$

Risulta che, se u è infinitesimo rispetto v, la classe ∞u è un segmento contenuto in v. In conseguenza possiamo aggiungere ad ∞u il segmento u, ottenendo il segmento $(\infty + 1)u$, a cui aggiungendo u otteniamo $(\infty + 2)u$, ecc. Possiamo sommare ∞u con sè stesso, ottenendo così $2\infty u$, ed in generale possiamo formare tutti i multipli di ∞u; possiamo moltiplicare ∞u per ∞, ed ottenere $\infty^2 u$, e così via.

Ma tutti questi varii segmenti, che si ottengono moltiplicando u pei numeri transfiniti di Cantor sono eguali fra loro, come dicono le formule seguenti:

12. $u, v \varepsilon \mathrm{S} . u \varepsilon v/\infty . \supset . (\infty + 1) u = \infty u$

« Ogni segmento che può essere superato da un multiplo di u più una parte di u può essere superato da un multiplo di u, e viceversa ».

$$u, v \varepsilon \mathrm{S} . u \varepsilon v/\infty . \supset . 2\infty u = \infty u$$

« Ogni segmento che può essere superato dalla somma di due multipli di u può essere superato da un multiplo di u, e viceversa ».

E così via.

Risulta che il segmento ∞u quantunque compreso nel segmento v, non può essere terminato, perchè se ad un segmento terminato si aggiunge il segmento u, ovvero si raddoppia, si avrà un nuovo segmento maggiore del primo.

Ciascuno di questi risultati è in contraddizione col concetto comune di segmento. E dal fatto che il segmento infinitesimo non può essere reso finito mediante alcuna moltiplicazione attualmente infinita, per quanto potente essa sia, conchiudo col Cantor, che esso non può essere elemento di grandezze finite.

G. Peano.

RECENSIONE

Clément Thiry. — *Distances des points remarquables du triangle.*
(Extrait des *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, III série, t. XXI, 1891).

Dans ce petit travail, l'auteur se propose de démontrer une relation générale *donnant la distance d'un point quelconque* P *au point d'intersection* K_n *des droites qui, issues des sommets d'un triangle, partagent les côtés opposés dans le rapport des puissances* $n^{\text{ièmes}}$ *des côtés adjacents*, relation dont les formules classiques, ainsi que la plupart des formules relatives aux points de Brocard, de Lemoine, de Gergonne, etc., ne sont que des cas particuliers. L'auteur établit aussi une seconde relation, assez générale, conduisant à d'autres résultats plus ou moins remarquables.

La formule trouvée par M. Thiry, écrite d'une façon abrégée est la suivante:

$$\mathrm{PK}_n = \frac{\Sigma a^n \overline{\mathrm{PA}}^2}{\Sigma a^n} - \mathrm{E}_n \qquad (\mathrm{P})$$

E_n étant une constante indépendante de la position du point P. La marche suivie est tout élémentaire et l'auteur n'a fait que l'usage du *théorème de Stewart* (1) sous cette forme:

(1) Stewart a fait connaître, en 1763, le théorème suivant: *Si l'on partage la base d'un triangle en deux segments par une droite quelconque*

$$n\overline{\mathrm{AB}}^2 + m\overline{\mathrm{AC}}^2 = (m+n) . \overline{\mathrm{AM}}^2 + \frac{mn}{m+n} . \overline{\mathrm{BC}}^2.$$

Ensuite M. Thiry examine les différentes positions plus importantes que peuvent prendre les points P et K_n, ainsi que les valeurs de la constante E_n.

Par rapport à P, il suppose: 1° P est le centre O du cercle circonscrit; 2° P est le *orthocentre* (point de concours des hauteurs); 3° P est un des points ω ou ω' de Brocard (1).

Les positions remarquables du point K_n qu'il examine sont relativement à $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

De même, les valeurs de la constante E_n qu'il considère, sont les correspondants à $n = 0$, 1 et 2. Ces constantes sont respectivement

$$\mathrm{E}_0 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}\ , \quad \mathrm{E}_1 = 2\mathrm{R}r\ , \quad \mathrm{E}_2 = 3\mathrm{R}^2 \operatorname{tang}^2 \alpha \ (2).$$

Il combine chaque valeur de P avec toutes les trois valeurs de K_n, et il obtient donc douze relations représentatives des distances

OG (3), OI (4), OK (5), HG, HI, HK, ωG, ωI, ωK, GK, IK.

passant par le sommet, la somme des carrés des deux côtés multipliés respectivement par le segment non adjacent, est égale à la base multipliée par le carré de la droite augmenté du rectangle des deux segments.

M. Thiry a montré que cette proposition ignorée de la plupart des élèves des établissements d'instruction moyenne, est suffisamment importante pour ne pas être négligée dans les cours scientifiques des lycées.

En 1887 M. Thiry a inséré dans la *Revue d'instruction publique* (t. XXX, 5e livr.) un article sous le titre: *Sur le théorème de Stewart*, où il démontre ce théorème et il fait déjà des applications remarquables.

Il a publié aussi, en 1887, une brochure: *Le troisième livre de géométrie* où on trouve tout un chapitre sur le théorème du géomètre écossais. M. Longchamps, à propos de cette brochure, il dit: *C'est ainsi, pour citer un point qui nous a plus frappé, que tous les théorèmes relatifs au carré de la médiane, au carré d'un côté opposé à un angle droit, aigu ou obtus, ceux qui donnent la longueur de la bissectrice, etc., soit déduit du théorème de Stewart.* (*Journal de Longchamps*, 1887, p. 45-46).

En 1891, l'auteur a publié une autre brochure: *Applications remarquables du théorème de Stewart et théorie du barycentre*, qui est un des travaux des plus complets que nous connaissons sur la géométrie récente du triangle.

(1) Du nom du géomètre qui les a étudiés pour la première fois. Ils sont définis par les égalités d'angles

$$\omega\mathrm{AB} = \omega\mathrm{BC} = \omega\mathrm{CA}$$
$$\omega'\mathrm{AC} = \omega'\mathrm{CB} = \omega'\mathrm{BA}.$$

(2) Cet angle α est appelé *l'angle de Brocard;* il est donné par la relation

$$\operatorname{cotang} \alpha = \operatorname{cotang} \mathrm{A} + \operatorname{cotang} \mathrm{B} + \operatorname{cotang} \mathrm{C}.$$

(3) Centre de gravité de l'aire du triangle.
(4) Centre du cercle inscrit.
(5) *Point de Lemoine.*

Parmi ces formules nous devons remarquer les suivantes:

$$\overline{\mathrm{OK}}^2 = \mathrm{R}^2 (1 - 3 \operatorname{tang}^2 \alpha)$$
$$\overline{\omega\mathrm{K}}^2 = 4\mathrm{R}^2 \operatorname{sen}^2 \alpha - 3 \operatorname{tang}^2 \alpha$$
$$\overline{\omega\mathrm{O}}^2 = \mathrm{R}^2 (1 - 4 \operatorname{sen}^2 \alpha)$$
$$\overline{\omega\mathrm{I}}^2 = \frac{2\mathrm{R}r}{\Sigma a^2 b^2} [a^2 b (a - b) + b^2 c (b - c) + c^2 a (c - a)] \ (^1).$$

Comme conséquence encore des formules obtenues, il montre: 1° que la droite $\omega\ \omega'$ est perpendiculaire à OK en son milieu; 2° que

$$\overline{\omega\mathrm{O}}^2 + \overline{\omega\mathrm{K}}^2 = \overline{\mathrm{OK}}^2$$

et conséquemment, le cercle de diamètre OK passe par les points de Brocard (²).

En appliquant encore le théorème de Stewart, il obtient une formule (T) plus générale; mais moins élégante que la formule (P). Comme cas particuliers remarquables, il déduit: 1° les valeurs des distances

$$\mathrm{OG},\ \mathrm{OI},\ \mathrm{OK}\ \text{et}\ \mathrm{OK}_n,$$

2° l'égalité,
$$\mathrm{O}\omega = \mathrm{O}\omega'$$
formule trouvée par M. Catalan,

3° la distance du point O au point P de Gergonne (³).

Ces passages que nous nous bornons à signaler, suffisent pour donner à nos lecteurs une idée de la valeur de cette brochure.

Lisbonne, mars 1892. RODOLPHE GUIMARAES
Officier du Génie.

Questione VII.

Nelle tavole che seguono il libro *Le constructeur* di Reuleaux, pag. 757, trovasi la formula che dà la lunghezza dell'ellisse di semiassi a e b (correggendo un errore di stampa)

$$\mathrm{S} = \pi (a + b) \left(1 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^4}{64} + \frac{n^6}{256} + \ldots\right)$$

ove $n = \dfrac{a - b}{a + b}$.

Si desidera la dimostrazione della formula, e la legge con cui si formano i coefficienti. *Ing.* M. P.

(¹) Formule trouvée par M. Catalan (*Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, in-8°, t. XLIV, p. 19).

(²) C'est le *cercle de Brocard*.

(³) Il est à l'intersection des droites joignant les sommets du triangle aux points de contact des côtés opposés avec le cercle inscrit.

Ueber eine allgemeine Construction der Krümmungsmittelpunkte ebener Curven und eine neue Begründung der Fundamentalsätze der Flächentheorie.

(*Eine Anwendung der Methoden von Grassmann*).

Von R. MEHMKE in Darmstadt.

§ 1. — *Die Ableitungsflächen resp. Ableitungscurven von Punktfunctionen.*

Sei u eine veränderliche Zahlgrösse, deren Werth vermöge der Gleichung
$$u = f(x)$$
in eindeutiger Weise von der Lage des beweglichen Punktes x abhängt, oder kürzer gesprochen, es sei $u = f(x)$ eine eindeutige Function des Punktes x. Innerhalb eine bestimmten räumlichen Gebietes G möge diese Function stetig und nach allen Richtungen hin beliebig oft differentiirbar sein. Von einem beliebigen, in G befindlichen Punkte p aus trage man nach allen Richtungen die n-ten Wurzeln von den reciproken Werthen der in diesen Richtungen genommenen n-ten Ableitungen der Function $f(x)$ in einem beliebigen Masstabe als Strecken ab. *Die von den Endpunkten der abgetragenen Strecken erfüllte Fläche soll die zum Punkte p gehörige n-te Ableitungsfläche der Function f(x) genannt werden* (*). Es lässt sich beweisen, dass *diese Fläche von der n-ten Ordnung* ist.

Unter der nach irgend einer Richtung genommenen Ableitung einer Punktfunction $u = f(x)$ in einem Punkte p versteht man bekanntlich den Grenzwerth des Ausdruckes

$$\frac{f(p_1) - f(p)}{h} \quad \text{für} \quad h = 0\ ,$$

wenn p_1 den Punkt bezeichnet, der aus p durch eine Verschiebung von der Grösse h in der gegebenen Richtung erhalten wird. Sei a

---

(*) Der Leser wird vielleicht durch diese Definition an diejenige der Trägheitsellipsoide erinnert worden sein. Die Aehnlichkeit ist auch keine zufällige, vielmehr lassen sich die Trägheitsellipsoide auf verschiedene Weise als 2-te Ableitungsflächen gewisser Punktfunctionen darstellen. Hierauf und auf die Anwendbarkeit des Begriffes der Ableitungsflächen in der mathematischen Physik werde ich bei anderer Gelegenheit eingehen.

eine mitt pp_1 gleich gerichtete Strecke von der Länge 1. Wie alle in dieser Untersuchung vorkommenden Punkte mögen p und p_1 die Masse 1 besitzen. Dann ist

$$p_1 = p + h \, . \, a \, ,$$

folglich

$$\lim_{h=0} \frac{f(p_1) - f(p)}{h} = \lim_{h=0} \frac{f(p + h \, . \, a) - f(p)}{h} = \frac{df(p)}{dx} \, . \, a \text{ (*)}.$$

Für die n-te Ableitung der Function $f(x)$ nach der Richtung a im Punkte p erhält man daher den Ausdruck

$$\frac{d^n f(p)}{dx^n} \, . \, a^n$$

Bezeichnet man eine n-te Wurzel des reciproken Werthes dieser n-ten Ableitung mit k, so kommt

$$\frac{d^n f(p)}{dx^n} \, . \, a^n = \frac{1}{k^n}$$

oder

$$\frac{d^n f(p)}{dx^n} \, . \, (ka)^n = 1 \, .$$

Sei nun x der Punkt, der durch Abtragen der Strecke k vom Punkte p aus in der Richtung a sich ergiebt, also ein Punkt der zu p gehörigen n-ten Ableitungsfläche der Function $f(x)$, dann ist

$$x - p = ka \, .$$

Man erhält somit für die in Rede stehende n-te Ableitungsfläche die Gleichung

$$(1) \qquad \frac{d^n f(p)}{dx^n} \, . \, (x - p)^n = 1 \, ,$$

welche offenbar eine Fläche n-ter Ordnung darstellt.

Ist die Beweglichkeit des Punktes x auf eine Ebene beschränkt, so treten an Stelle der Ableitungsflächen natürlich Ableitungscurven, deren allgemeine Gleichung ebenfalls die Gleichung (1) ist.

(*) Vergl. Hermann Grassmann, *Ausdehnungslehre von 1862*, N. 435, S. 296. Die Schreibweise von Grassmann ist eigentlich

$$\frac{d}{dx} fp \, . \, a$$

und diejenige des Herausgebers dieser Zeitschrift (in seinem *Calcolo geometrico*, p. 151, Torino 1888)

$$\left(d \frac{a}{x}\right) f(p) \, ;$$

aus mehreren Gründen ziehe ich die oben angewendete Schreibweise vor.

§ 2. — *Eine Construction für die Krümmungsmittelpunkte ebener Curven.*

Sei

$$(2) \qquad f(x) - f(p) = 0$$

die Gleichung einer beliebigen ebenen Curve C. Da diese Gleichung für $x = p$ erfüllt ist, so liegt p auf C. Wir wollen hier voraussetzen, dass p kein mehrfacher Punkt jener Curve sei.

Es liegt die Vermuthung nahe, dass die zu p gehörigen Ableitungscurven der Function $f(x)$ zur Curve C in einer engen Beziehung stehen. Das ist in der That der Fall. Ich beweise zunächst, dass *die Ableitungscurve 1-ter Ordnung* K_1 *eine Gerade parallel mit der in* p *an* C *gelegten Tangente* ist.

Bedeuten x und x_1 irgend zwei Punkte der Geraden K_1, so hat man zufolge Gleichung (1)

$$\frac{df(p)}{dx}(x - p) = 1 \, , \quad \frac{df(p)}{dx}(x_1 - p) = 1 \, ,$$

woraus durch Subtraction hervorgeht

$$\frac{df(p)}{dx}(x_1 - x) = 0 \, .$$

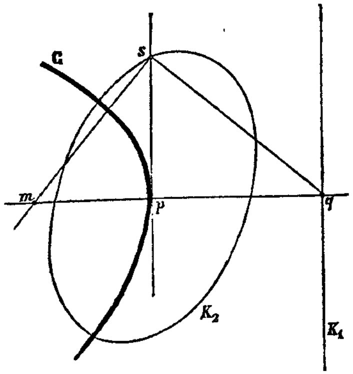
Bezeichnet dx nach Grösse und Richtung ein an p anstossendes Element der Curve C, so ist $(p + dx)$ ein zu p benachbarter Punkt von C, also vermöge Gleichung (2)

$$0 = f(p + dx) - f(p) = \frac{df(p)}{dx} \, . \, dx \, .$$

Hält man diese Gleichung mit der vorhergehenden zusammen, so erkennt man, dass die Strecken $(x_1 - x)$ und dx bis auf einen numerischen Factor einander gleich, d. h. parallel sein müssen, weil sonst $\frac{df(p)}{dx}$ identisch Null oder — entgegen der Voraussetzung — p ein mehrfacher Punkt von C wäre. Damit ist die obige Behauptung als richtig erwiesen.

Ich beweise ferner: « Ist s einer der beiden Schnittpunkte der « Tangente, die man in p an die gegebene (durch die Gleichung « $f(x) = const.$ dargestellte) Curve C legen kann, mit der zu p gehö- « rigen Ableitungscurve 2-ter Ordnung K_2 der Function $f(x)$, q da- « gegen der Schnittpunkt von K_1, (der zu p gehörigen Ableitungs- « curve 1-ter Ordnung von $f(x)$), mit der Normalen der Curve im « Punkte p, dann schneidet das in s auf sq errichtete Loth sm die

« Curvennormale qp in dem zur Stelle p gehörigen Krümmungsmit- « telpunkte m der gegebenen Curve » (*).



Nehmen wir zum Zwecke des Beweises an, ein Punkt x durchlaufe die Curve C so, dass der Endpunkt der Geschwindigkeit, welche dieser Punkt in p hat, mit s zusammenfällt, also

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=p} = s - p$$

ist (**). Da s auf der Ableitungscurve 2-ter Ordnung K_2 liegt, so hat man wegen Gleichung (1)

$$\frac{d^2f(p)}{dx^2}(s-p)^2 = 1$$

oder

(3) $$\frac{d^2f(p)}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 1 .$$

(*) Ich bemerke, dass diese Construction einer Erweiterung fähig ist, durch welche sie auch für jeden Zweig einer Curve, die p zu einem mehrfachen Punkte hat, Geltung erlangt. Es kommen dabei die Ableitungscurven höherer Ordnung zur Anwendung.

(**) Bekanntlich liefert, wenn x einen Punkt mit der Masse 1 und t die Zeit bezeichnet, $\frac{dx}{dt}$ die Geschwindigkeit, $\frac{d^2x}{dt^2}$ die Beschleunigung des Punktes nach Grösse und Richtung. Vergl. S. 136, Num. 71, 3 in dem angeführten Werke des Herrn PEANO.

Betrachtet man andererseits in Gleichung (2) x als Function von t, leitet diese Gleichung nach t ab und setzt schliesslich $x=p$, so kommt

(4) $$\frac{df(p)}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = 0 ,$$

und wenn man nochmals nach t ableitet:

$$\frac{d^2f(p)}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{df(p)}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} = 0 ,$$

Durch Verbindung der letzten Gleichung mit Gleichung (3) ergiebt sich

(5) $$\frac{df(p)}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} = -1 .$$

Es bezeichne c eine Strecke von der Länge 1, welche mit pq gleiche Richtung hat, und ν die Länge von pq, so dass

$$q - p = \nu \,.\, c$$

ist.

Weil der Punkt q sich auf K_1 befindet, so besteht die Gleichung

$$\frac{df(p)}{dx}(q-p) = 1 ,$$

woraus

$$\frac{df(p)}{dx}(\nu c) = 1$$

oder

(6) $$\frac{df(p)}{dx}\,.\,c = \frac{1}{\nu}$$

folgt. Man zerlege jetzt die Beschleunigung von x in eine tangentiale und eine normale Componente. Die erstere betrage das λ-fache der Geschwindigkeit, die zweite habe (in der Richtung von c gemessen) die Länge μ, so dass

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda\,.\,\frac{dx}{dt} + \mu\,.\,c$$

wird. Multiplicirt man letztere Gleichung mit $\frac{df(p)}{dx}$, dann ergiebt sich

$$\frac{df(p)}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda\,.\,\frac{df(p)}{dx}\frac{dx}{dt} + \mu\,.\,\frac{df(p)}{dx}c ,$$

oder vermöge der Gleichungen (4), (5) und (6):

$$-1 = \frac{\mu}{\nu} ,$$

d. h.

(7) $$\mu = -\nu .$$

Man sieht hieraus, dass die Normalbeschleunigung zur Strecke pq entgegengesetzt ist, oder gleiche Länge und Richtung mit qp hat. Da nun, wie bekannt, der Krümmungshalbmesser der Bahn eines Punktes gleich dem Quotienten aus dem Quadrat der Geschwindigkeit jenes Punktes und seiner Normalbeschleunigung an der betreffenden Stelle ist, auch der Krümmungsmittelpunkt m auf derjenigen Seite der Curve liegt, nach welcher die Normalbeschleunigung hin zeigt, so muss, damit m die richtige Lage habe,

$$pm = \frac{\overline{ps}^2}{qp}$$

sein, welcher Forderung durch die obige Construction genügt wird.

§ 3. — *Eine neue Begründung der Fundamentalsätze der Flächentheorie.*

Lassen wir die in § 2 stillschweigend gemachte Annahme, dass der veränderliche Punkt x in einer bestimmten Ebene liege, fallen, so stellt die Gleichung

$$(2) \qquad f(x) - f(p) = 0$$

nicht mehr eine ebene Curve, sondern eine durch den Punkt p gehende Fläche Φ vor. Von der zu p gehörigen Ableitungsfläche 1-ter Ordnung Ψ_1 der Function $f(x)$ lässt sich zeigen, dass sie eine Ebene parallel der in p an Φ gelegten Tangentialebene ist; der Beweis kann, wegen seiner Aehnlichkeit mit dem entsprechenden in § 2, hier übergangen werden.

Auf die Schnittcurve C der Fläche Φ mit einer beliebigen durch p gehenden Ebene E lässt sich ohneweiteres die in § 2 mitgetheilte Construction für den Krümmungsmittelpunkt anwenden, denn es ist klar, dass die dort benützte Gerade K_1 resp. die Curve 2-ter Ordnung K_2 jetzt in dem Schnitte der Ebene Ψ_1 resp. der zu p gehörigen Ableitungsfläche 2-ter Ordnung Ψ_2 der Function $f(x)$ mit E besteht. Ueberraschend leicht ergeben sich aus dieser Bemerkung der Satz von Meusnier, der Begriff der Indicatrix und somit auch das Vorhandensein zweier extremen Werthe für die Krümmungen der Normalschnitte, der Euler'sche Satz u. s. w.

Führt man zuerst durch eine und dieselbe Tangente der Fläche in p einen Normalschnitt und unter einem beliebigen Winkel α zu demselben einen schiefen Schnitt und nennt man, immer mit Bezug auf den Punkt p, ρ und ρ_α die Krümmungshalbmesser der Schnittcurven, q und q_α die Schnittpunkte ihrer Normalen mit der Ebene Ψ_1,

s den Schnittpunkt ihrer gemeinsamen Tangente mit der Fläche 2-ter Ordnung Ψ_2, dann ist nach § 2

$$\rho = \frac{\overline{ps}^2}{pq}\,, \quad \rho_\alpha = \frac{\overline{ps}^2}{pq_\alpha}\,.$$

Man hat ferner, weil pq mit der Flächennormalen in p zusammenfällt, also senkrecht auf Ψ_1 steht, und überdies Winkel qpq_α gleich α ist,

$$pq = pq_\alpha \cdot \cos\alpha\,,$$

und daher

$$\rho_\alpha = \rho \cdot \cos\alpha\,,$$

wie es der Satz von Meusnier verlangt.

Betrachtet man jetzt verschiedene Normalschnitte, so ist denselben pq gemeinsam, mithin verhalten sich ihre Krümmungshalbmesser wie die Quadrate der zugehörigen, durch die Fläche Ψ_2 gebildeten Tangentenabschnitte ps. Aber die Punkte s liegen auf der Curve 2-ter Ordnung, nach welcher die in p an Φ gelegte Tangentialebene die Fläche Ψ_2 schneidet. Damit ist der Begriff der Indicatrix gewonnen, aus dem nun die übrigen hier in Betracht kommenden Sätze, z. B. derjenige von Euler, in bekannter Weise hergeleitet werden können.

Die Untersuchung der Krümmungsverhältnisse einer Fläche $f(x) =$ *const.* in einem Knotenpunkte lässt sich auf derselben Grundlage durchführen; man hat hierbei die Ableitungsflächen höherer Ordnung der Punktfunction $f(x)$ nöthig.

Sui principî fondamentali della Geometria della retta

di G. Vailati *a Crema.*

Nel presente scritto espongo i risultati d'un tentativo di risolvere rispetto ai principî della Geometria della retta lo stesso problema che in un precedente articolo mi sono provato a risolvere rispetto alle proposizioni fondamentali del calcolo logico: il problema, cioè, di dedurre tali principî e proposizioni fondamentali da un minimo di convenzioni e postulati, riferentisi questi non al significato o ad alcuna particolare interpretazione dei segni delle operazioni e relazioni che si considerano, ma bensì puramente alle proprietà combinatorie delle relazioni e operazioni stesse.

Questo modo di trattare la questione sopra enunciata ci pone in grado di eliminare dalle asserzioni da cui partiamo tutto ciò che non sia assolutamente richiesto per la prova delle asserzioni a cui vogliamo arrivare, sceverando in quelle gli elementi essenziali che contribuiscono effettivamente a sostenere il complesso di deduzioni che su esse intendiamo basare da ciò che vi è accidentalmente implicato e vi aderisce solo in virtù dell'interpretazione che siamo indotti a dare ai segni delle operazioni e relazioni che formano oggetto delle nostre ricerche.

Ciò oltre al vantaggio di render necessario un minor numero di postulati primordiali e questi più semplici e generali di quello che avverrebbe se si procedesse diversamente, presenta altresì l'altro non meno importante dal punto di vista teorico che da quello didattico, di rendere egualmente applicabili ed utilizzabili i risultati che si ottengono, qualunque sia l'interpretazione che intendiamo dare al sistema di operazioni e relazioni che si considera, purchè essa sia compatibile col sussistere degli assiomi fondamentali assunti.

Così per es. nessuna delle nostre conclusioni dovrà subire una modificazione qualsiasi anche solo di forma se invece della relazione di posizione tra due punti a, b d'una retta volessimo col simbolo $a \mathrm{s} b$ intendere espressa la relazione di successione tra due istanti a, b, oppure invece, indicare che delle due quantità a, b la prima è maggiore della seconda. Infatti verificandosi in ciascuno di questi casi tutte le proprietà che ci hanno servito a caratterizzare la relazione s dovranno pure necessariamente verificarsi anche tutte le altre che la ammissione di quelle trae con sè.

Fu dalla lettura dell'opuscolo del prof. Peano sui *Principî di Geometria* (*) che mi venne suggerita l'idea del presente lavoro, al quale la serie di assiomi e teoremi che forma ivi materia dei primi nove paragrafi ha servito di base. Le seguenti ricerche possono anzi essere considerate come un complemento a quelle del dott. Peano, nel senso che in esse si ripiglia l'analisi dei fondamenti della Geometria della retta precisamente al punto al quale con quelle si arriva, e si prosegue ad effettuare rispetto agli undici assiomi ivi ottenuti lo stesso processo di riduzione che ivi fu applicato alle proposizioni che da quelli dipendono. Si giunge in tal modo a ricavare tali assiomi (o più precisamente sette fra essi, poichè dal mio punto di vista gli altri quattro, cioè i I, II, IV e VII, cessano di essere necessari) come conseguenze di tre soli postulati fondamentali che si possono quindi considerare come esprimenti le proprietà caratteristiche irreduttibili dello spazio a una dimensione.

Nell'enunciazione delle proposizioni e nel corso delle dimostrazioni mi sono servito dei noti simboli della logica deduttiva per l'intelligenza

(*) Le indicazioni che si rapportano alle corrispondenti proposizioni nell'esposizione del prof. Peano, figurano nelle pagine seguenti fra [ ].

dei quali rimando il lettore all'articolo dello stesso prof. Peano sulle *Formule di logica*.

Sia s (che leggeremo *segue a* ...) il segno d'una relazione tra gli enti a, b, c ...) d'un dato sistema tale che goda delle proprietà seguenti:

1) *Se si ha* $a \mathrm{s} b$ *non si abbia* $b \mathrm{s} a$, cioè, facendo uso dei noti simboli della logica algebrica:

$$a \mathrm{s} b \,.\, b \mathrm{s} a :=: \Lambda \quad (*).$$

2) *Se si ha contemporaneamente* $a \mathrm{s} b$ *e* $b \mathrm{s} c$ *si abbia anche* $a \mathrm{s} c$ cioè in simboli:

$$a \mathrm{s} b \,.\, b \mathrm{s} c : \supset : a \mathrm{s} c.$$

3) *Se* a, b *sono due enti distinti del sistema sussista l'una o l'altra delle due relazioni* $a \mathrm{s} b$ *e* $b \mathrm{s} a$; si abbia cioè in tal caso:

$$a \mathrm{s} b \,.\cup.\, b \mathrm{s} a.$$

Adottiamo la notazione $b \varepsilon ac$ per indicare che fra i tre enti a, b, c del sistema sussiste l'una o l'altra delle due seguenti coppie di relazioni s:

$$a \mathrm{s} b \quad \text{e} \quad b \mathrm{s} c \quad \text{o} \quad c \mathrm{s} b \quad \text{e} \quad b \mathrm{s} a$$

in altre parole poniamo:

$$b \varepsilon ac = (a \mathrm{s} b \,.\, b \mathrm{s} c) \cup (c \mathrm{s} b \,.\, b \mathrm{s} a) \qquad (\alpha)$$

Derivano da questa convenzione i seguenti due corollari:

Coroll. I. $\quad b \varepsilon ac = b \varepsilon ca \quad$ [Ass. V]

Ciò risulta immediatamente dalla simmetria della (α) rispetto ad a e c.

Coroll. II. *Qualunque siano gli enti* a, b *del sistema non si ha mai* $b \varepsilon aa$ [Ass. III].

Infatti per la (α): $b \varepsilon aa = (a \mathrm{s} b \,.\, b \mathrm{s} a) \cup (a \mathrm{s} b \,.\, b \mathrm{s} a)$ donde applicando la 1) si ottiene: $b \varepsilon aa \,.=.\, \Lambda$.

Basandoci ora sulle supposizioni e convenzioni sopra esposte passiamo a dimostrare i seguenti teoremi che riguardano relazioni fra tre o più enti del sistema:

Teor. I. $\quad b \varepsilon ac \,.\, c \varepsilon bd : \supset : c \varepsilon ad \quad$ [Ass. XI]

Infatti si ha:

$$b \varepsilon ac \,.\, c \varepsilon bd = [a \mathrm{s} b \,.\, b \mathrm{s} c : \cup : c \mathrm{s} b \,.\, b \mathrm{s} a][b \mathrm{s} c \,.\, c \mathrm{s} d : \cup : d \mathrm{s} c \,.\, c \mathrm{s} b]$$

(*) Da questa si deduce immediatamente un'altra proprietà, della quale però noi non facciamo uso, cioè: Qualunque sia l'ente a del sistema non si ha mai asa. Infatti per la (1): $asa \,.\, asa \,.=.\, \Lambda$; inoltre per un noto teorema di logica: $asa \,.\, asa = asa$, onde $asa \,.=.\, \Lambda$. Da queste proprietà si deduce: $b \varepsilon ab \,.=.\, \Lambda$ [Ass. VI].

eseguendo le operazioni indicate nel secondo membro di questa eguaglianza logica e sopprimendo i termini che per la (1) si riducono a Λ essa prende la forma:

$$(a s b . b s c . c s d) \cup (c s b . b s a . d s c)$$

dalla quale facendo uso della (2) si ottiene:

$$(a s c . c s d) \cup (d s c . c s a)$$

che equivale appunto a $c \,\varepsilon\, ad$.

Teor. II. $\quad b \,\varepsilon\, ac . c \,\varepsilon\, ad : \supset : b \,\varepsilon\, ad \quad$ [Ass. VIII]

Infatti abbiamo:

$$b \,\varepsilon\, ac . c \,\varepsilon\, ad = [a s b . b s c : \cup : c s b . b s a] [a s c . c s d : \cup : d s c . c s a]$$

eseguendo le operazioni indicate nel secondo membro esso diventa:

$$(asb.asc.bsc.csd) \cup (asb.bsc.dsc.csa) \cup (csb.bsa.asc.csd) \cup (csb.bsa.dsc.csa)$$

dalla quale applicando la (2) a ciascuno dei termini e sopprimendo quelli che per la (1) si riducono a Λ si deduce:

$$(a s b . a s c . b s d) \cup (d s b . b s a . c s a)$$

da quest'ultima ora facendo uso d'un noto teorema (*) della logica algebrica si deduce:

$$a s b . b s d \cup d s b . b s a$$

cioè appunto: $\quad b \,\varepsilon\, ad.$

Teor. III. $\quad b \,\varepsilon\, ac . b \,\varepsilon\, ad . b \,\varepsilon\, cd : = : \Lambda.$

Sostituiamo infatti a $b \,\varepsilon\, ac$, $b \,\varepsilon\, ad$, $b \,\varepsilon\, cd$ le espressioni loro equivalenti ed eseguiamo il prodotto logico indicato: otterremo così un'espressione composta di 8 termini separati da segni $\cup$ e potremo constatare che ciascuno di questi termini in virtù della (1) si riduce a Λ, onde anche l'espressione data si ridurrà a Λ.

Teor. IV (**). *Se i tre enti a, b, c sono distinti tra loro sussiste l'una o l'altra delle tre relazioni:* $c \,\varepsilon\, ab$, $b \,\varepsilon\, ac$, $a \,\varepsilon\, bc$; si ha cioè in tal caso: $\quad c \,\varepsilon\, ab .\cup. b \,\varepsilon\, ac .\cup. a \,\varepsilon\, bc.$

Infatti avendosi contemporaneamente che a è distinto da b, b da c, e a da c dovrà in virtù della (3) sussistere la proposizione:

$$(a s b \cup b s a)(a s c \cup c s a)(b s c \cup c s b)$$

(*) Il teorema a cui si allude è il seguente: $AH \cup BK \ldots : \supset : A \cup B \ldots$ esso si dimostra facilmente dalle proposizioni 3 § I e 13 § III delle *Formule di logica* del prof. Peano.

(**) Si noti che solo con questo teorema si comincia a far uso della (3), i precedenti sussistono indipendentemente dalla stessa.

cioè eseguendo le operazioni indicate ed omettendo i termini che per le (1) si riducono a Λ:

$$(asb . bsc . asc) \cup (asb . csb . asc) \cup (asb . csb . csa) \cup (bsa . bsc . asc) \cup (bsa . bsc . csa) \cup (bsa . csb . csa)$$

facendo ora uso del teorema di logica già citato nel Teor. II si ottiene da questa espressione la seguente:

$$(asb.bsc) \cup (csb.asc) \cup (asb.csa) \cup (bsa.asc) \cup (bsc.csa) \cup (csb.bsa) \text{ cioè:}$$

$$[(asb.bsc) \cup (csb.bsa)] \cup [(asc.csb) \cup (bsc.csa)] \cup [(bsa.asc) \cup (csa.asb)]$$

che equivale appunto a

$$b \,\varepsilon\, ac \cup c \,\varepsilon\, ab \cup a \,\varepsilon\, bc.$$

Teor. V. *Se c e d sono distinti:*

$b \,\varepsilon\, ac . b \,\varepsilon\, ad : \supset : d \,\varepsilon\, bc \cup c \,\varepsilon\, bd. \quad$ [Ass. X]

Infatti se si ha $b \,\varepsilon\, ac$ e $b \,\varepsilon\, ad$ pel Teor. III non si avrà $b \,\varepsilon\, cd$ onde pel teorema precedente dovrà sussistere l'una o l'altra delle due relazioni $d \,\varepsilon\, bc$ e $c \,\varepsilon\, bd$ come si voleva dimostrare.

Teor. VI. *Se b e c sono distinti*

$b,\ c \,\varepsilon\, ad . \supset . b \,\varepsilon\, ac . \cup . b \,\varepsilon\, cd. \quad$ [Ass. IX]

E invero sussistendo le due relazioni $b \,\varepsilon\, ad$ e $c \,\varepsilon\, ad$ e avendosi contemporaneamente che b e c sono distinti, avremo per la (3):

$$(bsc \cup csb) [(asc . csd) \cup (dsc . csa)] [(asb . bsd) \cup (dsb . bsa)] ;$$

eseguendo ora la moltiplicazione logica indicata tra le due espressioni che rappresentando rispettivamente $b \,\varepsilon\, ad$ e $c \,\varepsilon\, da$ e sopprimendo nel risultato i termini che, applicando prima la (2) e poi la (1), si riducono a Λ, dedurremo dalla formola suddetta la seguente:

$$(bsc \cup csb) [(asb . bsd . asc . csd) \cup (dsb . bsa . dsc . csa)]$$

cioè eseguendo le operazioni indicate

$$(bsc.asb.bsd.asc.csd) \cup (csb.asb.bsd.asc.csd) \cup (bsc.dsb.bsa.dsc.csa) \cup (csb.dsb.bsa.dsc.csa)$$

dalla quale applicando il teorema di logica già più volte citato otterremo:

$$(bsc . asb) \cup (csb . bsd) \cup (bsc . dsb) \cup (csb . bsa)$$

che equivale a $\quad b \,\varepsilon\, ac . \cup . b \,\varepsilon\, cd.$

Crema, Marzo 1892.

Sopra la raccolta di formule di Matematica.

Sarebbe cosa della più grande utilità il pubblicare delle raccolte di tutti i teoremi ora noti riferentisi a dati rami delle scienze matematiche, sicchè lo studioso non abbia che a confrontare siffatta raccolta onde sapere quanto fu fatto sopra un dato punto, e se una sua ricerca sia nuova ovvero no.

Una siffatta raccolta, difficilissima e lunga col linguaggio comune, è notevolmente facilitata servendoci delle notazioni della logica matematica; e la raccolta dei teoremi su un dato soggetto diventa forse meno lunga della sua bibliografia.

Le tavole che seguono contengono un tentativo di questa raccolta.

La parte I contiene i teoremi, le identità, ecc., riferentisi alle operazioni sui numeri reali.

La parte II contiene gli elementi della teoria dei numeri.

Sono sommariamente ricordate le notazioni usate, il cui preciso significato è spiegato in alcuni articoli nel volume I della *Rivista*.

Queste tavole sono, per ora, delle prove di stampa. La numerazione delle proposizioni e la divisione in § è provvisoria.

Noi facciamo caldo appello ai lettori della *Rivista* affinchè esaminino queste formule, e comunichino alla *Rivista* tutte quelle che essi conoscono e non trovano comprese nel formulario; come pure tutte quelle correzioni ed osservazioni che del caso.

In seguito queste formule saranno stampate separatamente. Gli abbuonati della *Rivista* le riceveranno gratuitamente.

Saremo poi gratissimi ai lettori che ci vorranno aiutare in questo lavoro, raccogliendo le proposizioni (con o senza dimostrazioni) di altri punti della matematica.

Quanto precede fu pubblicato in un supplemento unito al fascicolo di Marzo della *Rivista*.

Nel breve periodo di tempo trascorso, già si potè, coll'aiuto di parecchi lettori, completare la raccolta. Trovansi, come supplemento al presente fascicolo, le prove di stampa del primo foglio della Raccolta di formule.

La parte III si riferisce ai massimi e minimi numeri d'una data classe, ai limiti superiori ed inferiori, alla classe derivata (secondo il CANTOR) d'una classe data, e altre classi che dipendono da una data classe di numeri.

La parte IV contiene (§ 1) la teoria generale delle corrispondenze o funzioni, (§ 2) le funzioni ripetute, (§ 3) l'inversione delle funzioni, (§ 4) le proprietà delle classi aventi la stessa potenza (*puissance*, Mächtigkeit). Il § 5 si riferisce alle funzioni dei numeri interi, e contiene le formule sui sommatorii e sui prodotti.

La parte V si riferisce ai limiti delle funzioni. Essendo la definizione del limite qui usata ma un po' diversa dalla comune, si vegga, per maggior chiarezza, l'articolo che segue « Sulla definizione del limite d'una funzione ».

Già furono pubblicate molte raccolte di formule con scopi differenti. Merita speciale menzione quella avente per titolo:

Sammlung von Formeln der reinen und angewandten Mathematik, von dr. W. LASKA. Braunschweig, 1888,

che ci fu utile nella presente compilazione. Però questa raccolta è lungi dall'essere completa nelle sue singole parti (e del resto ciò non era nelle intenzioni dell'autore). Inoltre essa contiene troppo numerosi errori materiali (veggasi ad es. la formula 15, A del § 8, il § 5, ecc.). E parecchie proposizioni sono incompletamente, e quindi inesattamente enunciate (veggasi ad es. § 3, prop. 12 e 13, corrispondente alle V, § 3, P. 1, 2 della nostra raccolta).

Certo, la presente raccolta non potrà essere immune da errori materiali, da omissioni e da inesattezze; ma a questi inconvenienti si rimedierà con apposite correzioni, a pubblicarsi nella *Rivista*, man mano che si riconosceranno.

LA REDAZIONE.

Sulla definizione del limite d'una funzione.

Il limite della funzione fx dipende dalla variabile indipendente x, dalla classe di valori u che essa può assumere, e dal valore, finito od infinito, a, cui x, variando si avvicina.

Basterà considerare il limite $f(x)$, per $x = \infty$, potendosi il limite di $f(x)$, per $x = a$, colla sostituzione $x = a + \frac{1}{x'}$, ridursi al caso in cui x' tende ad ∞.

La classe u deve avere valori comunque grandi, onde il limite superiore degli u è infinito: $l'u = \infty$.

La definizione di limite che attualmente trovasi in tutti i buoni trattati, e che vien attribuita al WEIERSTRASS (V. STOLZ, *Allgemeine Arithmetik*, I, p. 156), è la seguente:

A] Essendo u una classe di numeri reali, il cui limite superiore è ∞, f il segno d'una funzione reale definita per tutti i valori della classe u, ed y una quantità determinata e finita, allora diremo che $f(x)$, quando x, assumendo i valori della classe u, tende ad ∞, ha per limite y, e scriveremo $y = \lim_{x,\, u,\, \infty} fx$, quando, comunque si prenda la quantità positiva h (arbitrariamente piccola), si può determinare un numero a, in modo che, per ogni valore di x nella classe u, maggiori di a, fx differisca da y d'una quantità minore, in valor assoluto, di h ».

In segni essa è:

$$u \,\varepsilon\, \mathrm{Kq} \,.\, \mathrm{l}'u = \infty \,.\, f \,\varepsilon\, \mathrm{q}|u \,.\, y \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, \supset :: y = \lim_{x,\, u,\, \infty} fx \,. = \therefore h \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, \supset_h :$$
$$a \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, f(u \cap (a + \mathrm{Q})) \supset (y - h + \mathrm{Q}) \cap (y + h - \mathrm{Q}) \,.\, -=_a \Lambda$$

Alcuna volta si esprime più concisamente, ma meno chiaramente, questa definizione, a questo modo: Dicesi che $f(x)$, per $x = \infty$, ha per limite y, se la differenza $f(x) - y$, col crescere di x, può diventare, *e conservarsi*, minore d'una quantità piccola ad arbitrio.

In modo analogo si definisce quand'è che $f(x)$ ha per limite il $+\infty$, o il $-\infty$.

Ma si può alquanto diversamente definire il limite, sopprimendo, nell'ultima definizione, l'inciso *e conservarsi*. Quest'altra definizione, sviluppata, è la seguente:

B] Avendo u, f ed y lo stesso significato, dire che y è un limite di $f(x)$, ossia un valore limite di fx, significa dire che, comunque si prendano la quantità positiva h (arbitrariamente piccola), e la quantità a (arbitrariamente grande), la funzione $f(x)$, assumendo x valori, nella classe u, maggiori di a, assume sempre valori la cui differenza da y è in valor assoluto minore di h.

Questa definizione, in simboli, è la P. 1 del § 1 della parte V della *Raccolta di formule*.

Le definizioni analoghe pei limiti $+\infty$ e $-\infty$ costituiscono le proposizioni 2 e 3 dello stesso §.

Le due definizioni A e B sono simili, come si vede, perchè constano delle stesse parole diversamente disposte, ma non sono identiche.

La loro analogia sta in questo che se $f(x)$ ha un limite finito od infinito, secondo la definizione A, esso è pure il limite secondo la definizione B. Viceversa, se il limite, secondo la definizione B (che in generale è una classe), si riduce ad un sol individuo, esso è il limite secondo la definizione A.

La loro differenza sta in questo, che $f(x)$ può non avere limite, secondo la A; mentrechè esso ha sempre un limite secondo la B; e questo limite è una classe di valori, sempre esistente (V. la prop. 4). Questa classe ha sempre il massimo ed il minimo (V, § 2, P. 5), che furono considerati da P. DU BOIS-REYMOND col nome di *Unbestimmtheitsgrenzen*, e, in casi particolari, chiamati dal DINI *estremi oscillatorii*.

L'esistenza in ogni caso, del limite, secondo la definizione B, ci fa propendere per l'adozione della definizione B invece della A. Quindi, intendendo con $\lim fx$, ciò che risulta dalla definizione B, cioè la V, § 1, P. 1, la scrittura « $\lim fx \,\varepsilon\, \mathrm{q}$ » significa « fx ha un limite unico e finito », ovvero « la $f(x)$ ha un limite determinato e finito, secondo la A ». E la proposizione $\lim fx \,\varepsilon\, \mathrm{q} \cup \iota\infty \cup \iota -\infty$ significa « $f(x)$ ha un limite determinato e finito, o l'infinito positivo, o l'infinito negativo ».

Adottando la definizione B, parecchie proposizioni si enunciano più semplicemente. Così si ha:

5. Avendo u ed f il solito significato, se m è un numero reale, il limite di fx, quando x, assumendo tutti i valori della classe u, tende ad ∞, coincide col limite di fx, quando x, assumendo i soli valori della classe u che sono maggiori di m, tende all'∞.

6. Siano u e v delle classi di numeri, la prima contenuta nella seconda, e la prima (e quindi anche la seconda) illimitata superiormente. Allora il limite di fx, quando x tende all'∞, assumendo i valori del sistema u, è contenuto nel limite di fx, quando x assume tutti i valori della classe v.

7. Quindi, se fx, quando x assume i valori della classe v, ha un limite determinato, finito o infinito, assumendo x i valori del sistema u, fx ha lo stesso limite.

§ 2, P. 14. Il limite d'una somma è contenuto nella somma dei limiti.

P. 15. Ma se i termini della somma hanno limiti determinati e finiti, allora il limite della somma vale la somma dei limiti.

19. Se fx tende a 0, e l'∞ non è uno dei valori limiti del modulo di gx, allora il prodotto $fx \times gx$ ha per limite zero.

Per vedere la semplificazione degli enunciati recata dalla definizione B, basta enunciare *completamente* le proposizioni precedenti servendoci della definizione A.

Secondo la B si dovrà dunque dire:

che $\lim_{x,\, \mathrm{q},\, \infty} \operatorname{sen} x$, cioè il limiite di $\operatorname{sen} x$, ove x, assumendo tutti i valori reali, tende all'∞, è l'intervallo da -1 a $+1$, compresi gli estremi;

che $\lim (x \operatorname{sen} x)$ è costituito dai numeri reali, dal $+\infty$ e dal $-\infty$;

che la somma dei primi n termini della serie

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

ha per limite il sistema dei due numeri 0 ed 1;

e quella della serie

$$\frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \ldots$$

ha per limite il sistema dei due numeri $\log 2$ e $1 + \log 2$.

G. PEANO.

RECENSIONE

ALBINO NAGY, *Lo stato attuale ed i progressi della Logica*. — Roma, 1891, pag. 21.

Il dott. A. Nagy, già favorevolmente noto per i suoi lavori sulla logica matematica, così incomincia il suo interessante scritto:

« Col nome di *logica matematica* si designa una speciale tendenza della scienza predetta, che accenna sensibilmente a diffondersi e rafforzarsi, oltre che nell'Inghilterra e negli Stati Uniti, ove ebbe origine, anche nel continente..... Ma questo movimento non si è ancora sufficientemente allargato ».

L'A. ne studia le cause, e annovera « la normale difficoltà inerente alla novità stessa della cosa », « il fatto che la logica in Italia non si coltiva come converrebbe » e « la diffidenza con la quale molti filosofi hanno accolto questa dottrina ». L'A. fa rapidamente la storia, da Leibniz ai giorni nostri, dei sostenitori e degli oppositori di queste teorie; e dice: « si era restii ad accettare subito delle dottrine svolte in sembianze matematiche, ... e ciò sia perchè, confessiamolo francamente, non le si comprendevano, sia perchè apparivano in opposizione ... colla dominante logica tradizionale ». Egli così crede che la matematica è destinata a diventare una necessità scientifica per i filosofi, almeno per i logici, come lo è attualmente per i fisici, per gli astronomi, ecc.

La seconda parte del lavoro, che è tratta da una conferenza tenuta dall'A. all'Università di Roma, si riferisce alla logica generale, ed ai diversi punti di vista sotto cui si può riguardare, ed al contatto che ha la logica colla psicologia, colla metafisica, e colla scienza del linguaggio.

L'ultima parte si riferisce specialmente alla logica matematica. « Ricordando gli enormi progressi fatti dalla matematica coll'introduzione dei segni algebrici, della chimica con quelli delle formole letterali, domandiamo: può l'espressione delle relazioni logiche essere indipendente dal linguaggio, essere diretta, immediata?... E l'aver realizzato questo simbolismo ideale, e, così, aver sciolta la logica dalla suddetta restrizione linguistica, è il primo merito della logica matematica ». L'A. conclude che « all'infuori della logica matematica verun progresso reale fu fatto » nella logica generale.

L'A. annuncia prossima la pubblicazione di un suo libro, *Principii di logica*, esposti secondo le dottrine moderne; e noi aspettiamo questo libro, certi che esso farà fare un notevole progresso alla Logica, di cui si occupa specialmente l'A., e che sarà pure utile agli studiosi di matematica.

(P.)

Soluzione della questione VII.

(Estratto da una lettera del prof. LAMPE al Direttore).

La question VII, page 64 du numéro de Mars, relative à la longueur de l'arc de l'ellipse se trouve résolue par la formule

$$(1) \qquad (1-\sin^2\alpha\sin^2x)^n = \cos^{4n}\frac{\alpha}{2}\left\{A_0+2\,\Sigma\, A_k\cos 2\,kx\right\},$$

où l'on a mis

$$A_k = \tan g^{2k}\frac{\alpha}{2}\left\{\binom{n}{k}+\binom{n}{1}\binom{n}{k+1}\tan g^4\frac{\alpha}{2}+\binom{n}{2}\binom{n}{k+2}\tan g^8\frac{\alpha}{2}+\ldots\right\}$$

(Voir GAUSS, *Disquisitiones generales circa seriem infinitam*, Werke, t. III, p. 128; LAPLACE, *Mécanique céleste*, t. I, livre II, n° 49). Dans sa *Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunctionen*, Berlin 1864, M. SCHELLBACH s'en est servi pour calculer la valeur numérique d'une intégrale elliptique de première ou de seconde espèce (§ 38, p. 55).

On a évidemment

$$(2) \qquad \int_0^x (1-\sin^2\alpha\sin^2x)^n dx = \cos^{4n}\frac{\alpha}{2}\left\{A_0x+\Sigma\frac{1}{k}A_k\sin 2kx\right\}.$$

Pour le cas de $n=\frac{1}{2}$, $\sin^2\alpha=\frac{a^2-b^2}{a^2}$ (d'où il suit $\cos\alpha=\frac{b}{a}$, $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{a+b}{2a}$, $\tan g^2\frac{\alpha}{2}=\frac{a-b}{a+b}=m$), on en tire

$$(3) \qquad 4a\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(1-\sin^2\alpha\sin^2x)^{\frac{1}{2}}dx = 4a\cos^2\frac{\alpha}{2}\,.\,A_0\,.\,\frac{\pi}{2}$$
$$=(a+b)\pi\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2m^2+\left(\frac{1\,.\,1}{2\,.\,4}\right)^2m^4+\left(\frac{1\,.\,1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2m^6+\left(\frac{1\,.\,1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}\right)^2m^8+\ldots\right\},$$

ou bien la formule de M. Reuleaux.

C'est la formule (2) que je donne toujours dans mes leçons de calcul intégral parce qu'elle converge beaucoup plus rapidement que les formules des Traités élémentaires de calcul intégral et que son développement ne demande pas plus de temps. J'y ai insisté dans une communication faite en 1888 à la Société de Physique de Berlin que je vous envoie en même temps et dont l'analyse a été faite dans le « Jahrbuch über die Fortschritte der Math. », t. XX (1888), p. 940. J'y ai donné le peu de calcul qu'il faut faire et j'ai aussi signalé (p. 46) un travail de M. Faà de Bruno où il a développé l'intégrale complète de première espèce par la série (2). Je n'ai pas comparé les autres Traités des fonctions elliptiques pour constater lesquels de ces traités pourraient avoir donné explicitement la formule (2).

Berlin, Avril 1892. E. LAMPE.

Soluzione della questione VII.

La formola domandata è:

$$S=\pi(a+b)\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 n^2+\left(\frac{1}{2.4}\right)^2 n^4+\left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 n^6+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\right)^2 n^8+\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}\right)^2 n^{10}+\dots\right]$$

dove S è la lunghezza della ellisse di semiassi di a e b, ed $n=\frac{a-b}{a+b}$.

Eccone una dimostrazione. È noto che:

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 t+b^2\cos^2 t}\;dt.$$

Posto $a+b=x$, $a-b=y$, $\frac{a-b}{a+b}=n$, si deduce:

$$a^2\operatorname{sen}^2 t+b^2\cos^2 t=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\operatorname{sen}^2 t+\left(\frac{x-y}{2}\right)^2\cos^2 t=\frac{1}{4}\left[x^2-2xy\cos 2t+y^2\right]=\frac{x^2}{4}\left(1-2n\cos 2t+n^2\right)$$

quindi

$$S=2(a+b)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-2n\cos 2t+n^2}\;dt$$

e posto $2t=\varphi$ sarà

$$S=(a+b)\int_0^{\pi}\sqrt{1-2n\cos\varphi+n^2}\;d\varphi.$$

Ma:

$$\sqrt{1-2n\cos\varphi+n^2}=\sqrt{(1-ne^{i\varphi})(1-ne^{-i\varphi})}=(1-ne^{i\varphi})^{\frac{1}{2}}(1-ne^{-i\varphi})^{\frac{1}{2}}$$

ed essendo:

$$\operatorname{mod}(ne^{i\varphi})=\operatorname{mod}(ne^{-i\varphi})=n<1$$

sarà:

$$(1-ne^{i\varphi})^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}ne^{i\varphi}-\frac{1}{2.4}n^2e^{2i\varphi}-\frac{1.3}{2.4.6}n^3e^{3i\varphi}-\dots$$

$$(1-ne^{-i\varphi})^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}ne^{-i\varphi}-\frac{1}{2.4}n^2e^{-2i\varphi}-\frac{1.3}{2.4.6}n^3e^{-3i\varphi}-\dots$$

e quindi moltiplicando membro a membro, ed applicando note regole, si ha:

$$\sqrt{1-2n\cos\varphi+n^2}=1-n\cos\varphi-\left[\frac{2}{2.4}\cos 2\varphi-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]n^2-2\left[\frac{1.3}{2.4.6}\cos 3\varphi+\frac{1}{2}\frac{1}{2.4}\cos\varphi\right]n^3-\left[2\frac{1.3.5}{2.4.6}\cos 4\varphi+2\frac{1}{2}\frac{1.3}{2.4.6}\cos 2\varphi-\left(\frac{1}{2.4}\right)^2\right]n^4-\dots$$

Moltiplico per $d\varphi$ ed integro tra 0 e π; osservo che

$$\int_0^{\pi}\cos n\varphi d\varphi=0$$

quindi scompaiono i termini in n, n^3, n^5, ... e restano gli integrali dei termini ottenuti moltiplicando termini analoghi nelle due serie; questi termini sono costanti, positivi e quadrati perfetti.

Quindi

$$\int_0^{\pi}\sqrt{1-2n\cos\varphi+n^2}\;d\varphi=\pi\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2n^2+\left(\frac{1}{2.4}\right)^2n^4+\left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2n^6+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\right)^2n^8+\dots\right]$$

ed

$$S=\pi(a+b)\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2n^2+\left(\frac{1}{2.4}\right)^2n^4+\left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2n^6+\dots\right].$$

Questa formola si trova dedotta dalla teoria delle funzioni ellittiche nell'opera dello Schlömilch, *Vorl. ü. Höheren Analysis*, Braunschweig, 1879, p. 318. — Una dimostrazione diretta è pubblicata nelle dispense litografate di Calcolo integrale dettate dal prof. Tomaselli dell'Istituto tecnico superiore di Milano, anno scolastico 1885-86. La dimostrazione che precede fu da me esposta nel corrente anno nelle esercitazioni di calcolo agli allievi della Università di Torino.

Torino, Aprile 1892. F. CASTELLANO.

Una dimostrazione analoga della stessa formula ci fu pure inviata dal sig. A. Garbasso. (P.)

Sulla teoria della curvatura delle superficie.

Nota di GINO LORIA.

Avendo voluto esporre, nel corrente anno scolastico, nel mio *Corso di geometria differenziale,* gli elementi della teoria della curvatura delle superficie, senza introdurre alcuna ipotesi intorno alla posizione degli assi cartesiani (ortogonali) rispetto alla superficie da studiare, mi venne fatto di architettare un'esposizione che mi sembra accoppiare la semplicità delle argomentazioni con la generalità dei risultati: onde credo non inopportuno di farla conoscere a un publico più ampio di quello al quale verbalmente mi dirigevo. Debito di gratitudine m'impone di citare come principale e ricca fonte di aiuto in tale circostanza, sia nella scelta del punto di partenza, sia nel dimostrare delle proposizioni intermedie, il bel *Mémoire sur la théorie de la courbure des surfaces* del visconte De Salvert.

Per formarsi un concetto della curvatura di una superficie S, avente per equazione

$$f(x, y, z) = 0 \quad (*) \tag{1}$$

nell'intorno di un suo punto qualunque P, è naturale lo studiare la curvatura che hanno in P le varie curve che si possono tracciare in S e passanti per P. Indichiamo con C una qualunque delle dette curve;

(*) Le ipotesi che è *sufficiente* di fare intorno alla funzione f sono che per tutti i valori considerati di x, y, z esistano e siano finite e continue le derivate di essa di 1° e 2° ordine;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x};$$

ma nulla assicura che siano tutte *necessarie.*

ne sia s l'arco, ρ il raggio di curvatura in un suo punto, $\alpha\ \beta\ \gamma$ gli angoli della tangente ad essa con gli assi coordinati e $\xi\ \eta\ \zeta$ gli angoli analoghi relativi alla normale principale; sarà quindi

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} \qquad \cos\beta = \frac{dy}{ds} \qquad \cos\gamma = \frac{dz}{ds} \tag{2}$$

$$\frac{1}{\rho}\cos\xi = \frac{d^2x}{ds^2}, \quad \frac{1}{\rho}\cos\eta = \frac{d^2y}{ds^2}, \quad \frac{1}{\rho}\cos\zeta = \frac{d^2z}{ds^2}. \tag{3}$$

In un punto qualunque di C è verificata l'equazione (1) e lo sono pure tutte quelle che nascono differenziando la (1) rispetto a una variabile di cui le coordinate $x\ y\ z$ di un punto di C si suppongano essere funzioni, per esempio rispetto a s. In particolare avremo

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{ds}$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 +$$
$$2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\frac{dy}{ds}\frac{dz}{ds} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\frac{dz}{ds}\frac{dx}{ds} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}.$$

Applicando le (2) e (3) e ponendo per brevità

$$F(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cos^2\beta + \frac{\partial^2 f}{dz^2}\cos^2\gamma + \tag{4}$$
$$2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\cos\beta\cos\gamma + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\cos\gamma\cos\alpha + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cos\alpha\cos\beta$$

potremo sostituire a queste due equazioni le altre

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma = 0 \tag{5}$$

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\xi + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\eta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\zeta\right) = -F(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma). \tag{6}$$

La (5) non esprime altro che l'esistenza nel piano tangente nel punto P alla superficie S della retta tangente nello stesso punto alla curva C; ma dalla (6) si può trarre un'importante conseguenza. Siano infatti $\lambda\ \mu\ \nu$ gli angoli formati con gli assi coordinati dalla direzione positiva della normale in P alla superficie; introducendo, con Lamé, i parametri differenziali di 1° e 2° ordine della funzione f

$$\Delta_1 f = +\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

$$\Delta_2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

avremo

$$\cos\lambda = \frac{\pm 1}{\Delta_1 f}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \cos\mu = \frac{\pm 1}{\Delta_1 f}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \cos\nu = \frac{\pm 1}{\Delta_1 f}\frac{\partial f}{\partial z},$$

quindi la (6) può scriversi

$$\frac{\Delta_1 f}{\rho}(\cos\lambda\cos\xi + \cos\mu\cos\eta + \cos\nu\cos\zeta) = \mp F(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

ossia, detto σ l'angolo della normale principale alla curva C in P con la normale alla superficie S in questo medesimo punto

$$(6') \qquad \frac{\Delta_1 f}{\rho}\cos\sigma = \mp F(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

Consideriamo ora il piano della tangente in P alla curva C e della normale ivi alla superficie; esso taglierà S in una *sezione normale*, linea a cui potremo applicare la formola precedente: x, y, z, α, β, γ conserveranno gli stessi valori, mentre ξ η ζ coincideranno rispettiv. con λ μ ν e ρ assumerà un valore R dato dalla formola

$$(7) \qquad \frac{\Delta_1 f}{R} = \mp F(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

Dalle (6') e (7) si deduce subito

$$\rho = R\cos\sigma;$$

siccome σ (angolo della normale principale alla linea C con la normale alle superficie) misura il diedro avente per faccie il piano osculatore a C in P col piano dell'anzidetta sezione normale, così questa equazione esprime il famoso

Teorema di Meunier. Il raggio di curvatura in un punto di una linea tracciata su una superficie è eguale al prodotto del raggio di curvatura in questo punto della sezione normale tangente a quella linea pel coseno dell'angolo compreso fra il piano di questa sezione e il piano osculatore alla linea nel detto punto.

L'importanza di questa proposizione è dovuta a ciò che essa concede la facoltà di occuparsi esclusivamente delle curvature in un punto delle sezioni normali che lo contengono. Ci potremo dunque restringere a considerare la (7), cioè la

$$\frac{\Delta_1 f}{\mp R} = F(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

A questa formola si può dare aspetto più conveniente attribuendo al raggio di curvatura un segno; se conveniamo di attribuirgli il segno *negativo* quando è diretto nel *senso positivo* della normale in P alla superficie (cioè a quel senso definito da $\cos\lambda = +\frac{1}{\Delta_1 f}\frac{\partial f}{\partial x}$, ecc.) e il

segno positivo nell'altra supposizione, e poniamo quindi $r = -R$ oppure $r = +R$ a norma dei casi, potremo scrivere sempre

$$(7') \qquad \frac{\Delta_1 f}{r} = F(a, b, c)$$

avendo inoltre posto per brevità

$$a = \cos\alpha, \quad b = \cos\beta, \quad c = \cos\gamma,$$

sicchè si ha

$$(5') \qquad a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} + c\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

$$(8) \qquad a^2 + b^2 + c^2 - 1 = 0.$$

In forza della (7'), volendo studiare i cambiamenti subiti da r al variare della sezione normale, basta esaminare quali siano i valori estremi assunti da F, funzione delle variabili a, b, c legate dalle relazioni (5') e (8). Per trovarli serve una nota regola che insegna di combinare queste due relazioni con quelle nascenti dal differenziare rispetto ad a, b, c la funzione

$$F(a, b, c) + p\left(a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} + c\frac{\partial f}{\partial z}\right) + q\,(a^2 + b^2 + c^2 - 1),$$

ove p e q sono costanti da determinare. Le anzidette relazioni sono

$$\frac{\partial F}{\partial a} + p\frac{\partial f}{\partial x} + 2qa = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial b} + p\frac{\partial f}{\partial y} + 2qb = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial c} + p\frac{\partial f}{\partial z} + 2qc = 0;$$

eliminando da esse p e q se ne desume

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial x} & a \\ \frac{\partial F}{\partial c} & \frac{\partial f}{\partial y} & b \\ \frac{\partial F}{\partial b} & \frac{\partial f}{\partial z} & c \end{vmatrix} = 0.$$

Il problema è così ricondotto alla ricerca dei valori di a, b, c soddisfacenti le equazioni (5'), (8) e (9).

Per risolverlo introduciamo la seguente funzione ausiliaria

$$(10) \qquad G(a, b, c) = \frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial b}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial c}\frac{\partial f}{\partial z}$$

e notiamo subito che si può anche scrivere

$$(10') \qquad G(a, b, c) = 2\Delta_1 f\left\{\frac{\partial \Delta_1 f}{\partial x} + \frac{\partial \Delta_1 f}{\partial y} + \frac{\partial \Delta_1 f}{\partial z}\right\}$$

come si verifica sostituendo alle derivate di F i loro valori e tenendo presente la definizione di $(\Delta_1 f)^2$. Ciò posto le (5') e (9) — che sono lineari omogenee in a, b, c — dànno per queste quantità dei valori proporzionali ai determinanti estratti dalle matrice

$$\left|\begin{matrix} \frac{\partial F}{\partial b}\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial F}{\partial c}\frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial c}\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial F}{\partial b}\frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{matrix}\right|$$

onde, dopo pochi calcoli, si conclude

$$\frac{a}{\frac{\partial f}{\partial x}G(a,b,c)-\frac{\partial F}{\partial a}\Delta_1{}^2 f}=\frac{b}{\frac{\partial f}{\partial y}G(a,b,c)-\frac{\partial F}{\partial b}\Delta_1{}^2 f}=\frac{c}{\frac{\partial f}{\partial z}G(a,b,c)-\frac{\partial F}{\partial c}\Delta_1{}^2 f}$$

e possiamo aggiungere

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{\left(a\frac{\partial f}{\partial x}+b\frac{\partial f}{\partial y}+c\frac{\partial f}{\partial z}\right)G(a,b,c)-\Delta_1{}^2 f\left(a\frac{\partial F}{\partial a}+b\frac{\partial F}{\partial b}+c\frac{\partial F}{\partial c}\right)},$$

cioè per le (5) (8)

$$=\frac{1}{-\Delta_1{}^2 f\,.\,2F(a,b,c)}$$

o per la (7')

$$=-\frac{1}{\frac{2\Delta_1{}^3 f}{r}}.$$

Concludiamo in conseguenza:

$$(11)\qquad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}G(a,b,c)-\Delta_1{}^2 f\frac{\partial F}{\partial a}=-\frac{2a\Delta_1{}^3 f}{r}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}G(a,b,c)-\Delta_1{}^2 f\frac{\partial F}{\partial b}=-\frac{2b\Delta_1{}^3 f}{r}, \\ \frac{\partial f}{\partial z}G(a,b,c)-\Delta_1{}^2 f\frac{\partial F}{\partial c}=-\frac{2c\Delta_1{}^3 f}{r}. \end{cases}$$

Prendiamo la prima di queste equazioni e sostituiamo in essa a G e $\frac{\partial F}{\partial a}$ i loro valori; il risultato, diviso per $-2\Delta_1{}^3 f$, assume la forma seguente:

$$a\,\frac{\Delta_1 f\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \Delta_1 f}{\partial x}}{\Delta_1{}^2 f}+b\,\frac{\Delta_1 f\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \Delta_1 f}{\partial y}}{\Delta_1{}^2 f}+\frac{\Delta_1 f\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \Delta_1 f}{\partial z}}{\Delta_1{}^2 f}=\frac{a}{r}$$

ossia, rammentando essere

$$\cos\xi=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\Delta_1 f},$$

$$a\frac{\partial\cos\xi}{\partial x}+b\frac{\partial\cos\xi}{\partial y}+c\frac{\partial\cos\xi}{\partial z}=\frac{a}{r}.$$

Questa equazione con le due analoghe forma il sistema

$$(12)\qquad \begin{cases} a\left(\frac{\partial\cos\xi}{\partial x}-\frac{1}{r}\right)+a\frac{\partial\cos\xi}{\partial y}+a\frac{\partial\cos\xi}{\partial z}=0 \\ a\frac{\partial\cos\eta}{\partial x}+a\left(\frac{\partial\cos\eta}{\partial y}-\frac{1}{r}\right)+a\frac{\partial\cos\eta}{\partial y}=0 \\ a\frac{\partial\cos\zeta}{\partial x}+a\frac{\partial\cos\zeta}{\partial y}+a\left(\frac{\partial\cos\zeta}{\partial z}-\frac{1}{r}\right)=0; \end{cases}$$

e siccome la (8) vieta che a b c siano ad un tempo nulle, così dovrà essere

$$(13)\qquad \left|\begin{matrix} \frac{\partial\cos\xi}{\partial x}-\frac{1}{r} & \frac{\partial\cos\xi}{\partial y} & \frac{\partial\cos\xi}{\partial z} \\ \frac{\partial\cos\eta}{\partial x} & \frac{\partial\cos\eta}{\partial y}-\frac{1}{r} & \frac{\partial\cos\eta}{\partial z} \\ \frac{\partial\cos\zeta}{\partial x} & \frac{\partial\cos\zeta}{\partial y} & \frac{\partial\cos\zeta}{\partial z}-\frac{1}{r} \end{matrix}\right|=0$$

Quest'equazione servirà a determinare i valori estremi di r. Ponendo per brevità

$$(14)\qquad H=\frac{\partial\cos\xi}{\partial x}+\frac{\partial\cos\eta}{\partial y}+\frac{\partial\cos\zeta}{\partial z}$$

$$(15)\quad K=\left|\begin{matrix}\frac{\partial\cos\eta}{\partial y} & \frac{\partial\cos\eta}{\partial z} \\ \frac{\partial\cos\zeta}{\partial y} & \frac{\partial\cos\zeta}{\partial z}\end{matrix}\right|+\left|\begin{matrix}\frac{\partial\cos\zeta}{\partial z} & \frac{\partial\cos\zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial\cos\xi}{\partial z} & \frac{\partial\cos\xi}{\partial x}\end{matrix}\right|+\left|\begin{matrix}\frac{\partial\cos\xi}{\partial x} & \frac{\partial\cos\xi}{\partial y} \\ \frac{\partial\cos\eta}{\partial x} & \frac{\partial\cos\eta}{\partial y}\end{matrix}\right|$$

la (13) si scriverà

$$\left|\begin{matrix} \frac{\partial\cos\xi}{\partial x} & \frac{\partial\cos\xi}{\partial y} & \frac{\partial\cos\xi}{\partial z} \\ \frac{\partial\cos\eta}{\partial x} & \frac{\partial\cos\eta}{\partial y} & \frac{\partial\cos\eta}{\partial z} \\ \frac{\partial\cos\zeta}{\partial x} & \frac{\partial\cos\zeta}{\partial y} & \frac{\partial\cos\zeta}{\partial z} \end{matrix}\right|-\frac{1}{r}K+\frac{1}{r^2}H-\frac{1}{r^3}=0.$$

Ora il determinante che funge da primo termine di quest'equazione è nullo; infatti se ai termini della sua prima orizzontale moltiplicati per $\cos\xi$, si aggiungono quelli della seconda moltiplicati per $\cos\eta$ e quelli della terza moltiplicati per $\cos\zeta$, si ottiene un determinante avente la prima orizzontale formata dalle semiderivate rispetto a x, y, z di $\cos^2\xi+\cos^2\eta+\cos^2\zeta$, le quali sono nulle perchè la somma di questi tre quadrati vale 1. L'equazione precedente riducesi quindi a

$$-\frac{1}{r}\left(K-\frac{1}{r}H+\frac{1}{r^2}\right)=0 \tag{13'}$$

ed avrà una radice $\frac{1}{r}=0$ e altre due, che chiameremo $\frac{1}{R_1}$ e $\frac{1}{R_2}$, e tali che sia

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=H\,,\quad \frac{1}{R_1}\frac{1}{R_2}=K\,. \tag{16}$$

Prima d'ogni altra cosa importa trasformare l'equazione (13) in altra indipendente dagli angoli ξ, η, ζ. Ora ricordando che $\cos=\frac{1}{\Delta_1 f}\frac{\partial f}{\partial x}$ si vede subito essere:

$$\frac{\partial\cos\xi}{\partial x}=\frac{1}{\Delta_1 f}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{1}{\Delta_1^2 f}\frac{\partial\Delta_1 f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}\,,$$
$$\frac{\partial\cos\xi}{\partial y}=\frac{1}{\Delta_1 f}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-\frac{1}{\Delta_1^2 f}\frac{\partial\Delta_1 f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\,,$$
$$\frac{\partial\cos\xi}{\partial z}=\frac{1}{\Delta_1 f}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}-\frac{1}{\Delta_1^2 f}\frac{\partial\Delta_1 f}{\partial z}\frac{\partial f}{dx}\,;$$

in virtù di questa e delle sei analoghe il primo membro della (13) diviene un determinante di cui la prima verticale è

$$\begin{array}{c}
\frac{1}{\Delta_1 f}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{1}{\Delta_1^2 f}\frac{\partial\Delta_1 f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{1}{r}\\
\frac{1}{\Delta_1 f}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-\frac{1}{\Delta_1^2 f}\frac{\partial\Delta_1 f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\\
\frac{1}{\Delta_1 f}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}-\frac{1}{\Delta_1^2 f}\frac{\partial\Delta_1 f}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}
\end{array}$$

e le altre due verticali nascono da quella scritta mediante permutazioni circolari delle x, y, z.

Se eleviamo al quart'ordine il determinante ora descritto, aggiungendo come quarta verticale $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, 1 e come quarta orizzontale 0, 0, 0, 1; e nel determinante risultante aggiungiamo alle tre prime

verticali l'ultima dopo averla moltiplicata rispettiv. per $\frac{1}{\Delta_1^2 f}\frac{\partial\Delta_1 f}{\partial x}$, $\frac{1}{\Delta_1^2 f}\frac{\partial\Delta_1 f}{\partial y}$, $\frac{1}{\Delta_1^2 f}\frac{\partial\Delta_1 f}{\partial z}$ otterremo

$$\begin{vmatrix}
\frac{1}{\Delta_1 f}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{1}{r} & \frac{1}{\Delta_1 f}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{1}{\Delta_1 f}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} & \frac{\partial f}{\partial x}\\
\frac{1}{\Delta_1 f}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{1}{\Delta_1 f}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{1}{r} & \frac{1}{\Delta_1 f}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} & \frac{\partial f}{\partial y}\\
\frac{1}{\Delta_1 f}\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} & \frac{1}{\Delta_1 f}\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} & \frac{1}{\Delta_1 f}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} & \frac{\partial f}{\partial z}\\
\frac{1}{\Delta_1^2 f}\frac{\partial\Delta_1 f}{\partial x} & \frac{1}{\Delta_1^2 f}\frac{\partial\Delta_1 f}{\partial y} & \frac{1}{\Delta_1^2 f}\frac{\partial\Delta_1 f}{\partial z} & 1
\end{vmatrix}=0\,;$$

ovvero

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\Delta_1 f}{r} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} & \frac{\partial f}{\partial x}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{\Delta_1 f}{r} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} & \frac{\partial f}{\partial y}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}-\frac{\Delta_1 f}{r} & \frac{\partial f}{\partial z}\\
\Delta_1 f\frac{\partial\Delta_1 f}{\partial x} & \Delta_1 f\frac{\partial\Delta_1 f}{\partial y} & \Delta_1 f\frac{\partial\Delta_1 f}{\partial z} & \Delta_1^2 f
\end{vmatrix}=0\,.$$

Se finalmente poniamo in luogo degli elementi dell'ultima orizzontale i loro valori ottenuti differenziando rispetto a x, y, z la definizione $\Delta_1^2 f=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2$ e sottragghiamo da essa gli omologhi delle tre prime moltiplicati risp. per $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, concluderemo, dopo avere soppresso il fattore $\frac{\Delta_1 f}{r}$,

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\Delta_1 f}{r} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} & \frac{\partial f}{\partial x}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{\Delta_1 f}{r} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} & \frac{\partial f}{\partial y}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}-\frac{\Delta_1 f}{r} & \frac{\partial f}{\partial z}\\
\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} & 0
\end{vmatrix}=0\,. \tag{17}$$

Quest'equazione avrà per radici $\frac{1}{R_1}$ e $\frac{1}{R_2}$. Ora osserviamo che, indicando con X, Y, Z coordinate correnti, gli assi della conica in cui il piano

$$\frac{\partial f}{\partial x} X + \frac{\partial f}{\partial y} Y + \frac{\partial f}{\partial z} Z = \text{cost.}$$

sega la quadrica

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} X^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} Y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} Z^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} YZ + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} ZX + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} XY = \text{cost.}$$

hanno dei quadrati i cui inversi sono proporzionali alle radici della equazione

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \lambda & \frac{\partial^2 f}{\partial x dy} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \lambda & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \lambda & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} & 0 \end{vmatrix} = 0\ (*);$$

ma le radici λ di quest'equazione sono sempre reali, dunque reali saranno pure quelle delle (17) che sono legate a quelle dalla relazione $\lambda = -\frac{\Delta_1 f}{r}$. *Dunque le quantità* R_1 *e* R_2 *definite dalle* (16) *sono sempre reali.* Affinchè esse siano fra loro eguali deve avere radici eguali l'ultima equazione scritta; cioè la conica intersezione del piano e della quadrica ausiliari deve essere un circolo: ciò esige (**) che la funzione

$$\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \tag{18}$$

sia eguale alle due analoghe che da essa nascono permutando circolarmente le lettere x, y, z.

Ne viene che se si combinano le equazioni che esprimono tale eguaglianza con l'equazione delle superficie si otterrà in generale un gruppo

(*) V. ad es. E. D'Ovidio, *Le proprietà fondamentali delle superficie di second'ordine* (Torino 1883) p. 87.

(**) Op. cit., p. 92.

discreto di punti speciali, che diconsi *ombilichi*. Osserviamo finalmente che sviluppando la (17) secondo le potenze di r si trova, ricordando le (14) e (15),

$$H = \frac{1}{\Delta_1^3 f}\left[\Delta_1^2 f \,.\, \Delta_2 f - F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\right] \tag{14'}$$

$$K = -\frac{1}{\Delta_1^4 f}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} & 0 \end{vmatrix} \tag{15'}$$

Le quantità R_1 e R_2 — sempre reali ed in generale fra loro differenti — che soddisfano le equazioni (16) si dicono *raggi principali di curvatura* della superficie S nel punto P e *principali* diconsi pure le corrispondenti sezioni normali. Scelto per r uno di questi valori le equazioni (12) riduconsi a due sole distinte e serviranno a determinare i rapporti delle a, b, c; siccome poi $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, così si potranno determinare i valori di a, b, c a meno del segno, ambiguità questa che poteva prevedersi non essendo prestabilito il senso positivo sulla tangente ad ogni sezione principale: prescindendo dunque dal segno potremo ottenere due terne di valori per a, b, c una (che chiameremo $a_1\ b_1\ c_1$) corrispondente a $r = R_1$, l'altra (che chiameremo $a_2\ b_2\ c_2$) corrispondente a $r = R_2$.

Facendo ora nelle (11) $a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$ avremo

$$\frac{\partial f}{\partial x} G(a_1 b_1 c_1) - \Delta_1^2 f \frac{\partial F(a_1 b_1 c_1)}{\partial a_1} = -2a_1 \frac{\Delta_1^3 f}{R_1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} G(a_1 b_1 c_1) - \Delta_1^2 f \frac{\partial F(a_1 b_1 c_1)}{\partial b_1} = -2b_1 \frac{\Delta_1^3 f}{R_1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} G(a_1 b_1 c_1) - \Delta_1^2 f \frac{\partial F(a_1 b_1 c_1)}{\partial c_1} = -2c_1 \frac{\Delta_1^3 f}{R_1};$$

moltiplicando queste risp. per $a_2\ b_2\ c_2$ e addizionando i prodotti, otterremo

$$\left(a_2\frac{\partial f}{\partial x} + b_2\frac{\partial f}{\partial y} + c_2\frac{\partial f}{\partial z}\right) G(a_1 b_1 c_1) - \Delta_1^2 f\left(a_2\frac{\partial F}{\partial a_1} + b_2\frac{\partial F}{\partial b_1} + c_2\frac{\partial F}{\partial c_1}\right)$$
$$= -2\frac{\Delta_1^3 f}{R_1}(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2)$$

cioè per la (5')

$$\left.\begin{array}{l}\Delta_1{}^2 f\left(a_2\dfrac{\partial F}{\partial a_1}+b_2\dfrac{\partial F}{\partial b_1}+c_2\dfrac{\partial F}{\partial c_1}\right)=2\,\dfrac{\Delta_1{}^3 f}{R_1}(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)\\ \text{Similmente si trova}\\ \Delta_1{}^2 f\left(a_1\dfrac{\partial F}{\partial a_2}+b_1\dfrac{\partial F}{\partial b_2}+c_1\dfrac{\partial F}{\partial c_2}\right)=2\,\dfrac{\Delta_1{}^3 f}{R_2}(a_2a_1+b_2b_1+c_2c_1)\end{array}\right\}\quad(19)$$

Ma essendo F una funzione quadratica omogenea di $a\ b\ c$, i primi membri di queste ultime equazioni sono fra loro identici, onde si conclude

$$0=2\,\Delta_1{}^3 f\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)\,;$$

ora, nel punto P, $\Delta_1 f$ non è nullo (altrimenti P sarebbe un punto singolare di S), e in generale (cioè se P non è un umbilico) non lo è la differenza $\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}$, dunque dev'essere

(20) $$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0\,;$$

il che prova *essere in ogni punto delle superficie le due sezioni principali fra loro perpendicolari.*

Si noti che in virtù delle (20) le (19) dànno

(21) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}a_1a_2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}b_1b_2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}c_1c_2+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(b_1c_2+b_2c_1)$$
$$+\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(c_1a_2+c_2a_1)+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a_1b_2+a_2b_1)=0\,.$$

La considerazione delle sezioni normali fra loro perpendicolari, di cui ora si è accertata l'esistenza, permette di porre la (7') sotto una forma assai notevole. Consideriamo infatti la sezione normale di S, che passa per P e la cui tangente t in questo punto fa con gli assi gli angoli aventi per coseni a, b, c; siano θ_1 e θ_2 gli angoli che essa forma con le tangenti t_1 e t_2 alle sezioni principali. t_1, t_2 e la normale n nel punto P alla superficie S costituiscono un triedro trirettangolo i cui spigoli formano con t angoli aventi per coseni risp.

$$\cos\theta_1\,,\quad \cos\theta_2\,,\quad 0$$

mentre con Ox essi formano gli angoli aventi per coseni risp.

$$a_1\,,\quad a_2\,,\quad \cos\xi\,.$$

In conseguenza il coseno a dell'angolo formato da t con Ox è dato dalla formola

$$a=a_1\cos\theta_1+a_2\cos\theta_2\,.$$

Similmente si trova:
$$b=b_1\cos\theta_1+b_2\cos\theta_2$$
$$c=c_1\cos\theta_1+c_2\cos\theta_2\,.$$

Ne viene che sostituiamo questi valori nella (7') ricordando le (21) concluderemo

$$\frac{\Delta_1 f}{r}=\cos^2\theta_1\,F(a_1b_1c_1)+\cos^2\theta_1\,.\,F(a_2b_2c_2)$$

ossia
$$\frac{\Delta_1 f}{r}=\cos^2\theta_1\,\frac{\Delta_1 f}{R_1}+\cos^2\theta_2\,\frac{\Delta_1 f}{R_2}$$

cioè (22) $$\frac{1}{r}=\frac{\cos^2\theta_1}{R_1}+\frac{\cos^2\theta_2}{R_2}\,;$$

e questa formola dà la curvatura di qualunque sezione normale in funzione delle curvature delle sezioni principali.

Osservando che $\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}$ e scrivendo per maggior semplicità θ invece di θ_1 essa assume la forma

(22') $$\frac{1}{r}=\frac{\cos^2\theta}{R_1}+\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{R_2}$$

sotto la quale si ravvisa in essa la ben nota *formola di Eulero.* Da questa segue anzitutto che se $R_1=R_2$ tutte le sezioni normali in P hanno la medesima curvatura. Supposto che sia $R_1 \gtrless R_2$ e che R_1 e R_2 abbiano lo stesso segno, $\frac{1}{r}$ avrà sempre questo segno e non si annullerà mai: in tal caso il punto P si dice *ellittico* e la soluzione $\frac{1}{r}=0$ della (13) non è accettabile. Quando invece R_1 e R_2 hanno segni opposti, $\frac{1}{r}$ assumerà dei valori positivi e dei valori negativi e si annullerà per quei valori di θ in cui è $\operatorname{tg}\theta=\pm\sqrt{-\frac{R_2}{R_1}}$: in tal caso il punto si dice *iperbolico* e bisogna tener conto della soluzione $\frac{1}{r}$ dell'equazione (13). Per altre conseguenze, di minore importanza, della (22') rimandiamo alle ordinarie trattazioni della teoria della quale qui furono tracciate le prime linee.

Genova, Marzo 1892.

Sopra un metodo generale di costruzioni in geometria descrittiva (*).

***

Indicheremo con W il centro e con σ il piano di proiezione in una proiezione centrale: con F′ l'immagine di una figura F; con f'_α la retta di fuga del piano α e con F'_a il punto di fuga della retta a. Chiameremo rette e piani di fronte, le rette e i piani paralleli al piano σ di proiezione.

È noto che « Se **F** è una figura del piano α, s una retta di fronte di α, $\mathbf{F}_1$ il ribaltamento di **F** nel piano di fronte che passa per s, e $\Omega\alpha, s$ è l'omologia che ha s' per asse, f'_α per una retta limite, e per centro il ribaltamento di W in σ fatto con rotazione intorno ad f'_α nel senso in cui ha ruotato α per abbattersi nel piano di fronte che passa per s, — le due figure **F′** e $\mathbf{F}'_1$, immagini di **F** e $\mathbf{F}_1$, sono legate dall'omologia $\Omega\alpha, s$ essendo f'_α la retta limite della figura **F′** ».

***

Dal teorema ora citato si deduce facilmente che:

« Se α_i è un piano di un fascio di piani paralleli, s_i una retta di fronte di α_i, le s_i dei piani del fascio sono contenute in un piano uscente da W, e ogni piano α_i del fascio si ribalta nel piano di fronte che passa per la corrispondente retta s_i, in un senso determinato, — avremo che le omologie $\Omega\alpha_i$, s_i coincidono in una sola omologia ».

Indicheremo con $\Omega\alpha, s$ l'omologia nella quale coincidono le omologie $\Omega\alpha_i$, s_i, e tale omologia avrà per asse l'immagine s' di tutte le rette s_i, per retta limite delle immagini delle figure dei piani α l'immagine f'_α dell'asse del fascio dei piani α, e per centro il ribaltamento di W in σ fatto con rotazione intorno ad f'_α.

È poi chiaro che:

« Se α_i è un piano di un fascio di piani paralleli, $\mathbf{F}'_i$ l'immagine di una figura di α_i, $\mathbf{F}''_i$ la corrispondente di $\mathbf{F}_i$ in un'omologia che ha l'immagine f'_α dell'asse del fascio dei piani α per retta limite della figura $\mathbf{F}'_i$, e per centro il ribaltamento di W in σ fatto con rotazione intorno ad f'_α — avremo che le $\mathbf{F}''_i$ sono le immagini dei ribaltamenti delle figure $\mathbf{F}_i$ in piani di fronte ».

(*) Di questo metodo detti già un cenno, limitandolo alle sole proiezioni assonometriche, nelle lezioni per gli allievi dell'Accademia militare (stampate nel 1890). È solo in quest'anno scolastico (1891-92) che generalizzato il metodo l'ho adoperato in tutte le questioni nelle quali ottenevo una notevole semplificazione in confronto ai metodi ordinari.

Stabilita l'omologia $\Omega\alpha, s$ per i piani paralleli α_i, essendo $\mathbf{F}'_i$ l'immagine di una figura di α_i, con F''_i indicheremo la corrispondente di $\mathbf{F}'_i$ nell'omologia $\Omega\alpha, s$.

***

Applichiamo ad un caso particolare il teorema generale ora indicato.

Sia ε un'elica cilindrica, a il suo asse, A_i un punto di ε, α_i (*) il piano normale ad a, uscente da A_i, C_i il punto $a\alpha_i$, $C_0\,C_n$ il passo dell'elica e $\Omega\alpha, s$ un'omologia relativa ai piani α_i. Siano determinati in σ i punti A'_0, C'_0, C'_n, F'_a, (i punti C'_0, C_n, F_a sono nella a') e troviamo i punti A''_0, C''_0, C''_n, F''_a. Si dimostra facilmente che « Se h è il sostegno di una punteggiata C''_0, D_1, D_2, ... D_n, simile alla punteggiata C_0, C_1, C_2 ..., C_n, h è parallela all'asse s dell'omologia $\Omega\alpha, s$, e M è il punto d'incontro della retta $D_n\,C''_n$ con la parallela ad s uscente da F''_a, la punteggiata C''_0, C''_1 ..., C''_n è la proiezione fatta da M della punteggiata C''_0, D_1, D_2 ..., D_n.

Supporremo in ciò che segue che i punti C_i dividano in n parti eguali i passi $C_0\,C_n$, $C_n\,C_{2n}$, $C_{2n}\,C_{3n}$ ... dell'elica ε, essendo A_0 l'origine di ε.

Sia γ_i la traccia in α_i del cilindro che contiene l'elica ε. La curva γ''_i è una circonferenza che ha C''_i per centro e $C''_i\,A''_i$ per raggio. Due qualunque delle circonferenze γ''_i sono omotetiche, essendo F''_a il centro dell'omotetia, poichè due qualunque delle coniche γ'_i sono corrispondenti in un'omologia che ha F'_a per centro e f'_α (retta limite di $\Omega\alpha, s$) per asse. Segue da ciò che « se $B_1{}'\,B_2{}''$ ... B''_{n-1} sono i punti che insieme ad A''_0 dividono γ''_0 in n parti eguali, il punto A''_i è l'omotetico di B''_i, se i non è multiplo di n, o l'omotetico di A''_0 se i è multiplo di n, in un'omotetia che ha F''_a per centro e per coppia di punti corrispondenti i punti C''_0, C''_i ». Questa proprietà permette di costruire facilmente la ε'' e quindi la ε' immagine dell'elica ε.

***

Se n''_0 è l'evolvente di γ''_0, essendo A''_0 la sua origine, n_0 sarà la traccia in α_0 dell'elicoide sviluppabile Σ_ε che ha ε per spigolo di

(*) Sceglieremo i punti A_i in modo che nessuno dei piani α_i passi per W.

regresso. Indicheremo con H_i il punto nel quale la generatrice g_i di Σ_ε che passa per A_i incontra α_o. Ad ogni punto A di ε corrisponde un punto di n_o e viceversa. Ad ogni punto B_i di γ_o corrispondono in n_o i punti H_{i+rn}, $r = 0, 1, 2, \ldots$ ».

Se λ è la curva all'infinito di Σ_ε, λ' è una conica, e f'_a è la polare del punto F'_a. Le coppie di diametri coniugati di λ' sono la proiezione di un'involuzione circolare di raggi, giacente in un piano perpendicolare ad a. Da ciò si deduce che λ'' è un circolo che ha F''_a per centro. Un punto di λ'' è comune alle rette $H''_{i+rn} A_{i+rn}$, $r=1, 2, 3 \ldots$ poichè tal punto è corrispondente in $\Omega\alpha, s$ del punto di fuga delle generatrici di $\Sigma\varepsilon$ che passano per i punti nei quali la generatrice del cilindro che contiene ε, uscente da A_i, incontra ε. Un punto di λ'' può anche trovarsi, osservando che esso deve essere all'incontro di una delle $g''_i = H''_i A''_i$ con la perpendicolare condotta da F''_a, alla retta $C''_o B''_i$, poichè sono parallele le tangenti a due sezioni piane di una superficie sviluppabile nei punti nei quali queste sono incontrate da una generatrice.

Se indichiamo con K''_i i punti di λ'' per i quali passano le rette $g''_{i+r.n}$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, i punti K'' dividono λ'' in n parti eguali. Possiamo dunque far uso dei punti A''_i e K''_i per trovare le immagini delle generatrici di $\Sigma\varepsilon$, costruendo solamente un punto della n''_o (*).

(*) Per tutte le costruzioni sulle superfici elicoidali è di molta utilità l'uso della *squadra cicloidale* (ideata dal Guimaraes, *Bulletin de la Société mathématique de France*, costruita a Torino nello stabilimento meccanico di precisione di G. Allemano). Il problema generale che occorre risolvere è il seguente: « Essendo φ un angolo, φ_o l'angolo piatto e p un segmento dato (passo della superficie elicoidale), risolvere graficamente rispetto all'angolo φ o al segmento $h \gtreqless \frac{1}{2} p$, l'equazione $\varphi : \varphi_o = h : \frac{1}{2} p$ ». Essendo A un punto della circonferenza ξ, di diametro eguale al cateto minore della squadra cicloidale, AB la tangente a ξ, $\overline{AB}$ eguale al cateto maggiore della squadra cicloidale, BC la perpendicolare ad AB, $\overline{BC} = \frac{1}{2} p$, H un punto del segmento AC, H' il piede della perpendicolare condotta da H ad AB, e F il punto di ξ tale che *lung* $\widehat{AF} =$ *lung* $\overline{AH'}$ (e $\widehat{AF}$ o $\overline{AH'}$ si ottiene, date $\overline{AH'}$ o $\widehat{AF}$, per mezzo della squadra cicloidale), si ha che *lung* $\widehat{AF}$: *lung* $\left(\frac{1}{2} \xi\right) = \overline{H'H} : \frac{1}{2} p$. Da questo si deduce la soluzione grafica dell'equazione $\varphi : \varphi_o = h : \frac{1}{2} p$.

***

Se L è un punto di α_o, le tangenti condotte da L'' ad n''_o determinano in n''_o dei punti H''; i corrispondenti A'' in ε'' dei punti H'' sono i corrispondenti in $\Omega\alpha, s$ delle immagini dei punti di ε nei quali i piani osculatori di ε passano per L.

Se L è all'infinito da L'' si conducono le tangenti a λ''. Se L coincide con W, le tangenti comuni a λ'' e ε'' (che risulteranno anche tangenti ad n''_o) toccano ε'' nei punti A'' corrispondenti ecc.

***

Basti quest'esempio per mostrare al lettore quale vantaggi può recare nelle costruzioni in proiezioni centrale, il teorema che abbiamo indicato, tanto più che essendo l'asse dell'omologia $\Omega\alpha, s$ arbitrario si può sempre fare in modo che tutte le figure F'' che si ha bisogno di costruire sieno contenute entro i limiti del foglio. Nelle proiezioni parallele, $\Omega\alpha, s$ è un'affinità. Nella rappresentazione Monge, il metodo da noi indicato, può sostituire l'ordinario metodo dei cambiamenti dei piani coordinati, cambiamenti che si indicano con poche parole e si effettuano con molte costruzioni.

Torino, Aprile 1892. C. BURALI-FORTI.

Considerazioni nel gruppo delle similitudini sul piano reale

per A. DEL RE.

(Art. I).

Questo articolo e quello che lo seguirà nella *Rivista di Matematica* sono staccati dall'altro che sotto il titolo « *Escursioni matematiche diverse* » io ho promesso di pubblicare, dopo quello già pubblicato (*), nel *Giornale di Matematiche* di Napoli. Contiene diverse considerazioni generali nel gruppo che sta a base della geometria metrica elementare euclidea, ed uno studio più dettagliato nel gruppo meno esteso delle similitudini dirette.

(*) Cfr. Ann. 1890.

§ I. — *Il gruppo generale delle similitudini.*

1. Se si considerano nel gruppo lineare del piano quelle trasformazioni che conservano i punti ciclici, cioè che determinano sulla retta all'infinito del medesimo un'omografia binaria permutabile con l'involuzione che vi determina la rotazione di un retto attorno ad un punto qualunque del piano, quelle trasformazioni formano anch'esse un gruppo, *contenuto* nel gruppo lineare generale: è il gruppo delle similitudini. Vi fanno parte le omotetie, le simmetriche ortogonali ed i movimenti del piano su se stesso: questi ultimi formano un sottogruppo nel gruppo delle similitudini.

2. L'involuzione che la rotazione di un retto determina sulla retta all'infinito la indicheremo costantemente con $\mathbf{J}_\infty$. Una similitudine può cangiare $\mathbf{J}_\infty$ in se medesima senza alterarne il verso (*) ed allora è *diretta*, e può cangiare $\mathbf{J}_\infty$ in se medesima cangiando un verso nell'opposto ed allora è *inversa*. Le omotetie dirette o inverse, sono similitudini dirette ed anche i movimenti; le simmetrie ortogonali sono, in vece, similitudini inverse.

3. Le similitudini dirette formano da sè sole un gruppo nel quale *è contenuto* quello dei movimenti: le inverse no. Due similitudini dirette o due similitudini inverse hanno sempre per risultante una similitudine diretta; una similitudine diretta ed una inversa hanno, in vece, sempre per risultante una similitudine inversa.

4. Le similitudini dirette le indicheremo costantemente con la lettera $\mathbf{D}$ affetta da indici o da apici, e le inverse con la lettera $\mathbf{J}$: la proiettività binaria che una $\mathbf{D}$ o una $\mathbf{J}$ determina sulla retta all'infinito la indicheremo con la lettera $\mathbf{d}$ o con la lettera $\mathbf{j}$ affetta dai medesimi indici o apici. Una $\mathbf{d}$ ha per involuzione unita $\mathbf{J}_\infty$ o coincide con $\mathbf{J}_\infty$; una $\mathbf{j}$ è, in vece, armonica a $\mathbf{J}_\infty$. Una $\mathbf{d}$ può essere l'identità ed allora la corrispondente $\mathbf{D}$ è un'omotetia o un movimento per traslazione, e viceversa. Una $\mathbf{j}$ appartiene a due serie distinte di infinite simmetrie.

5. Come per qualunque $\mathbf{D}$ o $\mathbf{J}$ la retta all'infinito è unita, ogni $\mathbf{D}$ o $\mathbf{J}$ possiede un punto unito al finito, in generale, e come ogni $\mathbf{d}$ che non sia l'identità ha per punti uniti i punti doppi di $\mathbf{J}_\infty$, mentre che ogni $\mathbf{j}$ è iperbolica, così una $\mathbf{D}$ qualunque che non sia omotetia o movimento per traslazione, non ha rette unite reali al finito, mentre che ogni $\mathbf{J}$ ne ha almeno due, e queste sono ortogonali.

(*) Si sa, in fatti, che un'involuzione ellittica può essere descritta in due versi opposti da una coppia qualunque di elementi coniugati; ed è in tale proprietà che riposa il concetto di Staudt della *separazione* degli elementi immaginarî.

6. Le $\mathbf{D}$ che sono omotetie le indicheremo con $\mathbf{O}$, e quelle che sono movimenti con $\mathbf{M}$. Le $\mathbf{J}$ che sono simmetrie le indicheremo con $\mathbf{S}$.

7. Ogni $\mathbf{D}$ può essere sempre risoluta nella successione di una $\mathbf{O}$ e di un $\mathbf{M}$ in un ordine qualunque. In fatti, sia G il punto unito al finito della $\mathbf{D}$ ed H_1, H_2 due punti omologhi: saranno GH_1, GH_2 due rette omologhe. Si prenda $GH_1' \equiv GH_2$ sopra GH_1 e si consideri la omotetia $\mathbf{O}_1$ di centro G e rapporto $GH_1 : GH_2$ ed il movimento $\mathbf{M}_1$ attorno a G che trasporti H_1' in H_2, cioè la rotazione dell'angolo H_1GH_2. Si avrà evidentemente

$$\mathbf{D} \equiv \mathbf{O}_1\mathbf{M}_1 \equiv \mathbf{M}_1\mathbf{O}_1 .$$

Ne segue che per due $\mathbf{D}$ dotate dello stesso punto unito G si ha, dicendole $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$:

$$\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2 \equiv \mathbf{D}_2\mathbf{D}_1 ;$$

poichè, avendosi p. e.,

$$\mathbf{D}_1 \equiv \mathbf{O}_1\mathbf{M}_1 , \qquad \mathbf{D}_2 \equiv \mathbf{O}_2\mathbf{M}_2$$

si avrà

$$\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2 \equiv \mathbf{O}_1\mathbf{M}_1\mathbf{O}_2\mathbf{M}_2 ,$$

ovvero, per essere, come è evidente,

$$\mathbf{M}_1\mathbf{O}_2 \equiv \mathbf{O}_2\mathbf{M}_1 , \quad \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 \equiv \mathbf{M}_2\mathbf{M}_1 , \quad \mathbf{O}_1\mathbf{O}_2 \equiv \mathbf{O}_2\mathbf{O}_1 :$$

$$\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2 \equiv \mathbf{O}_2\mathbf{M}_2\mathbf{O}_1\mathbf{M}_1 .$$

Ma è pure

$$\mathbf{D}_2\mathbf{D}_1 \equiv \mathbf{O}_2\mathbf{M}_2\mathbf{O}_1\mathbf{M}_1$$

dunque è vera la relazione che si voleva provare.

8. Una $\mathbf{D}$ è individuata quando sia dato il punto unito G e due punti omologhi. Ne segue che data una $\mathbf{D}$, e sia $\mathbf{D}_1$, è individuata la $\mathbf{D}_2$ tale che $\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2 \equiv \mathbf{D}_2\mathbf{D}_1$ e due punti H_1, H_2 siano omologhi. Segue da ciò, *senz'altro*, ed in una maniera più generale ed elegante di quella tenuta da Schoute (perchè qui si considerano le similitudini come operazioni *estese* a tutto il piano) la dimostrazione di un teorema che questo geometra ha dato nei *Comptes rendus* del 6 ottobre 1890, e nel *Journal de l'Ecole polytechnique de Delft*, An. 1891.

La proprietà espressa dalla relazione $\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2 \equiv \mathbf{D}_2\mathbf{D}_1$ si enuncia dicendo che *le similitudini dirette dotate dello stesso punto unito al finito sono permutabili.*

9. Ogni $\mathbf{J}$ si può far nascere da una simmetria attorno ad una qualunque delle sue rette unite accompagnata (preceduta cioè, o seguita) da un'omotetia. Sia, in fatti, $\mathbf{J}_1$ una $\mathbf{J}$ qualunque, *e f* le due

rette unite, e G il punto ef. La simmetria $\mathbf{S}_e$, rispetto ad e, trasformerà ogni raggio di G nel suo coniugato rispetto alla involuzione che da G proietta $\mathbf{j}_1$, e ridurrà quindi ad una identità la proiettività che $\mathbf{J}_1\mathbf{S}_e$ pone attorno a G. La $\mathbf{J}_1\mathbf{S}_e$ sarà dunque un'omotetia $\mathbf{O}_1$ dello stesso rapporto della similitudine, e si avrà:

$$\mathbf{J}_1\mathbf{S}_e \equiv \mathbf{O}_1$$

d'onde: $$\mathbf{J}_1 \equiv \mathbf{O}_1\mathbf{S}_e$$

ovvero: $$\mathbf{J}_1 \equiv \mathbf{S}_e\mathbf{O}_1$$

perchè evidentemente si ha $\mathbf{O}_1\mathbf{S}_e \equiv \mathbf{S}_e\mathbf{O}_1$.

10. Una $\mathbf{J}$, seguita da se stessa dà poi sempre per risultante una omotetia. *Due* $\mathbf{J}$ *tali che le rette unite dell'una sono rette unite per l'altra sono permutabili. — Una* $\mathbf{J}$ *non è permutabile con una* $\mathbf{D}$ *se non quando questa è una* $\mathbf{O}$.

11. Le proposizioni del n^{ri} 7 e 9 si possono ritenere valide anche quando la $\mathbf{D}$ del n° 7 è essa stessa un $\mathbf{M}$ e la $\mathbf{J}$ è una $\mathbf{S}$; ma allora si avrà per la $\mathbf{O}$ o per la $\mathbf{S}$: $\mathbf{O} \equiv \mathbf{S} \equiv 1$, o, nella risoluzione della $\mathbf{D}$, per l'$\mathbf{M}$ si prenderà l'$\mathbf{M}$ dato a cui si sia aggiunta la rotazione dell'angolo $(2k+1)\pi$, e per la $\mathbf{O}$ la simmetria rispetto al punto unito della $\mathbf{D}$; e nella risoluzione della $\mathbf{J}$, per la $\mathbf{S}$ si prenderà la $\mathbf{S}_e$ rispetto ad una retta perpendicolare all'asse f di $\mathbf{J}$, mentre per la $\mathbf{O}$ si prenderà la simmetria rispetto al punto ef.

§ II. — *Polarità che conservano le similitudini.*

12. Per effetto di una corrispondenza polare Π, di centro C, una $\mathbf{D}$ o una $\mathbf{J}$ si muta nell'omografia $\Pi\mathbf{D}\Pi$ o $\Pi\mathbf{J}\Pi$ la quale è dotata, intorno a C, di una proiettività avente per involuzione unita la $\Pi\mathbf{J}_\infty\Pi$ o della involuzione $\Pi\mathbf{j}\Pi$, mentre ha per retta unita congiunta a G la polare g di G in Π. Per fare dunque che $\Pi\mathbf{D}\Pi$ sia una similitudine, necessariamente diretta, come facilmente vedesi (*), basterà fare che $\Pi\mathbf{J}_\infty\Pi$ sia la rotazione di un retto e che g sia all'infinito. Per fare poi che sia una similitudine, necessariamente inversa (**), $\Pi\mathbf{J}\Pi$ basterà fare che $\Pi\mathbf{j}\Pi$ sia un'involuzione simmetrica nello stesso tempo che g vada allo infinito. Ora $\Pi\mathbf{J}_\infty\Pi$ sarà la rotazione di un retto se Π è la corrispondenza polare rispetto ad un cerchio arbitrario, e $\Pi\mathbf{j}\Pi$ sarà, in vece, un'involuzione simmetrica se Π è la corrispondenza polare rispetto ad

(*) (**) In fatti, una corrispondenza lineare reale qualunque, non altera l'involutorietà o non di una proiettività, e non altera nemmeno il modo di separarsi di due coppie qualunque di elementi, cosicchè conserva la specie di una involuzione.

un'iperbole equilatera cogli assintoti paralleli alle rette unite al finito di $\mathbf{J}$. In entrambi i casi poi g andrà all'infinito se il centro del cerchio o quello dell'iperbole equilatera coincide col punto unito G di $\mathbf{D}$ o di $\mathbf{J}$.

Si può dunque dire quanto segue:

1° *Le similitudini dirette che non siano omotetie sono mutate in similitudini dirette soltanto dalle corrispondenze polari rispetto ai cerchi concentrici nel punto unito della similitudine; e tali cerchi possono essere reali o immaginarii.*

2° *Le similitudini inverse che non siano simmetrie sono, in vece, mutate in similitudini inverse soltanto dalle corrispondenze polari rispetto alle iperboli equilatere i cui assintoti siano le rette unite al finito della similitudine.*

13. Se la $\mathbf{D}$ è una $\mathbf{O}$, qualunque Π il cui centro sia il centro di $\mathbf{O}$ risponde, evidentemente, allo scopo. Se poi la $\mathbf{J}$ è una $\mathbf{S}$, risponde allo scopo qualunque iperbole equilatera di cui un assintoto sia l'asse di $\mathbf{S}$.

14. Se in 12, 1° la $\mathbf{D}$ è tale che per uno dei cerchi ivi considerati si ha $\Pi\mathbf{D}\Pi \equiv \mathbf{D}$, si avrà ciò per tutti; poichè allora la $\mathbf{D}$ è un $\mathbf{M}$.

Similmente se in 12, 2° la $\mathbf{J}$ è tale che per una delle iperboli equilatere ivi considerate si ha $\Pi\mathbf{J}\Pi \equiv \mathbf{J}$ si avrà ciò per tutte, poichè, detti H, K due punti qualunque, dei quali H sia preso sulla iperbole fondamentale di Π e K in modo che sia possibile costruire la $\mathbf{J}_1$ (n° 9) colle stesse rette unite della $\mathbf{J}$ data e nella quale ad H corrisponda K, come si ha $\mathbf{J}_1^{-1}\mathbf{J}\mathbf{J}_1 \equiv \mathbf{J}$ si avrà che K è sull'iperbole fondamentale di una Π_1 per cui $\Pi_1\mathbf{J}\Pi_1 \equiv \mathbf{J}$.

Sulla impossibile coesistenza della univocità e della continuità

nella corrispondenza che si può stabilire fra due spazi continui ad un numero differente di dimensioni.

Il sig. Cantor (*) ha dimostrato come il continuo ad n dimensioni abbia la medesima potenza del continuo lineare, come si possa cioè stabilire fra i punti dello spazio continuo ad n dimensioni ed i punti di una retta continua una corrispondenza univoca e reciproca, per modo, che ad ogni punto del continuo lineare corrisponda un punto ed uno solo del continuo ad n dimensioni, e reciprocamente. Evidentemente una tale corrispondenza si può in generale stabilire fra due spazi qualunque l'uno ad n l'altro ad m dimensioni.

(*) *Acta Mathematica*. T. II, pag. 311 e seg.

Siffatta corrispondenza però, quando n è diverso da m è necessariamente discontinua, vale a dire, a punti infinitamente vicini dello spazio ad n dimensioni non corrispondono sempre punti infinitamente vicini dello spazio ad m dimensioni.

Una dimostrazione di ciò fu data dal sig. LUROTH [1]; ne diede una il sig. THOMAE [2] fondata sopra considerazioni di geometria di posizione, in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni; CANTOR [3] medesimo lo dimostrò appoggiandosi pure a considerazioni geometriche nello spazio a 3 dimensioni e servendosi del ben noto teorema: Se $f(t)$ è una funzione univoca e continua di una variabile reale t, e per $t = t_1$ e $t = t_2$ si ha $f(t_1) < 0$, $f(t_2) > 0$, almeno per un certo valore t_0 compreso fra t_1 e t_2 è $f(t_0) = 0$. Un'altra dimostrazione pure mediante considerazioni geometriche fu data dal sig. NETTO [4] ed inoltre i sigg. PEANO [5] ed HILBERT [6] diedero, il primo mediante semplici considerazioni aritmetiche, il secondo mediante considerazioni geometriche esempi di curve capaci di riempire tutto un quadrato oppure tutto un cubo, in modo da conservare nella corrispondenza intercedente fra i punti della linea e del quadrato, o del cubo, la continuità, ma perdendosi necessariamente l'univocità.

Ora io credo di potere indipendentemente da ogni speciale considerazione aritmetica o geometrica, dimostrare in un modo semplicissimo questo medesimo teorema, servendomi all'uopo di un teorema del sig. CANTOR [7] intorno ai gruppi di enti.

Il teorema al quale mi riferisco è il seguente:

« Se in uno spazio Gn ad n dimensioni finito od infinito esiste un gruppo infinito di enti, ciascuno dei quali è continuo, occupa uno spazio determinato, ha, per quanto piccolo tutte le n dimensioni, e non si sovrappone nè tutto nè in parte ad alcun altro, questo gruppo di enti ha la 1ª potenza ».

Senza fermarmi a dimostrare questo teorema accennerò solo come essa riposa sulla trasformazione per raggi vettori reciproci dello spazio Gn in una figura Hn immersa nello spazio ad $n+1$ dimensioni la quale figura Hn ha un'estensione finita. Nel caso di $n = 1$ questo teorema diventa: Ogni gruppo di tratti $(\alpha \ldots \beta)$ distinti, continui, in-

[1] *Sitzungsber. d. phys. med. Societat*, 1878.
[2] GÖTT, *Nachrichten*, 1878.
[3] ID., *Id.*, 1879.
[4] *Giornale di Crelle*, B. 86.
[5] *Mathematische Annalen*, B. 36.
[6] *Id.*, B. 38.
[7] *Acta Mathematica*, T. II. pag. 366 e seg.

contrantisi al più nei loro estremi, e situati sopra una retta indefinita è numerabile ».

Ciò posto io enuncio il mio teorema così:

Teorema. — È impossibile, la coesistenza della univocità e della continuità nella corrispondenza che si può stabilire fra due spazi uno ad n l'altro ad m dimensioni per $n \neq m$ ».

Intanto è evidente l'impossibilità di una corrispondenza univoca fra uno spazio continuo ad una dimensione, una linea, ed uno spazio continuo a zero dimensioni, un punto, e quindi anche fra uno spazio continuo ad un numero qualunque di dimensioni ed un punto. Ora:

1° Uno spazio continuo a due dimensioni M_2 sia riferito univocamente e reciprocamente ad uno spazio ad una dimensione M_1 e suppongasi inoltre che la corrispondenza intercedente fra M_2 ed M_1 sia continua. Si prenda una porzione continua A_2 della superficie M_2: in M_1 non vi può corrispondere nè un punto, per quanto si è osservato sopra, nè un gruppo discontinuo di punti poichè per ipotesi la corrispondenza fra M_2 ed M_1 è continua, e quindi ad ogni porzione continua di M_2 deve corrispondere in M_1 una porzione continua. Sia A_1 il pezzo di linea M_1 che corrisponde al pezzo A_2 di superficie M_2. Si immagini una sezione a_2 di A_2: a questa sezione corrisponderà in A_1 un tratto continuo a_1, e ciò sempre per la supposta continuità della corrispondenza: si immagini una seconda sezione a'_2 di A_2, parallele alla sezione a_2. Poichè la corrispondenza per ipotesi è univoca e poichè nessun punto di a'_2 appartiene ad a_2, il tratto continuo a'_1 che corrisponde in A_1 alla sezione a'_2 di A_2 non avrà alcun punto comune col tratto a_1. Così continuando si vengono a segnare nell'intervallo A_1 infiniti tratticelli i quali soddisfano evidentemente alle condizioni dell'infrascritto teorema e che formano perciò un gruppo avente la potenza prima. Ora, il gruppo delle sezioni parallele $a_2\ a'_2 \ldots$ fatte nella porzione A_2 di M_2 non è affatto della potenza prima, anzi ha, come è chiaro, la potenza del continuo, quindi se fosse possibile una corrispondenza al tempo stesso univoca e continua fra M_2 ed M_1 sarebbe possibile una corrispondenza univoca fra due gruppi uno avente la potenza prima, l'altro quella del continuo. Dunque la corrispondenza che si può stabilire fra M_2 ed M_1 e quindi anche fra Mn $(n > 2)$ ed M_1 non può essere al tempo stesso univoca e continua.

2° Uno spazio continuo a 3 dimensioni M_3 sia riferito univocamente ad uno spazio a due dimensioni M_2, e la corrispondenza fra M_3 ed M_2 sia continua. Si prenda una porzione continua A_3 di M_3; ad essa corrisponderà in M_2 una porzione continua di superficie, A_2. Ma considerando, come nel caso precedente, tutte le infinite sezioni parallele di A_3, siccome ad ognuna di esse corrisponde in A_2 una porzione finita e distinta da ogni altra, si arriverebbe alla possibilità di una corrispondenza fra quelle infinite sezioni che formano un gruppo della potenza del continuo, e le infinite porzioni di A_2, le quali formano, pel noto teorema, un gruppo numerabile, il che è assurdo.

Col medesimo procedimento si dimostrerebbe il teorema in qualunque altro caso. Resta quindi perfettamente dimostrato che univocità e continuità non possono coesistere nella corrispondenza fra due spazi ad un numero diverso di dimensioni, e che quindi volendo conservare l'una si perde necessariamente l'altra.

LUIGI MILESI
Studente a Bologna.

RECENSIONI

Dott. GIULIO PETERSEN. — *Teoria delle equazioni algebriche.* Vol. II.

Versione italiana dei Prof. G. ROZZOLINO *e* G. SFORZA [1].

Il secondo volume della *Teoria delle equazioni algebriche* del Dottor Giulio Petersen, come il primo, del quale già ci occupammo in questa *Rivista* [2], è un ottimo libro che contiene molta materia in un numero di pagine relativamente piccolo, 188 in-12°. Si occupa dei limiti delle radici delle equazioni numeriche e del loro numero, della separazione delle radici, reali e complesse, e del loro calcolo: a questo scopo vi sono esposti, con utili considerazioni pratiche ed estensioni ed applicazioni, i teoremi di Descartes, Budan, Rolle, Sturm, Fourier, Newton e Sylvester, le teorie delle differenze e dell'interpolazione ed i metodi d'approssimazione di Newton, Lagrange, Bernoulli, Gräffe, Horner.

Tratta poi delle sostituzioni, dei gruppi e della risoluzione algebrica delle equazioni. In particolare si occupa delle sostituzioni cicliche, delle permutali fra loro e delle simili, dell'ordine dei sottogruppi per cui dà il teorema di Lagrange, delle sostituzioni permutabili ad un gruppo, dei gruppi simmetrico ed alternante, dei gruppi di Cauchy, del gruppo delle sostituzioni lineari e di altri gruppi speciali, della transitività e dell'intransività, del gruppo d'una funzione e del numero dei valori della medesima od indice del suo gruppo. Tratta poi succintamente, ma con chiarezza, la teoria di Galois; definisce il gruppo d'un'equazione, ne dà le

(1) Libreria B. Pellerano, Napoli 1892.
(2) Aprile-Maggio 1891.

proprietà principali e s'occupa della riduzione del medesimo per l'aggiunzione di quantità date o direttamente o quali radici d'equazioni date. Vi sono poi studiate, dal punto di vista della teoria precedente, le equazioni Abeliane e quelle di Galois per le quali vi è dimostrato che comprendono tutte le equazioni irreducibili di grado primo risolubili algebricamente. L'autore s'occupa poi delle equazioni con gruppo avente per ordine una potenza di numero primo e dà per le medesime un teorema che osserva potersi considerare come l'estensione d'un altro da lui dato nel primo volume per le equazioni risolubili per radicali quadratici: poscia si occupa dell'equazione di Hesse sui flessi di una cubica e chiude infine il libro con un'esposizione chiara del gruppo della monodromia d'un'equazione contenente un parametro nei coefficienti.

I traduttori hanno aggiunta un'appendice, di due paragrafi, relativa ai perfezionamenti apportati dai sigg. Encke e Carvallo al metodo di Gräffe per la risoluzione delle equazioni numeriche.

Dopo d'aver data un'idea del libro potrei fare sul medesimo alcune osservazioni relative specialmente alla concisione che è qualche volta eccessiva; ma mi dispensano dal far ciò le molte ed opportune note e citazioni dei traduttori. Per ciò che riguarda il testo osserverò solamente che il criterio dato a pag. 5 per calcolare un limite superiore delle radici di una equazione non è giusto come si riconosce facilmente applicandolo, p. es., all'equazione

$$x^3 - (a^2 + b^2 + ab)\,x - ab(a+b) = 0$$

per le radici della quale, supposti positivi $a^2 + b^2 + ab$ ed $ab(a+b)$, dovrebbe essere limite superiore un numero qualsiasi non minore di nessuno dei tre

$$1\,, \quad \sqrt{a^2 + b^2 + ab}\,, \quad \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{2ab(a+b)}\,.$$

In particolare, 29 dovrebbe essere un limite superiore delle radici dell'equazione

$$x^3 - 819x - 2430 = 0$$

mentre 30 è una radice.

Per le equazioni dette di Galois osserverò che già Abel, come osservai altra volta in una mia nota sulle equazioni irreducibili di grado primo risolubili per radicali [1], aveva dato il teorema [2]: « Si trois racines d'une « équation quelconque irréductible dont le degré est un nombre premier, « sont liées entre elle de sorte que l'une de ces racines puisse être ex- « primée rationellement par les deux autres, l'équation en question sera « toujours résoluble à l'aide de radicaux ».

All'osservazione fatta dai traduttori, a piè della pagina 96, sul gruppo ottenibile con la moltiplicazione delle sostituzioni di due gruppi aventi di

(1) *Rend. Circ. Mat.*, Palermo; seduta 13 marzo 1887.
(2) *Œuvres*, Christiania MDCCCLXXXI, tom. II, pag. 270: Lettera a Crelle, 18 ottobre 1828.

comune soltanto la sostituzione 1, aggiungerò che io ho date le seguenti proposizioni generali (¹), utilizzabili per la teoria della scala di composizione d'un gruppo, « Se due gruppi G ed H degli ordini μ e ν sono permutabili fra loro ed il gruppo L delle loro sostituzioni comuni è dell'ordine ε, l'ordine del gruppo minimo contenente G ed H come sottogruppi è $\frac{\mu \times \nu}{\varepsilon}$.

Se G ed H degli ordini μ e ν sono permutabili ed il gruppo (G, H) è dell'ordine λ, quelli hanno $\frac{\mu \times \nu}{\lambda}$ sostituzioni comuni.

Se G ed H degli ordini μ e ν hanno ε sostituzioni comuni e l'ordine di (G, H) è $\frac{\mu \times \nu}{\varepsilon}$, i gruppi G ed H sono permutabili ».

Finalmente farò una piccola osservazione ad una delle note. A pie' della pagina 112 dicono i traduttori che se i gruppi H e K sono isomorfi di più gradi, l'ordine di K sarà multiplo di quello di H; ma qui evidentemente i traduttori intesero considerare l'isomorfismo (1, n) perchè se s'avesse isomorfismo (m, n), se cioè ad ogni sostituzione di H ne corrispondessero n di K e ad ognuna di K ne corrispondessero m di H, la relazione tra gli ordini r ed s di questi gruppi sarebbe espressa dalla relazione

$$rn = sm.$$

Palermo, Aprile 1892. F. GIUDICE.

J.-F. BONNEL, Professeur au lycée de Lyon, *Essai de géométrie rationnelle.* — Paris, Librairie Mony et Cie, 1891.

Con questo lavoro, che fu comunicato alla *Société nationale d'éducation* di Lione in più sedute del 1889 e del 1890, l'A. si propone di stabilire i principî della geometria razionale, così da giustificare l'ordine e l'economia dei programmi ufficialmente adottati nei licei di Francia. Mi sembra, per lo meno, strano che dei programmi di insegnamento siano redatti in modo da esser sentito il bisogno di vederli giustificati, giacchè un programma, col determinare i limiti di un insegnamento e, sia pure, in generale il metodo da seguirsi, deve lasciar campo libero al docente di stabilire i fondamenti della scienza nel modo che crede migliore, sotto il doppio aspetto del rigore scientifico e della buona didattica.

Ma lasciando da parte una tal questione, e accettando lo scopo del lavoro, non sembra che questo scopo dall'A. sia stato raggiunto.

A fondamento dello studio della geometria elementare vogliono i programmi francesi che sian posti tre postulati, dei quali il primo stabilisce il concetto di retta come il più corto cammino fra due punti; il secondo quello del piano come una superficie che contiene interamente le rette che hanno due punti a comune con essa; e il terzo l'unicità della parallela condotta da un punto ad una retta, e l'A. tenta di ridurre i due primi a definizioni e il terzo a teorema.

(¹) *Rend. Circ. Mat.*, Palermo: 19 dicembre 1886.

Egli divide il suo lavoro in tre parti che intitola: *les principes, le programme, les éléments.*

Comincia nella prima collo stabilire i concetti di volume, di superficie, di linea, di punto; e lo fa, presso a poco, col metodo seguito in tutti i trattati moderni di geometria, considerando cioè questi elementi geometrici come astrazioni di corpi materiali, e, con un periodetto nel quale dice che « cette opération de l'esprit (l'astrarre)... démontre donc l'existence même de ces figures » supplisce a tutti i postulati che sono indispensabili per dare al geometra la materia prima colla quale edificherà la sua fabbrica.

Accenna in seguito al moto delle figure dicendo che bisognerà « être assuré de l'inaltérabilité de toutes ces figures, pendant qu'elles demeurent en place ou qu'elles sont mises en mouvement dans l'espace » e perciò stabilisce il concetto di *inestensibilità assoluta in tutti i sensi.* Ora è vero che il lavoro è intitolato *Essai*, ma non ostante avremmo, mi pare, il diritto di sapere in che modo questi concetti devono essere stabiliti, e in che forma espressi nell'insegnamento. Si devono fissare in altrettanti postulati? è possibile definirli? L'A. non lo dice; ma seguita invece aggiungendo che, in certi casi, occorre ammettere nelle figure una perfetta *flessibilità.* E il movente di ciò si capisce, giacchè egli sente in seguito la necessità di valersi dell'idea di *lunghezza* di una linea e tenta fissarla ricorrendo appunto a questa qualità che Egli concede alle figure.

L'idea di lunghezza Egli veramente l'ammette come intuitiva e come connessa all'altra di linea, ma per determinarla meglio imagina di attribuire a una data linea una rigidità e una inestensibilità perfetta, a un'altra, insieme all'inestensibilità una perfetta flessibilità, e, col sovrapporle, giudica se è il caso di dirle di lunghezza eguale, o l'una, o l'altra, di lunghezza maggiore. In questo metodo di definire la lunghezza, giacchè qui, e non altrove, starebbe la definizione, non avrei a ridire, se potessi intendere che vuol dire *inestensibile,* senza aver prima in testa l'idea di lunghezza, e ciò nè a me, nè, credo, ad altri, riesce; ma sembrami che molto a ridire dovrebbe trovarvi l'A. il quale, tre pagine dopo, stampa: « Il est devenu à la mode, depuis une trentaine d'années, de nier que la définition d'une grandeur doive précéder celle de l'égalité et de l'inégalité de deux grandeurs de cette espèce. Il n'est pas nécessaire, a-t-on dit, de définir les grandeurs qu'on introduit dans le calcul mathématique; il suffit d'avoir défini leur égalité et leur inégalité. Une semblable affirmation n'est qu'un paralogisme ».

Venendo alla retta l'A. esamina le varie definizioni che ne son state date. Critica, con giustizia, quella di Platone, e dice in seguito accettabile, per quanto manchi di giustificazione, quella di Euclide, purchè (come nell'altra del piano) alla frase *egualmente posta* che vi figura, si sostituisca l'altra *simmetricamente posta,* senza accorgersi che con questa variante, più di prima, la circonferenza e la superficie cilindrica a sezione retta circolare, possono rientrare rispettivamente nella definizione.

In seguito, e non a torto, critica l'altra del Duhamel « d'être une ligne indéfinie telle que par deux point donnés on n'en peut fair passer qu'une seule » la quale caratterizzerebbe in sostanza la retta con una proprietà negativa; e poi, abbastanza spiritosamente, critica anche quelle in cui si considera la retta come il luogo dei punti che rimangono immobili allorchè il corpo ruota attorno a due suoi punti, dicendo che, in fondo, esse si riducono a dire: la retta è quella linea che non gira, quando si fa girare, e su ciò mi pare che Egli sia nel giusto.

Nella seconda parte, che, come ho detto s'intitola *Le programme*, l'A., al principio, mostra di avere del postulato un concetto che in verità non si può accettare; per lui i postulati sono delle proposizioni che non si dimostrano, perchè la dimostrazione è troppo difficile, ma che si potrebbero dimostrare, e il loro numero è subordinato all'intelligenza degli uditori (?). E nemmeno si può, credo, accettare quello che Egli dice intorno agli assiomi, e porre come assioma unico della geometria l'esistenza del corpo esteso in 3 dimensioni. Se mai, sarà questo appunto un postulato. In ciò che segue di questa parte l'A. non fa che preparare quanto esporrà nella 3ª.

Questa è divisa in 3 altre che chiamerò capitoli e che trattano rispettivamente *della linea retta, dell'angolo e del piano, dell'angolo piano e delle parallele.*

Nel 1° capitolo dimostra il teorema: « Entre deux points donnés, il y a au moins une ligne qui est de longueur moindre que toutes les autres » dal quale deduce i corollari: « Toute partie d'une ligne de moindre longueur entre deux points donnés, est elle-même de moindre longueur entre ses extrémités; entre deux points donnés, toutes les lignes de moindre longueur sont égales en longueur » e si vale di queste proprietà per definire la distanza di due punti, come *la lunghezza di una linea di minima lunghezza che congiunge i due punti*, definizione che gli permette di dar quella della superficie sferica come il luogo dei punti corrispondenti alle varie posizioni di un estremo di una linea di minima lunghezza che si muove in tutti i modi possibili restando fisso l'altro estremo, e di enunciare le proprietà relative alle distanze dei punti dello spazio dal centro della sfera; deduzioni tutte che, mi pare, vorrebbero una più particolareggiata dimostrazione.

L'aver definito la sfera dà modo poi all'A. di dimostrare che per due punti passa un'unica linea che sia di minima lunghezza. La dimostrazione è un po' lunghetta e artificiosa, potrebbe certo esser migliorata sotto l'aspetto della chiarezza, ma in somma, non mi pare che, ammesse le proprietà precedenti, pecchi dal lato del rigore.

E dopo ciò il prof. Bonnel chiama *retta* questa linea di minima lunghezza e il 1° postulato dei programmi ufficiali, Egli dice, è giustificato.

Ma, prima di tutto, queste dimostrazioni si fondano tutte sul concetto di lunghezza che, come è stato detto, è stabilito in modo tutt'altro che soddisfacente, e poi, dànno idea di che sia la retta? Ci vuole, mi pare, molto

buona volontà ad identificare col pensiero la retta, della quale chi studia geometria ha sempre già chiara l'idea, per l'uso che si fa di questa parola nel linguaggio comune, con questa linea di minima lunghezza. Mi sembra che i giovani i quali iniziassero così lo studio della retta dovrebbero domandarsi: ma è proprio lei? e se questa osservazione scientificamente non ha molto valore, ne ha uno grande riguardo all'insegnamento.

Nel 2° capitolo della 3ª parte, diviso in due paragrafi, tratta dapprima dell'angolo e dopo una critica delle definizioni più in uso (critica meno fortunata di quella fatta per la retta) scarta naturalmente l'idea di piano dal concetto d'angolo e lo definisce così: « L'angle est la figure formée par deux droites qui partent du même point et vont chacune dans un sens diffèrent, *abstraction faite de tout ce qui n'appartient pas à l'une ou à l'autre de ces droites;* definizione dalla quale certo malamente si potrebbe dedurre la teoria dell'angolo e specialmente che gli angoli costituiscono una classe di grandezze.

Ma tiriamo via, tanto più che l'A. torna poi a parlare dell'angolo.

Partendo dalla definizione accennata, Egli dimostra il postulato dell'angolo: e su ciò non trovo gran chè a ridire perchè anche a me sembra che quella proposizione possa ridursi a teorema. Definisce come *base* di un angolo la porzione di retta che incontra i due lati a egual distanza dal vertice, e, senza aver detto se, e come, una porzione di retta si possa dividere per metà, chiama *mediana* dell'angolo la retta che congiunge il vertice colla metà della base. Nel 2° paragrafo dimostra: 1° che quando un angolo ruota attorno alla base, la superficie generata dalla mediana è il luogo dei punti equidistanti dagli estremi della base; 2° che tutte le superficie così generate sono sovrapponibili, qualunque sia la base e l'angolo che sono stati scelti; 3° che tutti i punti dello spazio sono distribuiti simmetricamente rispetto a questa superficie; 4° che una retta giace interamente nella superficie, se ha due punti a comune con essa, e in fine la proposizione inversa di questa. E dopo ciò, chiamando *piano* questa superficie, dice giustificato il 2° postulato dei programmi ufficiali.

Bisogna convenire che questa è la parte del lavoro che, pel modo con cui è condotta, più delle altre soddisfa il lettore.

Nella 3ª parte l'A., come ho detto, torna a parlare dell'angolo dando quest'altra definizione: « la figure obtenue par le mouvement d'une droite qui a tourné, dans un plan, autour d'un de ses points, en s'écartant plus an moins d'une droite fixe menée par le même point, c'est *l'angle plan* » nella quale trapela, senza essere definito affatto, il concetto di inclinazione. In seguito chiamando angolo nullo quello in cui l'inclinazione è nulla (?) è data come teorema la proposizione: « Si un angle plan est nul, le deux droites qui le forment doivent avoir tous leurs points commun ou n'en avoir aucun », la quale per me equivale all'altra: un angolo è nullo, quando è nullo.

Passa poi alla considerazione delle parallele: le definisce nel modo consueto e tenta giustificare la definizione con due teoremi, il primo dei quali prova l'esistenza della parallela condotta da un punto dato a una data retta (esistenza che deduce dalla proprietà che due rette compiane perpendicolari a una terza non possono incontrarsi) e il secondo vorrebbe provare che di parallele non se ne può condurre che una. Ma questa dimostrazione, come è facile prevedere, manca totalmente di rigore; già si fonda sul concetto di angolo nullo, che è stato malamente definito, e poi ammette che allorquando una retta sia in posizione tale da fare con un'altra un angolo nullo, essa possa spostarsi nel piano delle due rette, così da far coll'altra un angolo *minimo* diverso da zero; come se potesse esistere un minimo diverso da zero per una grandezza che decresce continuamente e indefinitamente.

La proprietà della parallela unica rimane quindi un postulato e null'altro. Tutte le considerazioni che l'A. fa nelle tre pagine che seguono, e che intitola *conclusion*, e nelle quali tratta Lobatschewsky e Bolyai certo con troppa leggerezza, perdono perciò qualunque importanza

Concludendo mi pare dunque che i programmi francesi per lo studio della geometria nei licei, aspettino ancora quella giustificazione che per essi il Prof. Bonnel crede indispensabile.

Carrara, 25 aprile 1892.

G. M. Testi.

Sopra la raccolta di formule.

II.

Ricevemmo molte correzioni ed aggiunte alle formule pubblicate, e ringraziamo in modo speciale i signori professori:

Burali-Forti, Torino; Cameletti, Terni; Castellano, Torino; De Amicis, Alessandria; Gerbaldi, Palermo; Giudice, Palermo; Scarpis, Chieri; Vivanti, Mantova; ecc.

Intanto che si ordineranno queste formule, continuiamo ad invitare i lettori a comunicarci tutte quelle osservazioni che possono contribuire a migliorare questa raccolta.

Torino, Giugno 1892.

La Redazione.

Dipendenza fra alcune proprietà notevoli delle relazioni fra enti di un medesimo sistema [1].

Nota di E. De Amicis *ad Alessandria.*

Indicando colle lettere minuscole o maiuscole latine enti qualunque di un dato sistema, *non escludendo che lettere diverse possano indicare un medesimo ente,* e indicando col segno $\supset$ una *relazione* data qualsiasi, la quale però, *rispetto agli enti di quel sistema,* sia *completamente possibile* e *completamente determinata,* cioè tale che, dato b, si possano sempre trovare almeno a e c pei quali coesistano le due *corrispondenze* $a \supset b$, $b \supset c$, e almeno A e C pei quali non sussista nessuna delle due corrispondenze $A \supset b$, $b \supset C$, diremo che la relazione $\supset$, *rispetto agli enti del sistema dato,* è:

1. *Riflessiva,* quando si ha sempre $a \supset a$.

2. *Conversiva,* quando, tutte le volte che si ha $a \supset b$, segue $b \supset a$.

3. *Transitiva,* quando, tutte le volte che si ha $a \supset b$, se si ha pure $b \supset c$, segue $a \supset c$.

4. *Comparativa,* quando, tutte le volte che si ha $a \supset b$, se si ha pure $a \supset c$, segue $b \supset c$.

5. *Adequativa,* quando, tutte le volte che si ha $a \supset c$, se si ha pure $b \supset c$, segue $a \supset b$.

Equiparativa, quando possiede contemporaneamente tutte *le cinque proprietà fondamentali ora definite* [2].

1'. *Anti-riflessiva,* quando non si ha mai $a \supset a$.

2'. *Anti-conversiva,* quando, tutte le volte che si ha $a \supset b$, segue che non si ha $b \supset a$.

3'. *Anti-transitiva,* quando, tutte le volte che si ha $a \supset b$, se si ha pure $b \supset c$, segue che non si ha $a \supset c$.

4'. *Anti-comparativa,* quando, tutte le volte che si ha $a \supset b$, se si ha pure $a \supset c$, segue che non si ha $b \supset c$.

5'. *Anti-adequativa,* quando, tutte le volte che si ha $a \supset c$, se si ha pure $b \supset c$, segue che non si ha $a \supset b$.

Anti-equiparativa, quando possiede contemporaneamente tutte *le cinque proprietà anti-fondamentali* adesso definite.

Designeremo le proprietà 3, 4, 5 col nome comune di *proprietà mediative* e le 3', 4', 5' con quello di *proprietà anti-mediative* [3].

Inoltre, tutte le volte che a ha rispetto a b la relazione $\supset$, cioè tutte le volte che sussiste la corrispondenza $a \supset b$, diremo che b ha rispetto ad a la relazione $\subset$, scriveremo $b \subset a$, e chiameremo $\supset$ e $\subset$ *relazioni inverse fra loro.* Tutte le volte poi che a non ha rispetto a b la relazione $\supset$, cioè tutte le volte che non sussiste la corrispondenza $a \supset b$, diremo che a ha rispetto a b la relazione $\bar{\supset}$, scriveremo $a \bar{\supset} b$, e chiameremo $\supset$ e $\bar{\supset}$ *relazioni contrarie fra loro.* Ne segue che $\bar{\supset}$ e $\bar{\subset}$ saranno relazioni fra loro inverse, e $\subset$ e $\bar{\subset}$ relazioni contrarie. Finalmente chiameremo $\supset$ e $\bar{\subset}$ *relazioni antinomiali fra loro.* Adunque una relazione $\supset$, pel solo fatto che essa si verifica fra due enti e non si verifica per altri due, dà luogo a tre altre relazioni *collegate con essa*, cioè *l'inversa* $\subset$, *la contraria* $\bar{\supset}$, e *l'antinomiale* $\bar{\subset}$, la quale è al tempo stesso inversa della contraria $\bar{\supset}$ e contraria dell'inversa $\subset$; per contrapposizione la $\supset$ si chiamerà *relazione diretta* ([4]).

Scopo di questa nota è lo studio della dipendenza fra le proprietà fondamentali e anti-fondamentali di una relazione e delle tre relazioni collegate con essa.

« Teorema I. Una relazione conversiva e transitiva rispetto agli enti di un sistema è equiparativa rispetto ad essi ».

Infatti: dato h, esisterà, per ipotesi fatta, almeno k, tale che sia $h \supset k$. Se l'ente indicato colla lettera k è lo stesso ente h, si avrà senz'altro $h \supset h$; altrimenti, poichè tutte le volte che si ha $h \supset k$ si ha pure, per la 2, $k \supset h$, seguirà, per la 3, $h \supset h$; dunque: la relazione data è riflessiva ([5]).

Inoltre, tutte le volte che si ha $x \supset y$, si avrà, per la 2, $y \supset x$, e quindi, se si ha pure $x \supset z$, sarà, per la 3, $y \supset z$; dunque: la relazione data è comparativa.

Finalmente, se si ha $v \supset w$, si avrà, per la 2, $w \supset v$; e perciò, tutte le volte che si ha $u \supset w$, se si ha pure $v \supset w$, si avrà eziandio $w \supset v$, e quindi, per la 3, sarà $u \supset v$; dunque: la relazione data è adequativa.

« Teorema II. Una relazione comparativa rispetto agli enti di un sistema è equiparativa rispetto ad essi ».

Infatti: dato q, esisterà, per ipotesi fatta, almeno p, tale che sia $p \supset q$. Se l'ente indicato colla p è lo stesso ente q, si avrà tosto $q \supset q$; altrimenti, poichè tutte le volte che si ha $p \supset q$, si ha, per ipotesi, $p \supset q$, seguirà, per la 4, $q \supset q$, dunque: la relazione data è riflessiva.

Perciò si ha sempre $a \supset a$. Dunque, tutte le volte che si ha $a \supset b$, si ha pure $a \supset a$, e quindi, per la 4, sarà eziandio $b \supset a$; dunque: la relazione data è conversiva.

Per questa ragione, tutte le volte che si ha $r \supset s$, sarà $s \supset r$, e quindi, se si ha pure $s \supset t$, sarà, per la 4, $r \supset t$; dunque la relazione data è transitiva.

Finalmente: la relazione data è adequativa, in virtù del teorema I.

« Teorema III. Una relazione adequativa rispetto agli enti di un sistema è equiparativa rispetto ad essi ([6]).

Infatti: dato m, esisterà, per ipotesi fatta, almeno n, tale che sia $m \supset n$. Se l'ente indicato colla lettera n è lo stesso ente m, si avrà immediatamente $m \supset m$; altrimenti, poichè tutte le volte che si ha $m \supset n$, si ha, per ipotesi, $m \supset n$, seguirà, per la 5, $m \supset m$; dunque la relazione data è riflessiva.

Perciò si ha sempre $y \supset y$, e quindi, se si ha pure $x \supset y$, sarà, per la 5, $y \supset x$; dunque la relazione data è conversiva.

Per questa ragione, se si ha $e \supset f$, si avrà $f \supset e$; e perciò, tutte le volte che si ha $d \supset e$, se si ha pure $e \supset f$, si avrà eziandio $f \supset e$, e quindi, per la 5, sarà $d \supset f$; dunque $\supset$ è transitiva.

Finalmente: la relazione data è comparativa, in virtù del teorema I.

« *Osservazione.* — Da due corrispondenze coesistenti, e riferentisi ad una stessa relazione equiparativa, è lecito dedurre una terza corrispondenza avente per *membri* un ente dell'una e un ente dell'altra, allora, ed allora soltanto, quando gli altri due enti siano membri di un'altra corrispondenza ancora, riferentesi a quella medesima relazione ».

Infatti: data la simultaneità delle due corrispondenze $a \supset b$, $A \supset B$, se supponiamo che si abbia $a \supset A$, ciò sarà *sufficiente* per poterne dedurre $b \supset B$. Ed invero, se l'ente indicato colla lettera A, è lo stesso ente a, sarà subito $b \supset B$ per la 4; altrimenti, per la 4, sarà $b \supset A$, e allora, per la 3, sarà $b \supset B$.

Viceversa, data ancora la coesistenza delle due corrispondenze $a \supset b$, $A \supset B$, perchè possa aversi anche $b \supset B$ sarà *necessario* che sia $a \supset A$.

E diffatti, se l'ente indicato colla lettera B è lo stesso ente b, si avrà tosto $a \supset A$, per la 5; altrimenti, pure per la 5, sarà $A \supset b$, e allora, sempre per la 5, sarà $a \supset A$.

Così rimane dimostrato quanto si voleva, poichè tutti gli altri casi, per la 2, si riducono a quello che ora abbiamo considerato.

I teoremi I, II, III stabiliscono la dipendenza cercata fra le cinque proprietà fondamentali; nè possono sussistere in proposito altri teoremi. Infatti proveremo con esempi che dal sapere soltanto che una relazione è riflessiva, o conversiva, o transitiva, od anche contemporaneamente riflessiva e conversiva, ovvero riflessiva e transitiva, non si può inferire che essa possieda qualche altra proprietà fondamentale. E pure con esempi proveremo l'esistenza di relazioni equiparative e quella di relazioni le quali non godono nessuna proprietà fondamentale quantunque siano completamente possibili e completamente determinate rispetto agli enti di un dato sistema.

Cerchiamo ora la dipendenza fra le proprietà anti-fondamentali.

« Teorema IV. Una relazione, la quale gode una delle tre proprietà « anti-mediative, gode pure le altre due, rispetto agli enti d'uno stesso « sistema ».

Infatti: 1° Se $\supset$ è anti-transitiva, sarà anti-comparativa, perchè tutte le volte che si ha $a \supset b$, se si ha pure $a \supset c$, deve seguirne $b \bar{\supset} c$, altrimenti, poichè per ipotesi si ha $a \supset b$, e si avrebbe pure $b \supset c$, dovrebbe seguirne, per la 3′, $a \bar{\supset} c$, mentre si è supposto $a \supset c$; sarà anti-adequativa, perchè tutte le volte che si ha $x \supset z$, se si ha pure $y \supset z$, deve seguirne $x \bar{\supset} y$, altrimenti, poichè si avrebbe $x \supset y$ e si ha pure $y \supset z$, dovrebbe seguirne per la 3′, $x \bar{\supset} z$, mentre è $x \supset z$.

2° Se $\supset$ è anti-comparativa, sarà anti-transitiva, perchè tutte le volte che si ha $r \supset s$, se si ha pure $s \supset t$, deve seguirne $r \bar{\supset} t$, altrimenti, poichè per ipotesi si ha $r \supset s$ e si avrebbe pure $r \supset t$, dovrebbe seguirne, per la 4′, $s \bar{\supset} t$, mentre è $s \supset t$; sarà anti-adequativa perchè è anti-transitiva.

3° Se $\supset$ è anti-adequativa, sarà anti-comparativa, perchè tutte le volte che si ha $u \supset v$, se si ha pure $u \supset w$, deve seguirne $v \bar{\supset} w$, altrimenti, poichè per ipotesi si ha $u \supset w$ e si avrebbe pure $v \supset w$, dovrebbe seguirne, per la 5′, $u \bar{\supset} v$, mentre è $u \supset v$; sarà anti-transitiva perchè anti-comparativa.

« Teorema V. Una relazione anti-conversiva o anti-mediativa è « anti-riflessiva, rispetto agli enti d'un medesimo sistema ».

Infatti non sarà mai $a \supset a$; poichè se $\supset$ è anti-conversiva e si avesse $a \supset a$, dovrebbe seguirne $a \bar{\supset} a$; parimenti, se $\supset$ è anti-mediativa e si avesse $a \supset a$, poichè per ipotesi si ha $a \supset a$, dovrebbe seguirne $a \bar{\supset} a$.

« Teorema VI. Una relazione anti-conversiva e anti-mediativa è « anti-equiparativa, rispetto agli enti di un medesimo sistema ».

Infatti pel teorema V la relazione sarà anti-riflessiva; per ipotesi è anti-conversiva; e pel teorema IV sarà anti-transitiva, anti-comparativa, anti-adequativa.

I teoremi IV, V, VI, stabiliscono la dipendenza fra le proprietà anti-fondamentali; nè possono sussistere a tale riguardo altri teoremi. Infatti proveremo con esempi che dal sapere soltanto che una relazione è anti-riflessiva non si può dedurre che essa goda altra proprietà anti-fondamentale, e che dal sapere che una relazione è anti-conversiva o anti-mediativa si può solamente, pel teorema V, concludere che essa è anti-riflessiva, ma non si può, rispettivamente, arguire che essa sia anti-mediativa o anti-conversiva. E pure con esempi proveremo la esistenza di relazioni anti-equiparative e quella di relazioni che non

possiedono alcuna proprietà anti-fondamentale quantunque siano completamente possibili e completamente determinate rispetto agli enti di un dato sistema.

Ed ora studiamo la dipendenza reciproca fra le proprietà fondamentali e anti-fondamentali.

« Teorema VII. Rispetto agli enti di un medesimo sistema una « relazione non può contemporaneamente possedere una proprietà fon- « damentale e la proprietà anti-fondamentale corrispondente ».

Segue immediatamente dalle definizioni e dal principio di contraddizione.

« Corollario. Una relazione la quale, rispetto agli enti di un dato « sistema, è adequativa, ovvero comparativa, ovvero contemporanea- « mente transitiva e conversiva, non può possedere, rispetto a quegli « enti, alcuna proprietà anti-fondamentale ».

Segue dal teorema precedente e dai teoremi III, II, I, rispettivamente.

« Teorema VIII. Una relazione riflessiva, rispetto agli enti di un « dato sistema, non può possedere alcuna proprietà anti-fondamentale « rispetto ad essi ».

Segue dai teoremi V e VII.

« Teorema IX. Una relazione transitiva e anti-riflessiva rispetto agli « enti di un dato sistema è pure anti-conversiva rispetto ad essi ».

Infatti tutte le volte che si ha $a \supset b$ deve seguirne $b \bar{\supset} a$, altrimenti, poichè per ipotesi si ha $a \supset b$ e si avrebbe pure $b \supset a$, ne seguirebbe, per la 3, $a \supset a$, e quindi la relazione considerata non sarebbe anti-riflessiva.

I teoremi VII, VIII, IX stabiliscono la dipendenza reciproca fra le proprietà fondamentali e anti-fondamentali e con esempi proveremo che non possono sussistere in proposito altri teoremi.

Ed ora studiamo la dipendenza fra le proprietà fondamentali e anti-fondamentali di una relazione e quelle delle relazioni collegate.

Anzitutto si osservi che dalle definizioni discende subito che:

« Le relazioni collegate con una relazione completamente possibile « e completamente determinata, rispetto ad un sistema di enti, sono « completamente possibili e completamente determinate rispetto allo « stesso sistema ».

Ciò posto, si hanno, riguardo allo studio propostici, le seguenti proposizioni.

« Teorema X. Due relazioni inverse possiedono, rispetto ad un me- « desimo sistema di enti, le stesse proprietà fondamentali e anti-fonda- « mentali ».

Infatti: Se $\supset$ è riflessiva, sarà sempre $a \supset a$, cioè $a \subset a$, dunque $\subset$ sarà riflessiva. Se $\supset$ è conversiva, da $a \subset b$, cioè $b \supset a$, seguirà $a \supset b$, cioè $b \subset a$, dunque $\subset$ sarà conversiva. Se $\supset$ è transitiva, lo sarà anche $\subset$, cioè, tutte le volte che si ha $a \subset b$, se si ha pure $b \subset c$, seguirà $a \subset c$, poichè l'ipotesi or fatta equivale al supporre che si abbia $c \supset b$ e sia pure $b \supset a$, e perciò, per la 3, sarà $c \supset a$, cioè $a \subset c$. Se $\supset$ è comparativa, sarà, pel teorema II, conversiva e transitiva e allora anche $\subset$ sarà conversiva e transitiva e quindi, pel teorema I, comparativa. Se $\supset$ è adequativa, sarà, pel teorema III, comparativa e allora anche $\subset$ sarà comparativa e quindi, pel teorema II, adequativa. Se $\supset$ è anti-riflessiva, sarà sempre $a \overline{\supset} a$, cioè $a \overline{\subset} a$, dunque $\subset$ sarà anti-riflessiva. Se $\supset$ è anti-conversiva, da $a \subset b$, cioè $b \supset a$, seguirà $a \overline{\supset} b$, cioè $b \overline{\subset} a$, dunque $\subset$ sarà anti-conversiva. Finalmente se $\supset$ ha una delle tre proprietà anti-mediative, pel teorema IV, avrà anche le altre due e perciò sarà certamente anti-transitiva e lo sarà anche $\subset$, cioè tutte le volte che si ha $a \subset b$, se si ha pure $b \subset c$, seguirà $a \overline{\subset} c$, perchè l'ipotesi or fatta equivale a supporre che si abbia $c \supset b$ e sia pure $b \supset a$, e perciò, per la 3', sarà $c \overline{\supset} a$ cioè $a \overline{\subset} c$; $\subset$, essendo anti-transitiva, sarà, pel teorema IV, anti-comparativa e anti-adequativa.

« Teorema XI. Se di due relazioni contrarie una è riflessiva, o « conversiva, o anti-riflessiva, rispetto ad un sistema di enti, l'altra sarà, « rispettivamente, anti-riflessiva, o conversiva, o riflessiva, rispetto a « quel medesimo sistema ».

Infatti: Se $\supset$ è riflessiva sarà sempre $a \supset a$, cioè non sarà mai $a \overline{\supset} a$; dunque $\overline{\supset}$ sarà anti-riflessiva. Se $\supset$ è conversiva, anche $\overline{\supset}$ lo sarà, cioè tutte le volte che si ha $a \overline{\supset} b$ deve seguire $b \overline{\supset} a$; altrimenti sarebbe $b \supset a$ e quindi, per la 2, $a \supset b$, mentre è $a \overline{\supset} b$. Se $\supset$ è anti-riflessiva non sarà mai $a \supset a$, cioè sarà sempre $a \overline{\supset} a$; dunque $\overline{\supset}$ sarà riflessiva.

« Corollario 1°. Se di due relazioni contrarie una è riflessiva, o « conversiva e transitiva, o comparativa, o adequativa, rispetto agli enti « di un sistema, l'altra, rispetto a questi, non potrà possedere altra « proprietà fondamentale che quella, al più, di essere o conversiva o « transitiva ».

Difatti in ognuno dei quattro casi considerati, o per ipotesi o pei teoremi I, II, III, rispettivamente, una delle relazioni sarebbe riflessiva e perciò la contraria anti-riflessiva e quindi, pel teorema VII, non riflessiva, e per conseguenza nè adequativa, nè comparativa, nè contemporaneamente conversiva e transitiva.

« Corollario 2°. Se di due relazioni contrarie una è riflessiva e non « conversiva, rispetto agli enti di un sistema, l'altra, rispetto a questi, « non potrà possedere altra proprietà fondamentale che quella al più di « essere transitiva ».

Segue dal corollario 1° e dall'osservare che se $\supset$ non è conversiva, nemmeno $\overline{\supset}$ potrà esserlo, e ciò pel teorema precedente.

« Corollario 3°. Se di due relazioni contrarie una è riflessiva e con- « versiva rispetto agli enti di un sistema, l'altra non avrà altra proprietà « fondamentale, rispetto ad essi, che quella d'essere conversiva ».

Segue dal corollario 1°, e dall'osservare che se $\supset$ è conversiva, dovrà esserlo anche $\overline{\supset}$, e ciò pel teorema precedente.

« Corollario 4°. Due relazioni contrarie non possono possedere en- « trambe proprietà anti-fondamentali, rispetto ad un medesimo sistema « di enti ».

E difatti, pel teorema V, se $\supset$ e $\overline{\supset}$ possedessero entrambe qualche proprietà anti-fondamentale, sarebbero entrambe anti-riflessive contrariamente al teorema precedente e VII.

« Corollario 5°. Se di due relazioni contrarie una è anti-conversiva, « rispetto agli enti di un sistema, l'altra non avrà, rispetto a questi, « oltre la proprietà riflessiva, altra proprietà fondamentale o anti-fon- « damentale che quella, al più, di essere transitiva.

Segue dal teorema V, dal teorema precedente, e dai corollari 1° e 4°.

« Teorema XII. Due relazioni contrarie non possono essere una « anti-conversiva e non transitiva e l'altra transitiva, rispetto agli enti « di un medesimo sistema ».

Infatti se $\supset$ non è transitiva potremo, almeno una volta, avere contemporaneamente $a \supset b$, $b \supset c$, $a \overline{\supset} c$. Ma se $\supset$ è anti-conversiva da $a \supset b$ segue $b \overline{\supset} a$, e poichè si ha pure $a \overline{\supset} c$, ne risulterebbe se $\overline{\supset}$ fosse transitiva, $b \overline{\supset} c$, mentre invece si ha $b \supset c$.

« Corollario 1°. Due relazioni contrarie non possono essere una « anti-equiparativa e l'altra transitiva rispetto agli enti d'un medesimo « sistema ».

Non è che un caso particolare del teorema che precede.

« Corollario 2°. Se di due relazioni contrarie una è anti-conversiva « e l'altra è transitiva rispetto agli enti di un medesimo sistema, anche « la prima sarà transitiva rispetto a quelli ».

Non è che una maniera diversa di enunciare il teorema XII.

« Teorema XIII. Due relazioni contrarie non possono essere una « anti-mediativa e non conversiva e l'altra transitiva, rispetto agli enti « di un medesimo sistema ».

Infatti, se $\supset$ non è conversiva, potremo, almeno una volta avere contemporaneamente $b \supset c$, $c \overline{\supset} b$. Per le ipotesi fatte esisterà certamente a tale che si abbia $a \supset b$; e poichè si ha pure $b \supset c$, seguirà, se $\supset$ è anche anti-mediativa, $a \overline{\supset} c$; e giacchè si ha pure $c \overline{\supset} b$, ne risulterebbe, se $\overline{\supset}$ fosse transitiva, $a \overline{\supset} b$, mentre si ha $a \supset b$.

« Corollario 1°. Il corollario del 1° teorema XII ».

« Corollario 2°. Se di due relazioni contrarie una è anti-mediativa « e l'altra è transitiva rispetto agli enti di un medesimo sistema, en- « trambe, rispetto a questi, saranno conversive e la seconda equiparativa ».

Viene ad essere, col sussidio dei teoremi XI e I, una maniera diversa di enunciare il teorema XIII.

« Teorema XIV. Se due relazioni sono antinomiali fra loro, ciascuna « possiede, rispetto ad un medesimo sistema di enti, tutte, e solamente, « le proprietà fondamentali e anti-fondamentali della contraria dell'altra ».

Difatti la relazione $\bar{\subset}$, antinomiale di $\supset$ è l'inversa di $\bar{\supset}$ e possiede, pel teorema X, tutte, e sole, le proprietà di questa, cioè della contraria di $\supset$.

I cinque teoremi precedenti, coi loro corollari, unitamente agli esempi coi quali termineremo questa nota, sono sufficienti per completare lo studio che ci siamo proposti, e che perciò può dirsi terminato; crediamo tuttavia non inutile aggiungere i tre seguenti teoremi riferentisi a *relazioni fra relazioni.*

Diremo che due relazioni $\supset$ e $]$, completamente possibili e completamente determinate rispetto agli enti di un medesimo sistema, sono *equivalenti* fra loro, rispetto a quel sistema, quando le due corrispondenze $a \supset b$, $a \,] \, b$ sono sempre conseguenza l'una dell'altra.

« Teorema XV. Due relazioni inverse sono equivalenti rispetto ad « un sistema di enti allora, ed allora soltanto, quando sono conversive « rispetto a questi. »

Intanto, pel teorema X, $\supset$ e $\subset$ o sono conversive entrambe, oppure entrambe non conversive. Nel primo caso tutte le volte che si ha $a \supset b$ si ha pure $b \supset a$, cioè $a \subset b$, e tutte le volte che si ha $a \subset b$, cioè $b \supset a$, si ha $a \supset b$, dunque $\supset$ e $\subset$ sono equivalenti. Nel secondo caso, $\supset$ non essendo conversiva, avremo almeno una volta $a \supset b$ e $b \bar{\supset} a$ contemporaneamente, vale a dire $a \supset b$ e $a \bar{\subset} b$, cioè, mentre si ha $a \supset b$, non si ha $a \subset b$, dunque $\supset$ e $\subset$ non saranno equivalenti.

« Teorema XVI. Due relazioni contrarie non possono essere equi- « valenti rispetto ad un sistema di enti. »

Infatti, se $\bar{\supset}$ e $\supset$ fossero equivalenti, tutte le volte che è $a \supset b$, dovrebbe anche essere $a \bar{\supset} b$, cioè non essere $a \supset b$.

« Teorema XVII. Due relazioni antinomiali non possono essere « equivalenti rispetto ad un sistema di enti. »

Infatti, se $\bar{\subset}$ e $\supset$ fossero equivalenti, tutte le volte che è $a \supset b$, dovrebbe anche essere $a \bar{\subset} b$, vale a dire, tutte le volte che è $b \subset a$, dovrebbe essere $a \bar{\subset} b$, dunque $\subset$ sarebbe anti-conversiva. Inoltre, tutte le volte che è $a \bar{\subset} b$ dovrebbe anche essere $a \supset b$, vale a dire, tutte le

volte che è $a \bar{\subset} b$, dovrebbe essere $b \subset a$, cioè non essere $b \bar{\subset} a$, dunque anche $\bar{\subset}$ sarebbe anti-conversiva, contrariamente al corollario 4° del teorema XI.

Dai tre teoremi precedenti discende subito il seguente:

« Corollario. Due relazioni collegate sono equivalenti rispetto ad « un sistema di enti allora, ed allora soltanto, quando sono inverse fra « loro e conversive rispetto agli enti di quel sistema. »

Riassumendo, possiamo concludere che: « Data una relazione com- « pletamente possibile e completamente determinata rispetto agli enti « di un sistema, essa dovrà, riguardo al possedere o no proprietà fon- « damentali o anti-fondamentali, trovarsi in uno, e in uno solamente, « dei quattordici casi seguenti; nè potrà verificarsi a tale riguardo « alcun altro caso. »

« 1° *La relazione non ha proprietà anti-fondamentali nè fon- « damentali.* »

Esempi: *quadrato di*, pel sistema costituito dai numeri reali, esclusi i negativi; *non potenza superiore alla prima di*, per lo stesso sistema, intendendo parlare di potenza ad esponente diverso da zero, intero e positivo.

« 2° *La relazione non ha proprietà anti-fondamentali e delle « fondamentali possiede soltanto la riflessiva.* »

Esempi: *od eguale a, o doppio di*, pel sistema costituito dai numeri reali; *nè doppio, nè quadruplo di*, pel sistema costituito dai numeri reali, escluso *0; nè doppio, nè triplo, nè metà di*, per lo stesso sistema; *non quadrato di*, pel sistema costituito dai numeri reali, esclusi *1, 0* e i negativi; *non avviluppato da*, nel sistema costituito da tutti i poligoni non intrecciati che si possono costruire in un medesimo piano, dicendo a avviluppato da b quando tutti i punti interni rispetto ad a sono anche interni rispetto a b e non tutti i punti esterni rispetto ad a sono anche esterni rispetto a b.

« 3° *La relazione non ha proprietà anti-fondamentali e delle « fondamentali possiede soltanto la conversiva.* »

Esempio: *reciproco di*, pei numeri complessi ordinari, escluso *0*.

« 4° *La relazione non ha proprietà anti-fondamentali e delle « fondamentali possiede soltanto la transitiva.* »

Esempi: *potenza superiore alla prima di*, pel sistema già considerato nel secondo esempio relativo al caso 1°; *sommante o pari o fratto con, e contemporaneamente o eguale a, o doppio, o quadruplo, o 8-plo, o 16-plo, ..., di*, pel sistema

$$....., \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2, 4, 8, 16, ...$$

« 5° *La relazione non ha proprietà anti-fondamentali e delle* « *fondamentali possiede soltanto la riflessiva e la conversiva.* »

Esempi: *non perpendicolare a,* per le rette dello spazio; *non perpendicolare a,* per le rette di un medesimo piano.

« 6° *La relazione non ha proprietà anti-fondamentali e delle* « *fondamentali possiede soltanto la riflessiva e la transitiva.* »

Esempi: *divisibile per,* fra gli interi aritmetici, escluso *0; non maggiore di,* fra i segmenti.

« 7° *La relazione non ha proprietà anti-fondamentali ed è* « *equiparativa.* »

Esempi: *eguale a,* fra i segmenti; *sommante pari con,* fra gl'interi aritmetici.

« 8° *La relazione non ha proprietà fondamentali e delle anti-* « *fondamentali possiede soltanto la anti-riflessiva.* »

Esempi: *nè eguale, nè doppio,* pel sistema già considerato nel primo esempio relativo al caso 2°; *non divisibile per,* pel sistema già considerato nel primo esempio relativo al caso 6°.

« 9° *La relazione non ha proprietà fondamentali e delle anti-* « *fondamentali possiede soltanto l'anti-riflessiva e la anti-conversiva.* »

Esempio: *o doppio, o quadruplo di,* pel sistema già considerato nel secondo esempio relativo al caso 2°.

« 10. *La relazione non ha proprietà fondamentali e delle anti-* « *fondamentali possiede soltanto la anti-riflessiva e le tre proprietà* « *anti-mediative.* »

Esempio: *o doppio, o triplo, o metà di,* pel sistema già considerato nel terzo esempio relativo al caso 2°.

« 11. *La relazione non ha proprietà fondamentali ed è anti-* « *equiparativa.* »

Esempio: *quadrato di,* pel sistema già considerato nel quarto esempio relativo al caso 2°.

« 12. *La relazione possiede, delle proprietà fondamentali, soltanto* « *la conversiva e delle anti-fondamentali la anti-riflessiva.* »

Esempi: *perpendicolare a,* pel sistema già considerato nel primo esempio relativo al caso 5°; *non eguale a,* pel sistema già considerato nel primo esempio relativo al caso 7°.

« 13. *La relazione possiede, delle proprietà fondamentali, soltanto* « *la conversiva e delle anti-fondamentali la anti-riflessiva e le tre* « *anti-mediative.* »

Esempi: *perpendicolare a,* pel sistema già considerato nel secondo esempio relativo al caso 5°; *non sommante pari con,* pel sistema già considerato nel secondo esempio relativo al caso 7°.

« 14. *La relazione possiede, delle proprietà fondamentali, soltanto*

« *la transitiva e delle anti-fondamentali la anti-riflessiva e la anti-* « *conversiva.* »

Esempi: *avviluppato da,* pel sistema già considerato nel quinto esempio relativo al caso 2°; *maggiore di,* pel sistema già considerato nel secondo esempio relativo al caso 6°.

Che non possano, riguardo alla sussistenza delle sole proprietà fondamentali, verificarsi che i soli sei casi 2°, 3°, 4°, 5°, 6°, 7°, risulta dai teoremi I, II, III; che inoltre, riguardo alla sussistenza delle sole proprietà anti-fondamentali, non possano verificarsi che i soli quattro casi 8°, 9°, 10°, 11°, risulta dai teoremi IV, V, VI; e finalmente che, riguardo alla sussistenza simultanea di proprietà fondamentali e anti-fondamentali, non possano verificarsi che i soli tre casi 12°, 13°, 14°, risulta dai teoremi VII, VIII, IX.

Dal teorema X poi risulta che: « Secondochè una relazione, rispetto « agli enti di un sistema, si trova in uno piuttosto che in un altro dei « quattordici casi possibili, la sua inversa si troverà, rispetto a quegli « stessi enti, nel medesimo caso. »

Invece dai teoremi XI, XII, XIII, XIV e loro corollari risulta che: « Secondochè una relazione, rispetto agli enti di un sistema, si trova « in uno piuttosto che in un altro dei quattordici casi possibili, la sua « contraria e la sua antinomiale si troveranno, entrambe contemporaneamente, rispetto a quegli stessi enti, in uno di quei quattordici casi « in conformità del seguente prospetto:

$$\text{«}\; 1\left\{\begin{matrix}1\\4\end{matrix}\right., \quad 2\left\{\begin{matrix}8\\9\\10\\11\\14\end{matrix}\right., \quad 3\{3, \quad 4\left\{\begin{matrix}1\\4\end{matrix}\right., \quad 5\left\{\begin{matrix}12\\13\end{matrix}\right., \quad 6\left\{\begin{matrix}8\\14\end{matrix}\right., \quad 7\left\{\begin{matrix}12\\13\end{matrix}\right., \quad 8\left\{\begin{matrix}2\\6\end{matrix}\right., \quad 9\{2, \quad 10\{2, \quad 11\{2, \quad 12\left\{\begin{matrix}5\\7\end{matrix}\right., \quad 13\left\{\begin{matrix}5\\7\end{matrix}\right., \quad 14\left\{\begin{matrix}2\\6\end{matrix}\right. \;\text{»}.$$

Da questo prospetto si desume quale, o quali, dei quattordici casi possano e debbano aver luogo per $\overline{\supset}$ e $\overline{\subset}$, corrispondentemente a ciascuno dei quattordici casi in cui può trovarsi $\supset$. Così: se $\supset$ è nel 2° caso, $\overline{\supset}$ e $\overline{\subset}$ dovranno trovarsi solamente in uno dei cinque casi 8°, 9°, 10°, 11°, 14°: e i cinque esempi citati pel 2° caso si succedono in modo da corrispondere ordinatamente a ciascuno dei suddetti cinque casi; ed altrettanto si dica per tutti gli altri esempi; appunto per questo, per ciascuno dei casi 3°, 9°, 10°, 11°, ai quali può corrispondere per la relazione contraria e per l'antinomiale un sol caso, abbiamo dato un solo esempio; pel caso 2°, come già si è detto, abbiamo dato cinque esempi e per ciascuno degli altri casi due esempi; ed a bella posta abbiamo per certi casi scelto come esempi le relazioni contrarie a quelle già date per altri casi.

Finalmente, se si assumono come enti le relazioni completamente possibili e completamente determinate e si considerano le proprietà fondamentali e anti-fondamentali delle relazioni fra relazioni, risulta dai teoremi XV, XVI, XVII e dalle cose già dette che le relazioni *inversa di, collegata con, non inversa di, non collegata con* si trovano nel 3° caso; *non contraria di, non antinomiale di* nel 5°; *equivalente a* nel 7°; *non equivalente a* nel 12°; e *contraria di, antinomiale di* nel 13°.

NOTE

(1) Questo breve studio è stato ispirato dalla lettura di un articolo del chiar.mo ing. G. VAILATI, pubblicato nel fascicolo 6° del volume I della *Rivista di Matematica*. Del resto, come gentilmente ci ha comunicato il chiar.mo prof. PEANO, quando noi avevamo già terminato lo scritto presente, la teoria delle relazioni fu già oggetto di studî da parte di Peirce, De Morgan, Ellis, Macfarlane ed altri; qualche cenno su queste questioni può vedersi anche nel *Calcolo geometrico* dello stesso prof. Peano (Torino 1888, pag. X, 142 e 152). La teoria delle funzioni è un caso particolare di quella delle relazioni.

(2) La prima denominazione è stata proposta dal sig. Vailati. A giustificare la seconda, togliamo dal vocabolario Tommaseo e Bellini « *Conversione:* rivolgimento a rovescio. *Converso:* dicesi del mutar direzione. *Conversivo:* atto a convertirsi nel senso scientifico. *Convertere:* senso logico e grammaticale: convertesi una cosa nell'altra, *quando ciò che fu detto della prima rispetto alla seconda, dicesi della seconda rispetto alla prima* » (BOEZIO ne' suoi *Scritti filosofici*). La terza denominazione, come dice il sig. Vailati, devesi all'inglese De Morgan. La quarta sembraci giustificata pure dal vocabolario « *Comparativo:* che paragona, che è fatto per aiutare a comparare » e più ancora dal fatto che appunto della proprietà che noi diciamo comparativa della relazione *eguale a*, fra numeri, si fa uso, quando, dopo di aver risolto le due equazioni coesistenti $f(x, y, z, ...)=0$, $F(x, y, z, ...)=0$ rispetto ad x, ed averne ricavato così $x=\varphi(y, z, ...)$, $x=\Phi(y, z, ...)$, da queste si deduce $\varphi(y, z, ...)=\Phi(y, z, ...)$, e allora si dice che si è eliminata la x col metodo di paragone, o confronto, o comparazione. La quinta definizione ci pare giustificata anch'essa dal vocabolario « *Adequazione:* agguagliamento (GALILEO ne' suoi *Dialoghi*). *Adeguare* e *adequare:* agguagliare; *adequare* piuttosto che *adeguare* rimane agli usi scientifici, segnatamente ne' suoi derivati. *Adequato:* fatto eguale ». E quindi *adequativo:* che fa eguale, che serve per aiutare a fare eguale. E appunto per la proprietà che noi diciamo adequativa della relazione *eguale a* fra cose, si fanno eguali fra loro due cose, dal sapere che si possono fare eguali ad una terza, applicando così l'abusato adagio: *quae conveniunt cum tertio conveniunt inter sese*. Finalmente chiamiamo *equiparativa* una relazione la quale goda tutte le cinque proprietà precedenti, perchè una tale parola, per la sua etimologia ci pare possa ritenersi come

un abbreviativo della locuzione: *paragonabile all'eguaglianza*, la quale è appunto una relazione che gode tutte quelle proprietà; è anzi da notare che dalla eguaglianza, più o meno direttamente, traggono la loro origine la maggior parte delle relazioni equiparative, come: *simile a, omotetico a, affine a, proiettivo a, equivalente a, equipollente a, parallelo a, commensurabile con, congruo con* (per congruenze equimodulari), ecc. Del resto questa sesta denominazione non è indispensabile ed altrettanto è a dirsi della quinta.

(3) Si noti che, così per la proprietà 3, come per la 4, come ancora per la 5, si viene a stabilire una corrispondenza fra due enti, mercè un ente intermediario o *mediatore*, che figura contemporaneamente in due altre corrispondenze, in una delle quali compare uno di quei due enti e nell'altra l'altro; con questo divario solamente: per la proprietà transitiva il mediatore fa una prima volta da secondo membro e l'altra da primo membro; per la comparativa il mediatore fa sempre da primo membro; e per la adequativa sempre da secondo membro. Per questa ragione ci è sembrato opportuno designare le proprietà 3, 4, 5 col nome comune di *proprietà mediative*.

(4) Sembraci conveniente che il segno col quale si vuole indicare una relazione non conversiva, o non ancora riconosciuta come tale, non sia *simmetrico*, rispetto alla perpendicolare alla retta lungo la quale si scrive, cosicchè apparisca diverso secondochè lo si legga da sinistra verso destra o da destra verso sinistra, e si possa quindi, com'è naturale di fare e come abbiam fatto, assumere appunto lo stesso segno, ma *converso*, letto cioè da sinistra verso destra, per indicare la relazione inversa. Convenientemente adunque si scrive $a > b$ e quindi $b < a$. Invece una relazione conversiva converrà indicarla con un segno simmetrico e perciò coincidente con se medesimo converso. Convenientemente pertanto si scrive $a=b$ e quindi $b=a$. Il segno $\backsim$ adoperato da Leibniz per indicare la similitudine sembraci adunque improprio. Altrettanto, per ragioni analoghe, diciamo del segno $\propto$, iniziale deformata della parola *aequalis*, col quale Cartesio e Leibniz indicarono la eguaglianza, e Leibniz anche la proporzionalità (dicendo giustamente *proportionales sunt tamquam aequales*); anche il Todunter adopera il segno $\propto$ per indicare la proporzionalità. Altrettanto ci pare debba dirsi della notazione $-=$, *non è eguale a*, adoperato dal chiar.mo prof. Peano. Ci sembrerebbe conveniente che il segno della relazione contraria rispetto ad un'altra fosse quello di questa, attraversato però dall'alto al basso da una lineetta, quasi come se si volesse cancellarlo, e difatti già è stato adoperato il segno $\neq$, od uno poco diverso, $\ne$, per la relazione *non eguale a*, e segni analoghi sono già stati introdotti per le relazioni *non maggiore di* e *non minore di*. Tuttavia, ad evitare difficoltà tipografiche, riteniamo più opportuno, almeno per ora, sovrapporre al segno della relazione data il segno $-$, proposto dal professore Peano per significare *non*; i segni $\overset{-}{=}$, $\overset{-}{>}$, $\overset{-}{<}$, significherebbero adunque, rispettivamente, *non è eguale a, non è maggiore di, non è minore di*.

Le denominazioni di relazioni, *inverse* e *contrarie*, sono quelle stesse che ordinariamente si attribuiscono alle *proposizioni* e che ormai si trovano riportate, unitamente alle *leggi delle inverse*, in ogni buon libro di testo per l'insegnamento secondario delle matematiche. La denominazione *antinomiale*, è stata proposta, come gentilmente ci ha comunicato il chiar.^{mo} prof. E. D'Ovidio, dal geometra tedesco Hersted, il quale, ritenendo giustamente poco acconcio il chiamare *inversa della contraria*, che può essere falsa, o *contraria dell'inversa*, che pure può esser falsa, una proposizione la quale, non ostante la falsità della contraria e dell'inversa, è sempre vera purchè lo sia la diretta, e considerando che fra questa e quella non vi è che nella forma una certa contrarietà ed inversione, mentre sostanzialmente coincidono, ha trovato opportuno indicare quella proposizione col vocabolo speciale di *antinomiale*. Atteso la poca italianità di questa parola, il prof. D'Ovidio opinava di sostituirlo colla parola *reciproca;* se però consideriamo che molto si è abusato di questa parola in matematica, e che, pur riferendola alle proposizioni, non pochi, seguendo l'uso francese, chiamano reciproche due proposizioni inverse, altri invece (come i chiar.^{mi} prof. Lazzeri e Bassani) riserbano la denominazione di reciproche a quelle proposizioni inverse solamente le quali sono vere entrambe, e finalmente altri chiamano reciproche due proposizioni quando ciascuna è conseguenza dell'altra (come i chiar.^{mi} Duhamel e De Paolis), facilmente ci convinceremo della opportunità, ad evitare confusioni ed improprietà, di una nuova parola, etimologicamente soddisfacente, quale è quella di Hersted. *Antinomia*, dice il già citato vocabolario, fra gli altri significati ha quello di *contrasto apparente d'uno con altro principio. Antinomie della ragione*, nella filosofia tedesca, sono *principii contraddicenti creduti vedere nella ragione stessa*. È da notarsi che due proposizioni antinomiali sono reciproche, nel senso di Duhamel e De Paolis, ma viceversa non è vero sempre che due proposizioni reciproche, in questo senso, siano antinomiali. Al sig. Hersted devesi pure la denominazione di *esplementari* per gli angoli la cui somma fa un giro; preferiremmo dirli *replementari*.

(5) Di qui segue immediatamente che, se si ammette che in ogni caso da $a = b$ segua $b = a$, e da $a = b$ e $b = c$ segua $a = c$, si potrà concluderne come corollario che si ha sempre $a = a$.

È da osservare che questa prima parte del teorema I può sembrare talvolta in difetto: per esempio la relazione *parallelo a*, $\|$, fra i piani dello spazio, che è conversiva e transitiva, sembra non essere riflessiva; ma la difficoltà cade subito quando, come è necessario per poter enunciare in generale non pochi teoremi e risolvere analiticamente non poche questioni a tale riguardo, si dicano paralleli due piani dello spazio quando o non abbiano nessun punto comune ovvero li abbiano tutti; chè se non si volesse accettare questa definizione, più generale della consueta, allora $\|$ cesserebbe di essere transitiva, perchè non sarebbe più vero che in ogni caso da $a \| b$ e $b \| c$ segue $a \| c$, dal momento che, ritenendosi $a \,\overline{\|}\, a$, si dovrebbero eccettuare tutti quei casi in cui il piano indicato colla lettera c

fosse lo stesso piano a. Lo stesso è a dirsi per la relazione $\|$ fra rette. Si considerino anche al medesimo riguardo le due relazioni: *fratello di* fra persone e *collegato di* fra relazioni.

È pure da osservare che, per la validità di questo teorema I, delle quattro condizioni generali, presupposte in principio, che cioè, dato b, esistano per lo meno a e c, A e C, pei quali sia $a \supset b$, $b \supset c$, $\mathrm{A} \,\bar{\supset}\, b$, $b \,\bar{\supset}\, \mathrm{C}$, solamente la 2ª è necessaria; altrettanto è a dirsi pel teorema III; pel teorema II è necessaria soltanto la 1ª; delle ultime due poi non conviene tener conto se non quando si parla delle relazioni contrarie ed antinomiali; solamente per amore di brevità le abbiamo presupposte tutte quattro; del resto quelle quattro condizioni ci paiono molto naturali; e, perchè esse non limitino troppo le questioni trattate, basta scartare dai sistemi considerati quegli enti pei quali per avventura tali condizioni non si verificassero, ovvero fare per tali enti singolari le debite eccezioni sulla validità dei teoremi che loro si riferiscono.

(6) Adunque l'ammettere la nozione comune « *due cose eguali ad una terza sono eguali fra loro* » basta per ricavarne come corollari le altre quattro proprietà fondamentali della *eguaglianza*. Giova però ricordare che, caso per caso, a seconda delle *cose*, che potranno anche essere enti del tutto ideali e che converrà definire con precisione, converrà altrettanto precisamente definirne l'*eguaglianza*, avendo cura peraltro che dalle definizioni segua la proprietà 5, o, quantomeno, questa non sia in contraddizione con quelle, e ciò *per conservare in ogni caso all'eguaglianza le sue proprietà fondamentali;* e simile cura, al medesimo fine, dovrà aversi *per qualsiasi relazione*, in omaggio ad un principio, che proponiamo e che ci sembra necessario, e che, essendo del tutto analogo a quello enunciato da Hankel per le regole del calcolo, si potrebbe chiamare: PRINCIPIO DELLA PERMANENZA DELLE PROPRIETÀ DELLE RELAZIONI.

Alessandria, Maggio 1892.

Contatto e ortogonalità di due elicoidi.

Nota di GEMINIANO PIRONDINI.

1.

Per rispetto a un sistema d'assi coordinati ortogonali $O(x, y, z)$, le equazioni:

$$(1)\quad x = \xi \cos v - \eta \operatorname{sen} v\,;\quad y = \xi \operatorname{sen} v + \eta \cos v\,;\quad z = \zeta + pv\,,$$

dove ξ, η, ζ sono funzioni di un parametro u indipendente dalla variabile v e p una costante, dànno le coordinate di un punto qualunque di un elicoide, nel quale l'asse coincide coll'asse delle z e il parametro (cioè il rapporto della velocità di traslazione a quella di rotazione) è eguale a p.

Questo elicoide ha per generatrice la curva L che, rispetto a un sistema d'assi $\Omega(\xi, \eta, \zeta)$ invariabilmente collegati con essa, è definita dalle equazioni:

$$\xi = \xi(u)\,, \quad \eta = \eta(u)\,, \quad \zeta = \zeta(u)\,.$$

Ottenendosi dalle (1):

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \xi' \cos v - \eta' \operatorname{sen} v\,; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \xi' \operatorname{sen} v + \eta' \cos v\,; \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \zeta'$$

$$(2) \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\xi \operatorname{sen} v - \eta \cos v\,; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \xi \cos v - \eta \operatorname{sen} v\,; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = p\,,$$

i coseni degli angoli A, B, C che la normale all'elicoide in un punto qualunque fa cogli assi coordinati del sistema $0(x, y, z)$, vengono dati dalle eguaglianze:

$$(3) \quad \begin{cases} \cos A = \dfrac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ (p\eta' - \xi\zeta') \cos v + (p\xi' + \eta\zeta') \operatorname{sen} v \right\} \\ \cos B = \dfrac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ (p\eta' - \xi\zeta') \operatorname{sen} v - (p\xi' + \eta\zeta') \cos v \right\} \\ \cos C = \dfrac{1}{\sqrt{EG - F^2}} (\xi\xi' + \eta\eta')\,, \end{cases}$$

nelle quali:

$$E = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2\,; \quad F = \xi\eta' - \xi'\eta + p\zeta'\,; \quad G = \xi^2 + \eta^2 + p^2\,.$$

2.

La condizione necessaria e sufficiente perchè due elicoidi S e S_1 si tocchino lungo la linea L è che in ogni punto di questa linea la normale ad S sia ortogonale alla corrispondente elica dell'elicoide S_1. Ora se p e p_1 sono i parametri dei movimenti elicoidali per i quali gli elicoidi S e S_1 strisciano sopra loro stessi, i coseni direttivi della normale ad S sono dati dalle (3) e quelli della tangente alle eliche di S_1 sono proporzionali alle quantità $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$ date dalle (2), nelle quali si muti p in p_1.

Dovremo dunque avere:

$$\left\{ (p\eta' - \xi\zeta') \cos v + (p\xi' + \eta\zeta') \operatorname{sen} v \right\} (-\xi \operatorname{sen} v - \eta \cos v)$$
$$+ \left\{ (p\eta' - \xi\zeta') \operatorname{sen} v - (p\xi' + \eta\zeta') \cos v \right\} (\xi \cos v - \eta \operatorname{sen} v) + p_1(\xi\xi' + \eta\eta') = 0$$

ossia, sviluppando i calcoli:

$$(p_1 - p)(\xi\xi' + \eta\eta') = 0\,.$$

Quest'equazione ammette le due soluzioni:

$$p_1 = p\,; \quad \xi\xi' + \eta\eta' = 0\,;$$

nel 1° caso i due elicoidi S e S_1 coincidono in tutta la loro estensione e perciò non c'è da parlare del loro contatto. Nel 2° caso, avendosi:

$$\xi^2 + \eta^2 = \text{costante},$$

la curva L è descritta sopra un cilindro circolare il cui asse coincide coll'asse delle ζ; ma evidentemente in questo caso i due elicoidi S e S_1 si riducono appunto a questo cilindro.

Si conclude che:

« Due elicoidi dello stesso asse non possono toccarsi che lungo delle eliche ».

Questa proprietà è l'estensione di un'altra che ha luogo manifestamente nelle superficie di rivoluzione.

3.

Si supponga ora che i due elicoidi dello stesso asse S e S_1 si seghino ortogonalmente lungo la linea L; i coseni direttivi delle normali ad S e S_1 essendo dati rispettivamente dalle (4) e dalle equazioni che si ottengono da queste mutandovi p in p_1, la condizione esprimente l'ortogonalità degli elicoidi è:

$$\left\{ (\xi\zeta' - p\eta') \cos v - (\eta\zeta' + p\xi') \operatorname{sen} v \right\} \left\{ (\xi\zeta' - p_1\eta') \cos v - (\eta\zeta' + p_1\xi') \operatorname{sen} v \right\}$$
$$+ \left\{ (\xi\zeta' - p\eta') \operatorname{sen} v + (\eta\zeta' + p\xi') \cos v \right\} \left\{ (\xi\zeta' - p_1\eta') \operatorname{sen} v + (\eta\zeta' + p_1\xi') \cos v \right\}$$
$$+ (\xi\xi' + \eta\eta')^2 = 0$$

ossia, sviluppando i calcoli:

$$(4) \quad (\xi^2 + \eta^2)\zeta'^2 - (p_1 + p)(\xi\eta' - \xi'\eta) + (\xi\xi' + \eta\eta')^2 + pp_1(\xi'^2 + \eta'^2) = 0\,.$$

Ora al § 6 della mia memoria (*) *Studio sulle superficie elicoidali* ho dimostrato che l'elicoide di parametro p avente per asse l'asse delle ζ è generato dalla linea rappresentata dalle equazioni:

$$\xi = R \cos \varphi\,, \quad \eta = R \operatorname{sen} \varphi\,, \quad \zeta = \chi(u)\,,$$

nelle quali R, φ, χ sono funzioni di uno stesso parametro u, ha per profilo meridiano la curva:

$$\xi_0 = R\,, \quad \eta_0 = 0\,, \quad \zeta_0 = \chi(u) - p\varphi\,.$$

(*) *Annali di Matematica*, 1888.

Se dunque si pone:

$$\chi(u) - p\varphi = \mathrm{U}\ ,$$

si può dire:

« Le linee tracciate sull'elicoide avente per profilo meridiano la curva:

$$(5) \qquad \xi_0 = \mathrm{R}\ , \quad \eta_0 = 0\ , \quad \zeta_0 = \mathrm{U}$$

sono tutte e sole quelle rappresentate dalle equazioni:

$$(6) \qquad \xi = \mathrm{R} \cos\varphi\ , \quad \eta = \mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\varphi\ , \quad \zeta = \mathrm{U} + p\varphi\ ,$$

essendo φ una funzione arbitraria di u ».

Ciò posto, si supponga che l'elicoide S abbia per profilo la curva (5); la linea L lungo la quale esso è tagliato ortogonalmente dall'altro elicoide S_1 è allora rappresentata dalle equazioni (6), in cui φ è una certa funzione di u da determinarsi.

In causa delle (6) avendosi:

$$\xi^2 + \eta^2 = \mathrm{R}^2\ ; \quad \xi\eta' - \xi'\eta = \mathrm{R}^2\varphi'\ ; \quad \xi\xi' + \eta\eta' = \mathrm{RR}'\ ;$$
$$\xi'^2 + \eta'^2 = \mathrm{R}'^2 + \mathrm{R}^2\varphi'^2\ ; \quad \zeta' = \mathrm{U}' + p\varphi'\ ,$$

la condizione (4) diviene:

$$(p_1 - p)\mathrm{R}^2\mathrm{U}'\varphi' = \mathrm{R}^2(\mathrm{R}'^2 + \mathrm{U}'^2) + pp_1\mathrm{R}'^2\ .$$

Se U è costante, allora l'elicoide è quello rigato ad area minima e la precedente relazione si riduce all'altra:

$$(\mathrm{R}^2 + pp_1)\mathrm{R}'^2 = 0\ ,$$

che non può essere soddisfatta che da valori costanti di R. Perciò:

« L'elicoide rigato ad area minima è il solo che non possa essere segato ortogonalmente da nessun altro elicoide dello stesso asse ».

Se poi U non è costante, si ha:

$$\varphi' = \frac{\mathrm{R}^2(\mathrm{R}'^2 + \mathrm{U}'^2) + pp_1\mathrm{R}'^2}{(p_1 - p)\mathrm{R}^2\mathrm{U}'}\ ;$$

moltiplicando per du, integrando e mettendo a zero la costante arbitraria, il che non nuoce alla generalità, si ottiene:

$$(7) \qquad \varphi = \frac{1}{p_1 - p}\int \frac{\mathrm{R}^2(\mathrm{R}'^2 + \mathrm{U}'^2) + pp_1\mathrm{R}'^2}{\mathrm{R}^2\mathrm{U}'}\,du\ .$$

E se ora si fa muovere la linea (6) di moto elicoidale di parametro p_1 attorno all'asse delle ζ, si genera appunto l'elicoide S_1; il profilo meridiano di questo elicoide sarà per conseguenza rappresentato dalle equazioni:

$$(8) \qquad \xi_{10} = \mathrm{R}\ , \quad \eta_{10} = 0\ , \quad \zeta_{10} = \mathrm{U} - (p_1 - p)\varphi\ .$$

Abbiamo dunque il teorema:

« Sull'elicoide S di parametro p il cui asse coincide coll'asse delle ζ e il cui profilo meridiano è rappresentato dalle equazioni (5), la linea L lungo la quale esso è segato ortogonalmente da un altro elicoide S_1 di parametro p_1 e avente lo stesso asse del primo, è rappresentata dalle equazioni (6), nelle quali φ è una funzione di u definita dall'equazione (7). Il profilo meridiano dell'elicoide S_1 ortogonale ad S è rappresentato dalle equazioni (8) ».

Quando è dato l'elicoide S le funzioni R, U del parametro u sono completamente note; se di più la costante p_1 si fissa in un modo qualunque, risulta determinata completamente anche la funzione φ. Perciò:

« Le linee lungo le quali un dato elicoide è segato ortogonalmente da altri elicoidi aventi lo stesso asse del primo e tutti il medesimo parametro, sono eguali fra loro e si ottengono tutte quante da una di esse dando a questa quel movimento elicoidale per il quale l'elicoide striscia su sè stesso ».

Se un elicoide S è segato ortogonalmente, lungo una linea L differente da un'elica, da un altro elicoide S_1, lungo questa linea non può essere segato ortogonalmente da nessun altro elicoide. Infatti se S_2 fosse un altro elicoide segante S ortogonalmente lungo L, i due elicoidi S_1 e S_2 dovrebbero toccarsi lungo L, il che non può darsi.

Esempi.

1° La curva L, lungo la quale i due elicoidi si segano ortogonalmente, sia un loro profilo meridiano comune.

Supponendo questo profilo posto nel piano $\eta = 0$, la condizione (4) diviene:

$$\xi^2\zeta'^2 + \xi^2\xi'^2 + pp_1\xi'^2 = 0\ ;$$

e quest'equazione non può essere soddisfatta che quando il prodotto pp_1 è negativo; ritenendo allora p positivo e quindi p_1 negativo, si ponga:

$$p_1 = -q\ ,$$

con q positivo. Si avrà allora l'equazione:

$$\zeta' = \frac{\sqrt{pq - \xi^2}}{\xi}\,.\,\xi'\ ,$$

da cui:

$$\zeta = \sqrt{pq - \xi^2} - \sqrt{pq}\,.\log\left(\frac{\sqrt{pq} + \sqrt{pq - \xi^2}}{\xi}\right).$$

Questa rappresenta una trattrice nella quale l'assintoto coincide coll'asse delle ζ e la lunghezza costante delle tangenti è $\sqrt{pq}$.

I due elicoidi ortogonali lungo un loro profilo meridiano comune sono dunque elicoidi a curvatura costante negativa del Dini.

2° Determiniamo l'elicoide ortogonale a un elicoide del Dini.

Chiamando a la lunghezza costante delle tangenti del profilo meridiano, si può prendere:

$$R = u\,, \quad U = \sqrt{a^2 - u^2} - a \log\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right)$$

e allora l'equazione (7) ci dà:

$$\varphi = -\frac{a^2 + pp_1}{a(p_1 - p)} \cdot \log\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right).$$

Applicando dunque le (8), si trova che le coordinate ξ_{10}, ζ_{10} del profilo meridiano dell'elicoide cercato sono date dalle equazioni:

$$\xi_{10} = R = u\,;$$

$$\zeta_{10} = U - (p_1 - p)\varphi = \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{pp_1}{a} \log\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right);$$

e se fra queste eliminiamo la variabile u, si trova:

$$\zeta_{10} = \sqrt{a^2 - \xi_{10}{}^2} + \frac{pp_1}{a} \log\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - \xi_{10}{}^2}}{\xi_{10}}\right),$$

equazione del profilo meridiano dell'elicoide ortogonale all'elicoide del Dini. La condizione necessaria e sufficiente perchè il nuovo elicoide sia pure esso del Dini è che si abbia $pp_1 = -a^2$; siamo allora nel caso considerato all'esempio 1°, cioè i due elicoidi si segano lungo un loro profilo meridiano comune.

Quando $p_1 = 0$, risulta:

$$\zeta_{10} = \sqrt{a^2 - \xi_{10}{}^2}\,,$$

equazione della circonferenza di raggio a il cui centro è nell'origine degli assi. Si giunge così alla nota proprietà che l'elicoide del Dini è segato ortogonalmente da una serie di sfere col centro sull'asse e aventi un raggio eguale alla lunghezza costante della tangente del profilo meridiano.

4.

Se nelle equazioni del § 3 si suppone $p_1 = 0$, si ottiene:

$$\varphi = -\frac{1}{p}\left(U + \int \frac{R'^2}{U'} du\right).$$

Conseguentemente il meridiano della superficie di rotazione S_1 ortogonale all'elicoide S, avente per profilo la curva

$$\xi_0 = R\,, \quad \zeta_0 = U\,, \tag{9}$$

è rappresentato dalle equazioni:

$$\xi_{10} = R\,, \quad \zeta_{10} = -\int \frac{R'^2}{U'} du\,. \tag{10}$$

Siccome queste due equazioni sono indipendenti da p, si conclude che la superficie di rotazione è la stessa qualunque sia p, purchè rimangano le medesime R e U. Perciò:

« Se a una medesima linea piana si dànno successivamente quanti si vogliano movimenti elicoidali diversi, intorno a una stessa retta del suo piano, tutti gli elicoidi generati sono segati ortogonalmente da una medesima superficie di rotazione, avente l'asse in comune cogli elicoidi detti ».

Si supponga, ad es., che la superficie di rotazione sia un cono; indicando con ε l'inclinazione delle sue generatrici sull'asse, si può prendere:

$$\zeta_0 = U = u\,, \quad \xi_0 = R = u.\mathrm{tg}\varepsilon$$

ed allora, osservando che $p = 0$, si ottiene dalla (7):

$$\varphi = \frac{u}{p_1 \cos^2\varepsilon}\,. \tag{11}$$

Conseguentemente, applicando le (8), si hanno le equazioni:

$$\xi_{10} = R = u\mathrm{tg}\varepsilon\,, \quad \zeta_{10} = u - \frac{u}{\cos^2\varepsilon} = -u.\mathrm{tg}^2\varepsilon\,,$$

da cui, eliminando u:

$$\zeta_{10} = -\xi_{10}.\mathrm{tg}\varepsilon\,,$$

equazione di una retta ortogonale a quella da cui siamo partiti. Dunque:

« Gli elicoidi ortogonali a uno stesso cono di rotazione sono quelli rigati a direttrice rettilinea; il profilo (rettilineo) degli elicoidi e il meridiano (rettilineo) del cono sono ortogonali ».

Poichè l'intersezione L di uno di questi elicoidi col cono è rappresentata dalle equazioni (6), che ora divengono:

$$\xi = u\mathrm{tg}\varepsilon.\cos\varphi\,, \quad \eta = u\mathrm{tg}\varepsilon.\mathrm{sen}\,\varphi\,, \quad \zeta = u\,,$$

la relazione fra il raggio vettore R e l'angolo polare φ della proiezione di L sul piano $\zeta = 0$, si ottiene eliminando u fra l'equazione

$$R = u.\mathrm{tg}\varepsilon$$

e l'altra (11), il che dà:

$$R = (p_1 \,\mathrm{sen}\,\varepsilon \cos\varepsilon)\varphi\,.$$

Si conclude che le linee, dove il cono dato è segato ortogonalmente dagli elicoidi rigati considerati, si ottengono tagliando il cono con dei cilindri aventi le generatrici parallele all'asse e le cui sezioni rette sono spirali *d'Archimede* coi poli sull'asse. Tali linee variano col variare dell'elicoide segante che si considera.

Se il profilo meridiano comune a tutti gli elicoidi è una trattrice, tutti gli elicoidi generati da questa sono del Dini, qualunque sia il parametro del moto elicoidale. Perciò le linee di curvatura sferiche di tutti gli elicoidi del Dini, aventi per profilo meridiano una stessa trattrice, sono tracciate sopra sfere eguali.

Sia L il profilo di un elicoide S ed L_1 il meridiano di una superficie di rotazione S_1 fra loro ortogonali, rappresentati rispettivamente dalle equazioni (9), (10).

Si consideri ora la curva L_1 come il profilo L' di un altro elicoide S'; allora il meridiano L'_1 della superficie di rotazione S'_1 ortogonale ad S' è rappresentato dalle equazioni (9), quando in esse si ponga la quantità $-\int \frac{R'^2}{U'} du$ al posto di U. Chiamando dunque ξ'_{10}, ζ'_{10} le coordinate dei punti di L'_1, si ha: $\xi'_{10} = R$, $\zeta'_{10} = U$, le quali equazioni di mostrano che la curva L'_1 coincide colla curva primitiva L.

Abbiamo dunque il teorema:

« Se L e L_1 sono il profilo meridiano di un elicoide e il meridiano di una superficie di rivoluzione dello stesso asse ortogonali fra loro, sono pure ortogonali fra loro l'elicoide che abbia L_1 per profilo meridiano e la superficie di rivoluzione che abbia L per meridiano ».

Questo fatto si accennerà dicendo che le curve piane L e L_1 sono *coniugate*. Sapendo quindi ad es. che l'elicoide del Dini è segato ortogonalmente da una sfera col centro sull'asse, si ha:

« Una trattrice qualsivoglia e una circonferenza avente il centro sull'assintoto e un raggio eguale alla lunghezza costante delle tangenti della trattrice, sono linee coniugate ».

Per conseguenza:

« Tutti gli elicoidi dello stesso asse, aventi per profilo una medesima circonferenza col centro sull'asse, sono segati ortogonalmente da una pseudosfera ».

Ricordando le equazioni (9), (10) rappresentanti due linee piane coniugate L, L_1, ed indicando con T, N, S_t, S_n la lunghezza della tangente e della normale, la suttangente e la sunnormale di L computate rispetto all'asse delle ζ, e con T', N', S'_t, S'_n le quantità analoghe relative alla linea L_1, si ha:

$$T = -N' = \frac{R\sqrt{R'^2 + U'^2}}{R'}, \quad N = T' = \frac{R\sqrt{R'^2 + U'^2}}{U'}$$

$$S_t = -S'_n = \frac{RU'}{R'}, \quad S_n = -S'_t = \frac{RR'}{U'} \cdot$$

Perciò:

« Sopra due linee piane coniugate (rappresentate rispettivamente dalle equazioni (9), (10)) considerando come corrispondenti quei punti che si ottengono intersecandole con rette parallele all'asse delle ζ, si ha che, indipendentemente dal segno, la lunghezza della tangente e della normale, la suttangente e la sunnormale in un punto qualunque di una di esse, per rispetto all'asse delle ζ, è rispettivamente eguale alla lunghezza della normale e della tangente, alla sunnormale e alla suttangente nel punto corrispondente dell'altra ».

Se dunque T od N sono costanti, sono pure costanti N' o T'; una circonferenza è dunque coniugata a una trattrice (come si è dimostrato dianzi).

Se poi è costante S_t o S_n, risulta pure costante S'_n o S'_t; onde una parabola ha per curva coniugata una curva logaritmica il cui assintoto coincide coll'asse di quella.

A questi risultati si può dare la seguente forma:

« Tutti gli elicoidi dello stesso asse aventi per profilo meridiano una medesima curva logaritmica, il cui assintoto coincide coll'asse comune, ovvero tutti gli elicoidi dello stesso asse, aventi per profilo meridiano una medesima parabola il cui asse coincide coll'asse degli elicoidi, sono segati ad angolo retto rispettivamente da un paraboloide di rivoluzione, ovvero dalla superficie generata da una curva logaritmica che ruota attorno all'assintoto ».

Il calcolo diretto conferma pienamente questi risultati.

Poichè la relazione reciproca delle curve rappresentate dalle equazioni (9), (10) viene conservata se sostituiamo la funzione R di u con $R + k$, essendo k una costante arbitraria, si può dire:

« Se due linee piane L e L_1 sono rispettivamente il profilo meridiano di un elicoide e il meridiano di una superficie di rotazione ortogonali, per rispetto a un asse $O\zeta$, hanno pure la stessa proprietà per rispetto a qualsivoglia altro asse parallelo al primo ».

Ne viene di conseguenza che, per esempio, un elicoide avente per profilo meridiano un cerchio disposto comunque, è segato ortogonalmente dalla superficie di rotazione il cui meridiano è una trattrice coll'assintoto parallelo all'asse; e che un elicoide avente per profilo quest'ultima curva è segato ortogonalmente da un toro ecc.

5.

Al teorema fondamentale del § 3 si può dare un'altra forma.

Si supponga che la linea L, lungo la quale i due elicoidi S, S_1 si segano ortogonalmente, sia rappresentata dalle equazioni:

(12) $$\xi = \mathrm{R}\cos u\ ,\quad \eta = \mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,u\ ,\quad \zeta = \mathrm{U}\ ,$$

dove R e U sono due funzioni di un parametro qualunque u.

Avremo allora:

$$\xi^2 + \eta^2 = \mathrm{R}^2\ ;\quad \xi\eta' - \xi'\eta = \mathrm{R}^2\ ;\quad \xi\xi' + \eta\eta' = \mathrm{R}\mathrm{R}'\ ;$$
$$\xi'^2 + \eta'^2 = \mathrm{R}^2 + \mathrm{R}'^2\ ;\quad \zeta' = \mathrm{U}'$$

e la condizione fondamentale (4) diviene:

(13) $$\mathrm{R}^2\mathrm{U}' - (p + p_1)\mathrm{R}^2\mathrm{U}' + \mathrm{R}^2\mathrm{R}'^2 + pp_1(\mathrm{R}^2 + \mathrm{R}'^2) = 0\ .$$

Perciò:

« Se alla linea L rappresentata dalle equazioni (12), nelle quali R e U sono funzioni di u che soddisfano l'equazione differenziale (13), si dànno successivamente due movimenti elicoidali di parametri p e p_1 attorno all'asse delle ζ, si generano due elicoidi che si segano ortogonalmente lungo la linea stessa L, considerata nella posizione iniziale ».

Esempio. — Se la linea d'intersezione dei due elicoidi ortogonali è una loro sezione retta comune, si può supporre

$$\mathrm{U} = 0$$

e la condizione (13) diventa:

$$\mathrm{R}^2\mathrm{R}'^2 + pp_1(\mathrm{R}^2 + \mathrm{R}'^2) = 0\ .$$

Per le stesse ragioni dette nell'esempio 1° del § 3, ritenuto p positivo, deve essere

$$p_1 = -q$$

con q positivo; allora si ottiene:

$$\frac{\sqrt{\mathrm{R}^2 - pq}}{\mathrm{R}}\,.\,\mathrm{R}' = \sqrt{pq}\ ,$$

d'onde, moltiplicando per du e integrando:

$$u = \frac{\sqrt{\mathrm{R}^2 - pq}}{\sqrt{pq}} + \mathrm{arc\,.\,sen}\left(\frac{\sqrt{pq}}{\mathrm{R}}\right)\ ,$$

equazione di una sviluppante del cerchio di raggio $\sqrt{pq}$ il cui centro è nel polo.

I due elicoidi, ortogonali lungo una loro sezione retta comune, sono dunque sviluppabili.

6.

Il teorema del § 4, relativo alla coppia di linee costituita dal profilo meridiano di un elicoide e dal meridiano di una superficie di rivoluzione ortogonale al primo, e che ha dato origine alla nozione di linee *coniugate*, si può estendere al caso dei profili di due elicoidi ortogonali. Basta infatti applicare il procedimento, seguito al § 4, alle linee rappresentate dalle equazioni

(14) $$\xi_0 = \mathrm{R}\ ,\quad \zeta_0 = \mathrm{U}$$

(15) $$\xi_{,0} = \mathrm{R}\ ,\quad \zeta_{,0} = \mathrm{U} - \int \frac{\mathrm{R}^2(\mathrm{R}'^2 + \mathrm{U}'^2) + pp_1\mathrm{R}'^2}{\mathrm{R}^2\mathrm{U}'}\,du\ ,$$

già trovate al § 3.

È però più semplice osservare che, se alla linea L rappresentata dalle equazioni (14) si dà, attorno all'asse delle ζ, un movimento elicoidale di parametro p_1 e si taglia l'elicoide generato S con un altro elicoide S_1 ortogonale ad S, di parametro p e dello stesso asse, si trova che il profilo meridiano di S_1 è la linea L_1 rappresentata dalle equazioni (15), per la ragione che queste rimangano invariate permutando fra loro p e p_1.

Osservando più generalmente che le equazioni (15) rimangono inalterate mutando p e p_1 in mp e $\frac{p_1}{m}$ con m costante qualunque, si ha il teorema:

« Se le curve L e L_1 tracciate in uno stesso piano, muovendosi di moto elicoidale, la prima di parametro p e la seconda di parametro p_1 intorno a una retta del loro piano, generano due elicoidi ortogonali, generano pure due elicoidi ortogonali quando, attorno alla stessa retta si muovano di moto elicoidale, la prima di parametro mp e la seconda di parametro $\frac{p_1}{m}$, essendo m una costante qualunque ».

Se, come caso speciale, si suppone:

$$m = \frac{p_1}{p}\ ,$$

si ha appunto il teorema precedente, di cui quello ricordato del § 4 è un semplice caso particolare.

Parma, Maggio 1892.

Sopra diverse proposizioni nella Geometria proiettiva delle coniche e delle quadriche

per A. Del Re.

I.

1. Nei diversi trattati di Geometria proiettiva sintetica si dimostra in varii modi la proposizione che proiettando da due punti arbitrarii di una conica tutti i punti di questa sopra una medesima retta si ha una proiettività dotata di una involuzione unita fissa (1). Il modo seguente io credo che sia preferibile agli altri tenuti finora perchè non richiede che la conoscenza del teorema di Pascal sull'esagrammo, e quella del teorema che due proiettività permutabili hanno la stessa involuzione unita. Vista l'importanza che ha la proposizione cui alludo nella definizione dei punti d'incontro di una retta con una conica e nella costruzione dei medesimi anche quando non sono reali, e vista anche la rapidità che il modo da me tenuto permette di dare all'esposizione di una certa parte della teoria delle coniche, si capirà l'opportunità della pubblicazione di questo primo paragrafo della presente Nota.

Sia φ la conica, r la retta ed **1**, **3**, **5** tre punti qualunque di φ. Si proietti φ da **1**, **3** su r e si abbia su questa la proiettività $\mathbf{P}_1$; si proietti poi φ da **3**, **5** pure su r e si abbia la proiettività $\mathbf{P}_2$. La coppia di $\mathbf{P}_1$ che nasce da un punto arbitrario **6** di φ sia $\mathbf{AA}_1$, e quella analoga di $\mathbf{P}_2$ sia $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$. Si ponga $\mathbf{3A}.\varphi \equiv \mathbf{4}$, $\mathbf{54}.r \equiv \mathbf{A}'_1$, $\mathbf{1A}'_1.\varphi \equiv \mathbf{2}$, e si consideri l'esagono semplice **123456**: i lati opposti di un tale esagono si taglieranno in punti per diritto. Ma $\mathbf{12.45} \equiv \mathbf{A}'_1$, $\mathbf{34.61} \equiv \mathbf{A}$ sono punti di r, dunque, visto che **56** taglia r in $\mathbf{A}_2$, **23** passerà per $\mathbf{A}_2$. Da ciò segue che

$$\mathbf{P}_1 \equiv \frac{\mathbf{A}\ \mathbf{A}'_1}{\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2}\ \ldots\ldots;\quad \mathbf{P}_2 \equiv \frac{\mathbf{A}_1\mathbf{A}}{\mathbf{A}_2\mathbf{A}'_1}\ \ldots\ldots$$

epperò:

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \equiv \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{A}_2}\ \ldots\ldots \equiv \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1 .$$

$\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ sono dunque permutabili ed hanno per ciò la stessa involuzione unita.

(1) Si trovano, p. e., dimostrazioni di una tal proposizione, salvo il nome di involuzione unita che in alcuni non si trova, in Chasles, *Traité des sections coniques;* Staudt, *Beitrage etc.*; Segre, *Sulle coppie di elementi immaginarii etc.* (Atti della R. Acc. di Torino, anno 1886); Sannia, *Lezioni di geometria proiettiva.*

II.

2. Dopo aver definita una conica come luogo per mezzo di due fasci proiettivi, e poi come inviluppo per mezzo di due punteggiate proiettive, è noto quale sia il modo col quale generalmente si procede per mostrare che le due generazioni conducono ad un solo e medesimo ente. Il modo seguente, che io feci già conoscere fin dallo scorso anno ai miei studenti dell'Università Romana, credo che sia preferibile a tutti gli altri non soltanto per la sua eleganza e semplicità ma anche perchè nel corso del ragionamento presenta la dimostrazione di diversi altri teoremi.

Siano $(S) \equiv abc \ldots \overline{\wedge} (S') \equiv a'b'c' \ldots$ due fasci proiettivi generatori di una conica φ. La tangente t in un punto arbitrario $aa' \equiv A$ è la retta del fascio (A) sulla quale (S), (S') determinano una proiettività $\mathbf{P}$ dotata del solo punto unito A. Posto $SS' \equiv r \equiv s'$, per mezzo della $(S) \overline{\wedge} (S')$ si abbia $\ldots rs \ldots \overline{\wedge} \ldots r's' \ldots$; si avrà, posto $t.(r \equiv s', r', s) \equiv T', T'', T$, per mezzo di $\mathbf{P}$

$$TT' \ldots \overline{\wedge}\, TT'' \ldots$$

e quindi che il gruppo AT'TT'' è armonico. Ponendo dunque anche $ST'' \equiv m$, $S'T \equiv m'$, saranno armonici i gruppi

$$arsm\ ,\quad a's'r'm',$$

epperò, come $r \equiv s'$, s, r' sono fissi, quando A percorre φ si avranno le relazioni di proiettività

$$rsa \ldots \overline{\wedge}\, rsm \ldots,\quad r's'a' \ldots \overline{\wedge}\, r's'm' \ldots$$

Ma era data la

$$\ldots a \ldots \overline{\wedge} \ldots a' \ldots,$$

dunque è anche

$$rsm \ldots \overline{\wedge}\, r's'm' \ldots,$$

e quindi pure

$$(s) \equiv s(r's'm' \ldots) \equiv \ldots T \ldots \overline{\wedge}\, (r') \equiv r'(rsm \ldots) \equiv \ldots T'' \ldots$$

La tangente a in A è dunque la congiungente i punti corrispondenti di due punteggiate proiettive (s), (r'); e l'asserto è perciò dimostrato.

III.

3. Quanto segue interessa principalmente coloro che nell'insegnamento della teoria delle quadriche introducono queste coi loro sistemi polari. Si tratta della proposizione che riguarda la genesi della superficie del 2º ordine mediante una infinità di coppie di stelle in corrispondenza

correlativa. Sono noti i procedimenti coi quali STAUDT [1] e dopo Staudt il REYE [2] ed altri geometri hanno stabilita una tale proposizione; anzi recentemente una questione analoga è stata trattata dal SEGRE [3] per le iperconiche e le iperquadriche [4].

I procedimenti tenuti da Staudt e dagli altri geometri sono indubitatamente eleganti, ma tali procedimenti, per la proposizione « data la quadrica cercare una coppia di stelle in corrispondenza correlativa colla quale può essere generata » suppongono l'uso della conica, e per la proposizione « data una coppia di stelle in corrispondenza correlativa mostrare che esse generano una quadrica » consistono nel dimostrare che la sezione del luogo generato dalle stelle fatta con un piano arbitrario è un luogo del 2° ordine. Certamente, tenuto conto della continuità che presentano le curve del 2° ordine, e che inoltre la continuità è un elemento conservato dalle trasformazioni correlative, tali procedimenti non lasciano nulla a desiderare dal punto di vista scientifico, ma io spero che il lettore, specialmente quando la quadrica (considerata come luogo e come inviluppo) sia stata definita come quella totalità d'elementi *punto-piano* che la condizione d'incidenza *stacca* dalla totalità degli elementi punto-piano di una corrispondenza polare (senza nulla aggiungere relativamente alla continuità del succedersi di questi elementi) troverà più opportuno il procedimento che esporrò.

Io pongo la questione nei seguenti termini (e giova di far così in vista delle ragioni dette sopra):

I. *Data una corrispondenza polare con punti reali in posizione unita coi corrispondenti piani polari, mostrare che in una infinità di modi si possono quei punti ottenere come intersezioni degli elementi corrispondenti di due stelle correlative, e dualmente.*

II. *Date due stelle correlative mostrare che esiste una individuata corrispondenza polare rispetto alla quale i punti in posizione incidente coi corrispondenti piani polari, sono i punti comuni agli elementi omologhi delle due stelle, e dualmente.*

---

(1) *Geometrie der Lage.*

(2) *Géométrie de position*, t. II.

(3) Si cfr. fra gli altri: SALVATORE-DINO, *Sulle superficie del secondo ordine ecc.*; NICODEMI, *Geometria descrittiva*; ASCHIERI, *Geometria proiettiva e descrittiva.*

(4) Iperconica ed iperquadrica sono i nomi che Segre ha dato agli enti rappresentabili con un'equazione quadratica a coefficienti immaginarii fra le coordinate di un punto nel piano o nello spazio. Vedi *Su un nuovo campo di ricerche geometriche* (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, anno 1890).

4. La proposizione I per corrispondenze polari non degenerate, io l'ho già dimostrata nel mio articolo *Escursioni matematiche diverse* [1] ma qui riprodurrò leggermente modificata quella dimostrazione sia per completarla nei casi allora tralasciati, sia per dare unità a questo articolo.

Sia dunque Π una corrispondenza polare non nulla con una F^2 di punti reali in posizione unita coi corrispondenti piani polari, e siano S_1, S_2 due tali punti di piani polari σ_1, σ_2 rispettivamente. Poniamo $S_1S_2 \equiv s$, $\sigma_1\sigma_2 \equiv s'$, e diciamo:

α, β due piani arbitrarii tirati rispettivamente per s', s; (α), (β) le polarità piane determinate da Π rispettivamente su α, β. La polarità (α) può non aver punti reali situati sulle corrispondenti polari: la (β), invece, ne ha poichè tali sono per (β) i punti S_1, S_2.

Diciamo inoltre M ed m un punto ed una retta di α polari in (α), e poniamo $S_1M \equiv p$, $S_2m \equiv \pi$, $p\pi \equiv P$. Immaginiamo di aver preso per β precisamente il piano che contiene p; è evidente allora che, essendo M e $\beta m \equiv M'$ reciproci rispetto ad (α), quindi anche tali rispetto a Π e (β), si avrà che il punto $p \,.\, S_2M'$ appartiene alla corrispondente polare in (β), e quindi al corrispondente piano polare in Π. Ma tal punto è anche il punto $S_1M \,.\, S_2m$, dunque, proiettando da S_1, S_2 poli e polari in (α) si hanno delle intersezioni degli elementi proiettanti punti che stanno sui corrispondenti piani polari in Π, cioè punti di F^2. — Viceversa, sia P un punto arbitrario di F^2, e β sia quel piano di s che contiene P. Le rette S_1P, S_2P saranno tagliate dalla $\beta\alpha$ che passa pel punto $\beta s'$ polo di s rispetto a (β) in due punti M, M' reciproci a (β), e quindi anche rispetto a Π ed (α), cioè che la polare di M rispetto ad (α) passa per M'. Sia m questa polare: il punto P è allora l'intersezione della retta S_1M col piano S_2m; epperò P è proiettato da S_1, S_2 su α in due elementi polari rispetto ad α; il che dimostra la proposizione I, nel caso generale.

Se Π specializza assumendo un punto singolare V, cioè se F^2 è un cono di vertice V, la polarità (α) specializza anch'essa riducendosi ad una coppia di rette a_1, a_2 incrociantisi in V. Il ragionamento precedente applicato a questo caso conduce ad una corrispondenza correlativa fra (S_1) ed (S_2) anch'essa degenerata; mentre è possibile far nascere F^2 da due stelle in corrispondenza non degenere supponendo, p. e., $S_1 \equiv V$ ed $S_2 \not\equiv V$; o addirittura supponendo $S_1 \equiv S_2 \equiv V$.

Se Π specializza riducendosi ad una coppia di piani π_1, π_2, distinti o coincidenti basterà formare due stelle correlative degenerate per cui π_1, π_2 siano piani singolari. Due stelle non degenerate non possono dare una copia di piani se non quando sono sovrapposte.

---

(1) Cfr. *Giornale di Matematiche di Napoli*, anno 1890.

5. Dimostriamo ora la proposizione II. — Sia (S_1), (S_2) le due stelle e σ_1, σ_2 i due piani di esse che corrispondono alla retta $S_1S_2 \equiv s$ una volta considerata come appartenente ad (S_1) un'altra come appartenente ad (S_2). Poniamo $\sigma_1\sigma_2 \equiv s'$, e per s' tracciamo un piano arbitrario α: questo segherà (S_1), (S_2) secondo una correlazione Γ. Siano M ed m' un punto di α e la corrispondente retta in Γ; tiriamo la $S_1M \equiv p_1$ ed il piano $S_2m' \equiv \pi_2$, indi consideriamo il piano $S_1S_2M \equiv \beta$, la retta $\beta\pi_2 \equiv p_2$ ed il piano π_1 di (S_1) che corrisponde alla p_2 di (S_2). Avremo che, nel piano β, saranno corrispondenti in due medesimi fasci proiettivi col centro di proiettività in $\beta s' \equiv S''$ e coi centri in S_1, S_2 le due coppie di rette p_1p_2 e $S_1M' \equiv p'_1$, $S_2M \equiv p'_2$, ove si è posto $M' \equiv \beta m'$. Da ciò segue allora, per una nota proprietà dei fasci di rette proiettivi e complanari che la retta MM' passa per S'', e che quindi per M' passa anche la polare m di M nel sistema polare fondamentale Π di punti della correlazione Γ (1). Si consideri un tal sistema polare; esso proiettato dal punto A', armonico di A rispetto ad S_1, S_2, fornisce una stella (A') in corrispondenza polare col sistema piano (α). Accoppiando a tale corrispondenza polare gli elementi S_1, σ_1, si individua una corrispondenza polare spaziale, la quale fa, evidentemente, corrispondere alla retta s la retta s', e quindi anche al punto S_2 il piano σ_2. Indicandola con Ω, dico che questa risponde allo scopo.

Ω ha, in fatti, punti reali in posizione unita coi corrispondenti piani polari, poichè tali sono S_1, S_2; ed ogni altro punto M per cui $S_1M = p_1$ ha per corrispondente un piano π_2 di (S_2) che passa per M è tale che per M passa pure il piano polare di M rispetto a Ω, poichè nel piano $\beta \equiv S_1S_2M$ i due fasci proiettivi determinati come precedentemente per mezzo della corrispondenza correlativa data fra (S_1), (S_2) e quelli determinati per mezzo di Ω sono identici, entrambi ottenendosi dal proiettare da S_1, S_2, la involuzione dei punti reciproci che Π determina nella retta $\beta\alpha$.

(1) Ogni correlazione piana ha (come è noto anche per ogni correlazione spaziale) un sistema polare fondamentale di punti ed un sistema polare fondamentale di rette. Cfr. per i procedimenti rigorosamente sintetici con cui tali sistemi possono essere rinvenuti, il mio articolo *Un teorema nella geometria di una certa classe di corrispondenze*, pubblicato nel Giornale di Battaglini dell'anno 1888.

RECENSIONE

G. Veronese — *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee, ecc.* Padova, 1891, pag. XLVIII-630.

« 1. **Penso.**
« 2. Penso **una cosa o più** cose.
« 3. Penso **prima** una cosa, **poi** una cosa » (*).

Così (pag. 1) incomincia il libro, col quale l'A. pone la matematica « in balìa nei suoi principî delle molteplici opinioni filosofiche che si disputano la verità » (pag. XIII).

Il libro ha una *introduzione*, di oltre 200 pagine, contenente le nozioni comuni (o principii di logica), il concetto di numero, una teoria dei numeri infinitesimi ed infiniti, ecc.

Esso si divide in due parti, l'una col titolo « La retta, il piano e lo spazio a tre dimensioni nello spazio generale » e l'altra: « Lo spazio a quattro e a *n* dimensioni nello spazio generale ».

La prima osservazione che si presenta al lettore si riferisce alla lingua adoperata nel libro. Così a pag. 39 sta scritto:

« Def. I'. La sottrazione di un numero *b* da un altro numero *c* maggiore di *b* significa trovare un numero *a* tale che sommato a *b* dia *c* ».

Queste sgrammaticature, abituali all'autore, rendono assai difficile la lettura del libro, ed inintelligibili alcuni suoi punti. Vedasi ad es. l'ipotesi IV (pag. 92).

Lasciando in disparte le questioni metafisiche, mi limiterò ad un rapido esame dei fondamenti di queste teorie.

Riguardo alle nozioni comuni, a pag. 2, l'A. ammette due *principii necessarii*, di cui il secondo è *la negazione* (così dice l'A.) del primo; e il cui insieme quindi costituisce l'assurdo.

Riguardo al concetto di numero intero, l'A. usa a pag. 7 le parole *prima*, *seconda*, *terza*, ecc., mentrechè solo a pag. 26 si comincia a trattare il « primo concetto di numero ». Inoltre nella stessa pagina 7, dopo aver definito la serie A B C D ... N ... come ciò che si ottiene pensando prima ad A, poi a B, e così via, ammette (pag. 12) che la serie possa non avere un'ultima cosa, nè la prima, e (pag. 56) che fra due elementi consecutivi A e B vi siano altri elementi della serie stessa. Ora è chiaro che, secondo la definizione data, pensando prima ad A, poi a B, e così via, ogni persona avrà pensato un numero finito di oggetti quando afferma di avere

(*) Le frasi entro « » sono riprodotte, collo stesso carattere di stampa, dal libro in questione.

una serie; quindi, secondo la definizione data, la serie deve avere un ultimo elemento. Che le altre definizioni dell'A. siano in contraddizione colla definizione data, è cosa troppo evidente.

Riguardo infine al modo con cui l'A. tratta la teoria degli spazii a più dimensioni, ricorderò brevemente che, mentre la teoria analitica di questi spazii non presenta difficoltà di sorta, riducendosi allora questa teoria ad un cambiamento di nomi ad enti algebrici, la teoria geometrica o sintetica, ove si considerino i punti dell'iperspazio tali e quali quelli dello spazio ordinario, dà luogo a difficoltà, esigendosi allora un numero di postulati maggiore di quelli richiesti per la geometria ordinaria. Dopo la discussione su questo soggetto, nella *Rivista di Matematica*, vol. I, pag. 66 e 154, l'egregio prof. Amodeo, in un suo articolo (*), trattò siffatta questione in modo chiaro e rigoroso. Risulta da questa teoria che il numero dei postulati necessari per stabilire la teoria degli spazii a più dimensioni, è illimitato, ossia è attualmente infinito.

Invece il prof. Veronese non parte da alcun postulato, ma si basa sul principio fondamentale del N. 37, « sul quale principio » dice l'A. a pagina 457 « ha il suo appoggio la nostra definizione dello spazio generale ». Esso è (pag. 13)

« *a*) *Data una cosa* A, *determinata, se non è stabilito che* A *è il gruppo* « *di tutte le cose possibili che vogliamo considerare, possiamo pensarne* « *un'altra non contenuta in* A (*vale a dire fuori di* A) *e indipendente* « *da* A »,

che a mio modo di vedere significa:

Data una classe A, *se essa non contiene tutti gli oggetti, allora essa non contiene tutti gli oggetti.*

Da questa proposizione l'A., con logica nuova, sopprime la condizione che la classe non contenga tutti gli oggetti, e deduce la *a'* (pag. 14)

« *La serie delle cose che si ottiene ponendo una cosa* B *fuori di* « *un'altra* A, *una cosa* C *fuori del gruppo* AB, *e così via, è illimitata.* « Perchè supposto che si ottenga un ultimo gruppo A, si può immaginare « un'altra cosa B fuori di A (*a*) ».

Le conseguenze di questo principio assurdo sono evidenti.

Così (pag. 85), fuori di tutti i numeri sonvi ancora dei numeri, e in tal modo si generano gli infiniti; e (pag. 211) fuori di tutti i punti sonvi ancora dei punti, e per tal via si generano gli spazii a più dimensioni!

E si potrebbe lungamente continuare l'enumerazione degli assurdi che l'A. ha accatastato. Ma questi errori, la mancanza di precisione e rigore in tutto il libro tolgono ad esso ogni valore.

G. Peano.

(*) *Quali possono essere i postulati fondamentali della Geometria proiettiva di uno* S_r. Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. XXVI, pag. 741-770.

Sulla linearità delle varietà ad un numero qualunque di dimensioni

di F. Amodeo *a Napoli.*

In due pregevoli lavori recentemente pubblicati, l'uno del sig. K. Zindler (¹), e l'altro del sig. Fano (²), si afferma che non ancora è stata data la definizione della *varietà lineare ad un numero qualunque di dimensioni*. È bene quindi che io faccia osservare, che questa definizione è stata già da me data implicitamente in una mia nota presentata nel maggio 1891 alla R. Accademia di Torino (³). La quale, immaginata e redatta nei primi mesi della mia breve residenza a Torino, mi venne suggerita alla mente dalle discussioni che già da tempo avevan luogo, nelle giornaliere riunioni dei giovani e valorosi matematici di quella città (⁴), sulla questione dei postulati che debbono stare a base della geometria; questione che, per quel che riguarda la geometria proiettiva, fu poi presentata al pubblico dal sig. Segre nelle sue lezioni dell'anno accademico 1890-91, e nel suo pregevolissimo articolo « *Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche* » inserito in questa Rivista (⁵).

Nella mia nota esposi un sistema di postulati necessarii per lo studio della Geometria proiettiva di uno *spazio lineare ad r dimensioni*, ed accennai che con questo si perveniva alla definizione di una varietà lineare ad *r* dimensioni, poichè nella prefazione (pag. 741) scrissi queste parole:

(1) *Nachweis linearer Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension in unserem Raume; lineare Complexe und Strahlensysteme in denselben.* Sitzungsberichten der kaiser. Akad. der Wissenschaften in Wien (Math.-naturw. Classe: Bd. CI. Abth. II, a. Februar 1892).

(2) *Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva di uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni.* Giorn. di Battaglini. Vol. XXX 2, 3, 1892, pag. 106-132.

(3) *Quali possono essere i postulati fondamentali della geometria proiettiva di uno* S_r.

Citerò in seguito questa nota con le iniziali n. A. In essa ho esposta qual parte hanno presa nella questione i sigg. De Paolis, Pasch, Peano e Lindemann.

(4) Sarebbe desiderabile che in tutte le città italiane, ove vi è vita scientifica, potessero effettuarsi queste riunioni di cui Torino ci dà esempio.

(5) Cfr. p. 60 e 61, vol. I_2, 1891.

« Quando questa questione (quella dei postulati fondamentali della geometria proiettiva) fosse risoluta, si potrebbe anche di conseguenza definire *che cosa è una varietà lineare di dimensione* r, cioè precisare quali sono i caratteri che deve avere una varietà di dimensione r, perchè il suo studio sia analogo a quello di uno spazio ad r dimensioni ».

E da tutta la mia nota risulta (a me non parve che vi fosse bisogno di dirlo esplicitamente) che i caratteri che una varietà formata di enti qualunque (che diremo *punti*) deve avere per essere di *dimensione* r *e lineare* sono i seguenti:

1. *Ogni due suoi punti distinti devono individuare una classe di infiniti punti* (retta), *di cui quei due fan parte, tale che ogni altra classe analoga di punti che contenga quei due sia identica ad essa.*

2. *Fuori della retta, individuata da due suoi punti distinti, deve esistere ancora un punto.*

3. *Ogni piano* $\mathrm{a_0{\cdot}a_1a_2}$ (1) *individuato da tre suoi punti indipendenti* $\mathrm{a_0}$, $\mathrm{a_1}$, $\mathrm{a_2}$ *deve essere identico a qualunque altro piano* $\mathrm{a_0{\cdot}bc}$, *se* b, c *sono due qualunque altri punti del piano* $\mathrm{a_0{\cdot}a_1a_2}$, *non per diritto con* $\mathrm{a_0}$ (2).

4. *Fuori del piano* $\mathrm{a_0a_1a_2}$ *deve esistere ancora un punto.*

5. *Fuori dell'*S_3 $\mathrm{a_0a_1a_2a_3}$ *deve esistere ancora un punto.*

. . . .

$\mathbf{r+1}$. *Fuori dell'*S_{r-1} $\mathrm{a_0a_1a_2 \ldots a_{r-1}}$, *deve esistere ancora un punto.*

$\mathbf{r+2}$. *La retta di questa varietà deve soddisfare ai postulati necessarii e sufficienti a stabilire una corrispondenza univoca e continua fra i suoi punti e la variabile numerica reale* (3) (razionale ed irrazionale).

---

(1) Il simbolo $\mathrm{a_0{\cdot}a_1a_2}$ significa che il piano è generato congiungendo il punto $\mathrm{a_0}$ ai punti della retta $\mathrm{a_1a_2}$.

(2) La forma originaria di questa condizione (V. post. 4° n. A.) è: *Dati i tre punti* $\mathrm{a_0}$, $\mathrm{a_1}$, $\mathrm{a_2}$, *e costruito il piano* $\mathrm{a_0{\cdot}a_1a_2}$ *ogni altro piano* $\mathrm{a_0{\cdot}bc}$ *che contenga i punti* $\mathrm{a_1}$, $\mathrm{a_2}$ *coincide con esso.*

(3) Questi postulati portano nella mia nota i numeri $r+3$, $r+4$, $r+5$; ad essi deve essere aggiunto quest'altro postulato, sfuggito alle mie considerazioni, e che porterebbe il numero $(r+3)_a$: *Il quarto punto armonico* d *in ordine a tre punti* abc *di una retta non deve coincidere con* c.

Però è da notare che con questi postulati non si può parlare di linearità di una varietà a 1 e a 2 dimensioni (v. n. A., p. 743) se questa non è contenuta in una varietà di dimensione $\geqq 3$. Per le varietà di dimensioni 1 o 2, che non siano contenute in una varietà di dimensione maggiore bisognerà ammettere rispettivamente l'una o l'altra di queste condizioni:

Tre punti abc *distinti* INDIVIDUANO *un punto armonico* d *in ordine ai primi tre, e questo è separato da* c *mediante* a *e* b;

Tre punti abc *distinti di una sua retta* INDIVIDUANO *un quarto punto armonico* d *in ordine ai primi tre.*

E quasi inutile di avvertire che, per passare dalla geometria proiettiva alla geometria elementare (euclidea), bisogna aggiungere ai postulati di quella altri postulati che riguardano l'ente all'infinito.

***

Il signor Zindler nel § 1 della sua memoria conchiude con questo teorema:

« Wenn durch je zwei Elemente (« Punkte ») einer n-stufigen Mannigfaltigkeit R_n irgend welcher Elemente R_0 in eindeutiger (in den Einzelfällen anzugebender) Weise eine einstufige Mannigfaltigkeit R_1 der Elemente (eine « Gerade ») definird wird, ferner die Gesammtheit R_2 der Elemente, welche durch eine R_1 und einen ausserhalb liegenden Punkt R_0 als Inbegriff der auf den Verbindungsgeraden zwischen R_0 und allen Punkten von R_1 liegenden Punkte definirt ist, die Eigenschaft hat, dass jedes durch zwei Punkte von R_2 definirte R_1 vollständig R_2 angehört und zwei verschiedene in R_2 liegende R_1 ein Element gemeinsam haben; so reicht dies dazu hin, dass R_n, wie vielstufig es auch sei, linear ist. »

Cosicchè, escluse le condizioni 2, 4, 5,... $\mathbf{r+1}$ che il sig. Zindler non cita, perchè egli suppone conoscere d'altra fonte la dimensione della sua varietà, le sue condizioni di linearità si riducono alle mie **1** e **3**, cui esse equivalgono, e non tiene presente la $(\mathbf{r+2})^{\mathrm{ma}}$.

Però se questa condizione manca nell'enunciato, non manca nelle considerazioni che egli fa quando vuole dimostrare che tutti i complessi dello spazio a tre dimensioni, e quelli di uno S_{2q+1}, formano una varietà lineare. Poichè a pag. 170 del vol. citato, dopo aver fatto vedere che due complessi dello spazio determinano infiniti complessi, egli aggiunge:

« Die Gesammtheit der regulären und singulären Complexe bildet also eine Mannigfaltigkeit, für welche 1) des § 1 gilt, *wobei zugleich die Complexe eines Büschels* **lückenlos** *auf das Ebenenbüschel um jeden Strahl* s *des Trägers* Ψ *abgebildet sind, und ebenso natürlich dual auf die Punktreihe* s *durch die Nullpunkte einer festen Ebene* π *durch* s *bezüglich aller Complexe des Büschels.* »

E quando egli mostra che la retta formata da tutti i complessi determinati da due complessi dello spazio può essere rappresentata *senza lacune* univocamente sopra una ordinaria punteggiata, o sopra un ordinario fascio di piani, ha precisamente dimostrato che la *retta* di complessi soddisfa a tutti i postulati che servono a caratterizzare la linearità dello spazio a una dimensione.

***

Il sig. Fano, dalla cui pregevole nota ho rilevato il post. $(r+3)_a$ che ho aggiunto (v. nota (1) p. 149) ai miei postulati, fa diverse altre osservazioni sul mio sistema di postulati. Io non rilevo quelle che riguardano la forma sola dei postulati, come p. es. quelle riguardanti i post. 2°, 4° e $(r+3)^{mo}$ (1) (2); mi fermo solo a considerare ciò che egli dice in riguardo ai postulati $(r+4)^{mo}$ ed $(r+5)^{mo}$, che egli dichiara non necessarii per decidere della linearità di uno spazio a una dimensione.

E dapprima fo osservare che i concetti di *segmento* e di *distanza*, a cui egli crede utile non ricorrere, non sono concetti fondamentali *non definiti*, ma conseguenze dei postulati precedenti, e quindi l'eliminarli non semplifica la teoria, ma priva il ragionamento di vocaboli utilissimi.

(1) Per evitare confusione avverto che i numeri marcati si riferiscono ai caratteri della varietà riferiti sopra; i numeri non marcati si riferiscono alla numerazione che portano i postulati nella n. A., ed i numeri romani si riferiscono alla numerazione dei postulati del sig. Fano.

(2) Dirò solamente che in quanto alla forma si potrebbe osservare:

Che il post. I sulla retta, che egli sostituisce al mio post. 2° (vedi carattere **1**) è incompleto (a parte il numero diverso di punti che costituiscono la retta), poichè di esso dovrebbero essere parti integranti quelle che egli aggiunge per definizione della retta, e che sono invece veri postulati, da comprendersi nel post. I o da enunciarsi esplicitamente a parte.

Che io preferisco la forma del post. IV (vedi car. **3**) ai due post. II e III che egli sostituisce perchè con esso resta maggior analogia fra la teoria analitica e la teoria sintetica del piano (o della *rete*), ed anche perchè esso è la vera estensione allo spazio a 2 dimensioni del post. sulla retta; infatti esso si potrebbe enunciare così: *Ogni due* S_1 *che hanno un punto comune individuano una retta o fascio di infiniti* S_1 *che passano per quel punto, di cui essi fan parte, tale che ogni fascio analogo di* S_1 *che contenga quei due è identico ad essa.*

Che inoltre tanto il mio post. $(r+3)^{mo}$ che i suoi post. **Va VIa**, fanno assumere come concetto fondamentale *non definito* il *verso* della retta, solo che io non mi preoccupo di vedere in quanti postulati più semplici quello si potrà scomporre (e non sono due solamente, poichè vi sono quelli che riguardano *l'ordine*, il *partire da un punto*, il *percorrere la serie dei punti*, ecc...).

Non ammettendo il post. $(r+4)^{mo}$ (1) non si può venire alla conchiusione che fra i punti della retta e la variabile numerica reale intera vi sia corrispondenza univoca; poichè il punto della retta che io chiamo **a**, e che egli chiama 0, non avrebbe indice, non corrispondendo esso ad alcun valore della variabile reale, e sulla retta ci sarebbero due punti l'uno con l'indice $+\infty$, l'altro $-\infty$, ciò che sarebbe contrario al concetto proiettivo.

All'appunto indiretto che il sig. Fano fa al metodo da me seguito per distendere sulla retta la variabile frazionaria, quando dice che egli preferisce quella tenuta dal compianto prof. De Paolis (troppo presto rapito alla scienza), debbo far notare che nell'apportare delle modificazioni a questa via, io fui mosso dall'idea che nel discutere di postulati fondamentali bisogna tener presente che questi debbono essere premessi alla scienza stessa, e quindi sia naturale esigere che siano stabiliti con i concetti più semplici che si svolgono nel trattamento della scienza, e ciò ottenni evitando la teoria dell'involuzione.

In quanto al post. $(r+5)^{mo}$ mi limito a far osservare che la sua assenza fa pervenire a definire varietà lineari particolari, sulle quali non si può fare altro che la geometria dei problemi di primo grado, e quando si vorrà passare ai problemi di 2°, di 3° grado, ecc., si dovranno ammettere, per definizione, dei punti, che non è che manchino (come pel caso dei punti immaginarii) ma che ci sono di fatto.

Inoltre, poichè il sig. Fano dice (v. p. 128, nota (**)) che non ci è bisogno di sapere i punti della retta *dove siano*, ma se *ci sono*, si potrebbe dimandare: Questa retta e quindi la varietà S_r è *continua?* Da tutta la sua nota e dal suo insieme di postulati ciò non appare.

E per terminare dirò che nella definizione data a p. 131, n. 18 dal sig. Fano per la *varietà lineare a r dimensioni*, la prima condizione è incompleta come il post. I; e che la seconda definizione ha del superfluo; basterebbe enunciarla così: *La varietà stessa possa considerarsi come formata da una varietà a* $r-1$ *dimensioni e da un punto fuori di essa.* Poichè in tal caso per la 1a condizione essa *deve* contenere tutte le rette che congiungono il punto esterno ai singoli punti della S_{r-1} e non altri. Ma anche ridotta a questa forma è chiaro che essa contiene tutte le condizioni da me indicate nei numeri **2, 4, 5... (r+1)**.

(1) Esso è così enunciato: *Se* **p** *è un punto del segmento* $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1\mathbf{a}$, *assegnato arbitrariamente fra* $\mathbf{b}_1$ *ed* **a**, *fra i punti della serie* $\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3\mathbf{b}_4 \ldots \mathbf{b}_r \ldots$ (serie armonica) *ve ne è sempre uno che è compreso fra* **p** *ed* **a**, *nel segmento* $\mathbf{b}_0$**pa**, *anche se il punto* **p** *non faccia parte della serie stessa.*

CORRISPONDENZA

A proposito di un recente Articolo del sig. F. Giudice.

(Rivista di Matematica, II, 106-108).

Il sig. F. Giudice, nella sua recensione del vol. II della nostra versione della *Teoria delle equazioni algebriche* del sig. Petersen, ha notato giustamente che il criterio dato a pag. 5 per calcolare un limite superiore delle radici non è esatto. C'importa però di far rilevare che con una leggiera modificazione il metodo proposto dall'Autore riesce.

Riferendoci per brevità alla notazione del testo (pag. 3 e 4), per ogni valore dell'indice p, eccetto $p=m$, si calcoli ancora come nel testo il valore α_p di α che rende minima l'espressione $\frac{1}{\alpha}+\sqrt[m]{a_p\alpha^{p-m}}$, e nella formola

$$\frac{1}{\alpha}+\sqrt[m]{a_q\alpha^{q-m}}\quad . \; . \; . \quad (1)$$

si ponga α_p per α, dando a q successivamente tutt'i valori pei quali $-a_q$ è un coefficiente negativo dell'equazione proposta. Fra tutti i valori che prende così la (1) per un p fissato, si scelga il massimo e sia M_p; allora M_p è certamente un limite superiore delle radici. In tal modo, facendo variare p, si ha una serie di limiti superiori, fra i quali si può scegliere il più piccolo. Questo metodo condurrà quasi sempre ad un limite più basso di quello che dà la formola (1) del testo.

Quanto poi all'osservazione alla nostra Nota a pag. 112, avvertiamo che la definizione dell'isomorfismo data nel testo è appunto quella (1, n); sicchè restava senz'altro inteso che noi così l'intendevamo.

Finiamo ringraziando l'Egregio Professore della benevola ed accurata sua recensione, nella quale egli ha dimostrato ancora una volta la sua grande competenza in materia.

G. Sforza — G. Rozzolino.

Lettera aperta al Direttore della Rivista di Matematica

di F. Amodeo, *a Napoli.*

Chiar.mo Signor Direttore,

Leggo nel fascicolo 7°-8° del vol. II or pubblicato, pag. 138, una dimostrazione del sig. Del Re di un teorema (1) che egli molto opportunamente considera di grande importanza.

Siccome anche io ne ho data e pubblicata una dimostrazione rapida fin dal 1888 (Vedi *Lezioni sulle omografie binarie dettate nel corso di geometria proiettiva*, § 6, 53 *a*); 2ª ediz. Napoli, 1889) è bene far notare che se si muta della mia dimostrazione le lettere S_1, S_2, S_3 in 1, 3, 5, Q, R, P in 6, 4, 2, A_1 A_2 A_3 A'_2 in A A_1 A_2 A'_1 si ottiene la dimostrazione del signor Del Re.

(1) Proiettando da due punti arbitrarii di una conica tutti i punti di questa sopra una medesima retta si ha una proiettività dotata (al variare dei centri di proiezione) di una involuzione unita fissa.

Il senatore Errico Betti.

È un caso, ma è strano; e credo che non se ne trovino di simili percorrendo gli annali della vita universitaria italiana.

Sembra che una grave iattura pesi sui matematici nostri; in pochi mesi se ne sono spenti cinque, fra i migliori.

Si spense serenamente a Napoli Annibale De Gasparis, astronomo di fama europea, autore di numerose scoperte nei cieli; di cui il migliore elogio e il più vero ritratto fu compendiato da uno scrittore di ingegno in una sola parola: *era buono;* e la sublime purezza dell'anima sua era forse l'immagine di quelle armonie che egli studiava nei cieli.

Si spense quasi improvvisamente il nestore degli insegnanti napoletani il senatore Achille Sannia, maestro a tante generazioni di giovani che lo amavano come un padre.

Si spensero l'un dopo l'altro, a pochi mesi di distanza, Dino Padelletti dell'Università di Napoli e Riccardo De Paolis di quella di Pisa.

Giovani entrambi, lasciarono la vita quando l'avvenire si presentava loro sotto le forme più seducenti; la lasciarono fra il compianto di tutti che pensavano contristati a quelle due giovinezze distrutte innanzi tempo, e che avrebbero potuto essere ancora utilmente spese pel vantaggio degli studii e pel decoro del nome italiano.

Ed ora infine giunge la notizia che il senatore Betti si è spento serenamente nella sua villa di Soiana.

Io non mi propongo qui di ricordare che cosa fu il senatore Betti come scienziato; mi occorrerebbe maggior tempo di quello che io non abbia ora; altri scriverà di lui meglio e con maggior competenza; io mi limiterò qui a pochissimi ricordi, e non ho altro scopo che di rendere il mio omaggio modesto alla cara memoria di lui.

Errico Betti intese la missione del maestro nel senso più alto; la intese come un apostolato, e tutta la sua vita la dedicò ai giovani.

E in questa cura rivelò un tal zelo, una tale perspicacia e tale e così squisito ingegno di educatore, che parve notevole che egli, immerso in astratte speculazioni, potesse poi possedere qualità così pratiche.

Di una cadente istituzione delle antiche leggi scolastiche della Toscana e che, senza l'opera principalmente di lui, sarebbe stata certamente coinvolta nella rovina di tutte le antiche istituzioni, quando sul principio della formazione del Regno si distrusse tutto il passato per creare l'ordinamento scolastico dell'Italia nuova, di quella istituzione, dico, egli lentamente, con zelo di apostolo e con pazienza di scienziato, seppe formarne il primo istituto normale d'Italia, donde annualmente escono i migliori giovani che vanno poi a popolare le cattedre dei Licei e delle Università.

Le difficoltà che egli dovette incontrare e vincere per tanti anni per giungere a questo risultato, non posso avere qui la pretensione di narrare; ma se le potrà immaginare ognuno che abbia la più pallida idea delle inevitabili condizioni amministrative del Paese e che sappia come molte volte le migliori idee e le più opportune proposte naufragano contro lo scoglio della burocrazia.

Non saranno stati pochi gli sforzi da lui dovuti fare per vincere il pregiudizio burocratico che tutto debba essere simmetricamente disposto in ogni cantone d'Italia, e che la dissimmetria creata fra l'Università di Pisa e le altre non era un male; non saranno state poche, diciamo pure la brutta parola, le invidie da lui smosse e le difficoltà potenti suscitategli contro da ciascuna invidia; e infine non sarà stata piccola la cupidigia di tanti, che avranno ostinatamente chiesta, anche per le altre Università, un'istituzione simile, non pensando che le istituzioni è inutile crearle, quando mancano gli uomini per sostenerle. Ed infatti quando più tardi un ministro si trovò vinto da questi ultimi e dovette cedere, se ne è visto poi il risultato.

Ed ora quel severo edifizio di piazza Cavalieri a Pisa ha perduto la prima sua anima.

Lì, fra quelle mura, solo, senza famiglia, egli ha trascorsa la parte più nobile della sua vita; tutta la sua giornata la passava lì, intento sempre a lavorare, a meditare, a scrivere; i giovani lo vedevano lì tutti i momenti come esempio e sprone ad una vita operosa, e sapevano di trovare in lui, più che un superiore, un padre sempre pronto ad occuparsi di loro e ad aiutarli.

Ed era davvero singolare il fascino che quest'uomo sapeva esercitare sui giovani, sui colleghi e sugli amici.

A primo aspetto vi appariva un'anima mite, e solo potevate notare in lui uno sguardo eccessivamente penetrante.

Ma per poco che lo udivate parlare, la sua figura vi si trasformava davanti, e quella lealtà e candidezza che spirava da ogni sua parola, unite a quella fierezza di propositi e di convinzioni, vi mettevano subito davanti la sua straordinaria superiorità.

Era mite; ma l'ingiustizia lo trovava un avversario invincibile, e non c'era nobile causa che non ritrovasse in lui un difensore ostinato.

I campi di Lombardia lo videro fra i primi, insieme al suo amico il Mossotti, a scrivere quella pagina gloriosa di storia che resta sempre come la più bella negli annali della vita universitaria italiana.

Quando egli era sotto la cattiva impressione di una cosa ingiustamente fatta da altri, l'uomo che avreste giudicato così schivo dalle

lotte e dai rumori del mondo, si trasformava e vi appariva sotto la figura di un lottatore risoluto.

Sui suoi colleghi esercitava, senza volerlo, e forse senza saperlo, un'autorità incontrastata.

Il suo consiglio era sempre ricercato, e tante volte seguìto; si potea forse qualche volta dissentire da lui, ma mai si potea dubitare della sua lealtà e della candidezza dei propositi suoi.

Quella nobiltà di sentimenti espressi in maniera così benevola, gli ideali così alti e disinteressati che egli avea della missione sua e dei suoi colleghi, sarebbero già bastati ad attirare sul suo nome un'autorità e una simpatia unica, se pure gli fosse mancata quell'altra autorità che gli veniva dalla sua lunga vita spesa tutta per gli studii, e dalla convinzione che era in tutti che egli quei sentimenti e quegli ideali li avea prima lungamente riscaldati nel cuore.

Ed ora che vuoto sentiranno attorno a loro quei miei amici della Università di Pisa, quando nelle lunghe serate di questo prossimo inverno, si raduneranno all'usato ritrovo!

Questi pensieri e ricordi mi si sono affollati alla mente quando, viaggiando, rivolto lo sguardo su di un giornale, vi ho letta la dolorosa notizia della morte del mio povero maestro ed amico; e non ho saputo allora resistere al desiderio di scrivere queste poche parole, che non si presentano al pubblico con altra pretensione che quella di esprimere il mio sincero cordoglio per la sventura toccata all'Università di Pisa, e che è stata sventura italiana.

Genova, 13 agosto 1892. ERNESTO PASCAL.

Sulle curve di Bertrand

per E. CESÀRO.

Le linee storte, intrinsecamente caratterizzate dall'equazione

$$\frac{A}{\rho^2}+\frac{B}{r^2}+\frac{C}{\rho r}=\frac{P}{\rho}+\frac{Q}{r}, \tag{1}$$

si presentano come curve eccezionali quando si cerca *se esistano sviluppabili fra le superficie generate dalle rette rigidamente connesse al triedro fondamentale.* Chiamate x, y, z le coordinate d'un punto qualunque d'una di queste rette, rispetto al triedro mobile, se si assumono a coordinate della retta stessa i coseni direttori α, β, γ ed il vettore definito dalle componenti

$$\xi=\gamma y-\beta z\,,\quad \eta=\alpha z-\gamma x\,,\quad \zeta=\beta x-\alpha y\,,$$

occorre e basta che sia costantemente

$$\dot\alpha\dot\xi + \dot\beta\dot\eta + \dot\gamma\dot\zeta = 0 \tag{2}$$

perchè la retta considerata generi una sviluppabile. Intanto si ha, per le formole fondamentali della Geometria intrinseca delle curve,

$$\dot\alpha = -\frac{\gamma}{\rho}, \quad \dot\beta = -\frac{\gamma}{r}, \qquad \dot\gamma = \frac{\alpha}{\rho} + \frac{\beta}{r},$$

$$\dot\xi = -\frac{\zeta}{\rho}, \quad \dot\eta = -\frac{\zeta}{r} - \gamma, \quad \dot\zeta = \frac{\xi}{\rho} + \frac{\eta}{r} + \beta,$$

e però si può alla relazione (2) dar la forma (1) ponendo

$$\frac{\beta\eta}{A} = \frac{\alpha\xi}{B} = -\frac{\alpha\eta + \beta\xi}{C} = \frac{\alpha\beta}{P} = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{Q}. \tag{3}$$

Se fra le curvature non sussiste alcun vincolo del tipo (1), conviene che si annullino, nelle (3), tutti i numeratori, e siano conseguentemente soddisfatte le equazioni

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \eta = 0,$$

le quali definiscono *le parallele alla tangente, tracciate nel piano rettificante*. Adunque son queste, in generale, *le sole generatrici di sviluppabili;* ma altre simili rette possono esistere quando la curva appartiene alla classe definita dall'equazione (1).

Effettivamente, se non sono tutti nulli i coefficienti della predetta equazione, eliminando ξ ed η fra le (3) si ottengono le relazioni

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\alpha\beta = 0, \quad P(\beta^2 + \gamma^2) = Q\alpha\beta, \tag{4}$$

per le quali si vede che *esistono,* in generale, *altre quattro generatrici di sviluppabili, parallele alle intersezioni d'un certo cono del secondo ordine con una coppia di piani:* il cono, che ha il vertice sulla curva, tocca, lungo la tangente, il piano osculatore, ed i piani passano per la normale principale. Le quattro rette sono poi determinate dalla condizione di appoggiarsi su certe due parallele alla tangente ed alla binormale, tracciate rispettivamente nel piano osculatore e nel piano normale. Tuttavia si noti che, se A, B, C sono nulli, svanisce la prima equazione (4), l'equazione (1) rappresenta un'elica, e le generatrici del cono rispondono tutte alla questione, poichè dalle (3) si trae ancora $\xi = 0$, $\eta = 0$.

In ciò che precede, affermando che le (4) ammettono un numero limitato di soluzioni comuni, si è tacitamente supposto che il secondo membro della (1) non sia, nel senso algebrico, un divisore del primo. Nel caso contrario l'equazione (1) si riduce ad

$$\frac{a}{\rho} + \frac{b}{r} = 1 \tag{5}$$

e rappresenta una *curva di Bertrand.* Siccome a P ed a Q si possono attribuire valori arbitrarii, purchè non entrambi nulli, anche per queste curve, *come per le eliche,* infinite altre rette rispondono alla questione proposta. Scritte le (4) sotto la forma

$$(a\alpha + b\beta)(P\alpha + Q\beta) = 0, \quad \alpha(P\alpha + Q\beta) = P,$$

si vede subito che si può ad esse in due ben diversi modi soddisfare, annullando cioè l'uno o l'altro fattore del primo membro della prima equazione. Quando si pone uguale a zero il secondo fattore, è $P = 0$, in virtù della seconda equazione, e però anche $\beta = 0$. Inoltre

$$A = Pa = 0, \quad B = Qb, \quad C = Pb + Qa = Qa.$$

Ciò premesso, le (3) diventano

$$\frac{\xi}{b} = -\frac{\eta}{a} = \frac{\gamma^2}{\alpha}.$$

I numeratori son tutti nulli solo quando sian tali γ ed η: si ritrovano allora le *infinite parallele alla tangente, tracciate nel piano rettificante.* Altrimenti le ultime equazioni rappresentano una congruenza, dalla quale la condizione $\beta = 0$ stacca un paraboloide iperbolico Π. Annullando poi il fattore $a\alpha + b\beta$, dalle (3) si trae

$$\eta = a\alpha, \quad \gamma(\zeta + b\gamma) = 0.$$

Per $\gamma = 0$ si ottengono *infinite altre rette parallele, situate in un piano parallelo al piano rettificante.* Una di esse, che chiameremo D, incontra la normale principale. Se γ non si pone uguale a zero, le equazioni

$$\eta = a\alpha, \quad \zeta = -b\gamma, \quad a\alpha + b\beta = 0,$$

definiscono le generatrici d'un altro paraboloide Π_1, parallele al piano formato con D dalla normale principale.

È dunque *caratteristica* per le curve di Bertrand *l'esistenza di due paraboloidi iperbolici, rigidamente connessi al triedro fondamentale, e tali che le loro generatrici d'un sistema restano tangenti a certe curve dello spazio.* Queste appartengono a due superficie rigate, delle quali sono linee di stringimento e geodetiche la curva considerata e lo spigolo di regresso della sviluppabile (D). I paraboloidi Π e Π_1 coincidono per le curve *a torsione costante* ($a = 0$), e degenerano in due parabole per le curve *a flessione costante* ($b = 0$). Una parabola è situata nel piano osculatore, ha il vertice sulla curva ed il fuoco nel centro di curvatura; l'altra è situata nel piano normale, ha il fuoco sulla curva ed il vertice nel centro di curvatura. Segue da tutto ciò che, *fra le rette rigidamente connesse al triedro fondamentale di un circolo storto, le sole che generino superficie sviluppabili sono le tan-*

genti alle parabole anzidette e le parallele alla tangente ed alla retta polare, tracciate rispettivamente nel piano rettificante e nel piano polare.*

Le equazioni di Π e Π_1, in coordinate di punti, sono

$$ay^2 - bxy + b^2z = 0\,, \quad ax^2 + bxy - b^2(z-a) = 0\,.$$

Se si osserva che dall'una all'altra si passa cambiando x, y, z in y, $-x$, $a-z$, rispettivamente, si scopre che *la conoscenza del paraboloide Π è sufficiente per la determinazione di tutte le rette che rispondono alla questione proposta.* Bisogna in primo luogo prendere le generatrici parallele al piano osculatore e le loro proiezioni sul piano rettificante; poi alle simmetriche, rispetto al piano rettificante, delle generatrici dell'altro sistema, ed alle loro proiezioni sul piano stesso, imprimere intorno alla normale principale il moto elicoidale risultante dalla traslazione a e dalla rotazione $\frac{\pi}{2}$.

Riprendiamo a considerare la retta D. Essa tocca il suo inviluppo sulla normale principale, alla quale si mantiene perpendicolare, senza ruotarle intorno: basta quest'ultima circostanza perchè sia lecito asserire che *la curva inviluppata ammette le stesse normali principali della curva data,* e siccome le tangenti alle due curve formano un angolo costante, ed i corrispondenti punti di contatto restano alla distanza costante a, si vede che *i triedri fondamentali delle due curve si muovono mantenendosi rigidamente collegati,* e, per conseguenza, tutte le generatrici di sviluppabili, precedentemente ottenute, restano connesse rigidamente anche al triedro della seconda curva. *Questa è* dunque *una curva di Bertrand.* Così ritroviamo la proprietà notevole, per la quale furono la prima volta studiate simili curve, e ci spieghiamo perchè nella precedente ricerca siam pervenuti a *due* paraboloidi ed a *due* sistemi di rette parallele, poichè ora è chiaro che *il paraboloide Π_1 non è,* per così dire, *che il paraboloide Π relativo alla seconda curva di Bertrand.* Del resto è facile verificare che a questa conviene effettivamente l'equazione intrinseca (5). Il calcolo diretto conduce infatti alle seguenti relazioni fra le curvature delle due linee:

$$\frac{a^2+b^2}{\rho_1} = a - b\frac{r}{\rho}\,, \quad rr_1 = a^2 + b^2\,.$$

Quindi

$$\frac{a}{\rho_1} + \frac{b}{r_1} = 1\,.$$

Quando le curvature sono costanti, l'unica condizione, cui debbano soddisfare le coordinate della retta, è

$$\left(\frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{\rho}\right)\left(\frac{\xi}{r} - \frac{\eta}{\rho}\right) = \frac{\alpha\beta}{\rho} + \frac{\beta^2+\gamma^2}{r}\,.$$

Le generatrici di sviluppabili formano, dunque, *nello spazio rigidamente connesso al triedro fondamentale di un'elica circolare, un complesso quadratico.* Questo è costituito dalle tangenti a tutte le eliche tracciate, con lo stesso passo, su cilindri concentrici a quello dell'elica data. La distribuzione delle rette del complesso si può anche studiare avvalendosi di quanto è stato già trovato per le curve generali di Bertrand, dopo aver osservato che un'elica circolare si può in infiniti modi considerare come una curva di Bertrand, per la quale a e b, arbitrarii, siano soltanto legati dalla relazione (5).

Si noti che *al triedro fondamentale di tutte le curve* (1) *è rigidamente connessa una superficie rigata, tale che ciascuna sua generatrice si sposta, nel moto del triedro, sopra una superficie a parametro distributore costante.* Ciò si dimostra assai facilmente, partendo dall'espressione del detto parametro:

$$\frac{1}{\omega} = \frac{\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2}{\dot{\alpha}\dot{\xi} + \dot{\beta}\dot{\eta} + \dot{\gamma}\dot{\zeta}}\,.$$

Quando a questa eguaglianza si dà la forma

$$\frac{\beta\eta + \omega(\alpha^2+\gamma^2)}{\rho^2} + \frac{\alpha\xi + \omega(\beta^2+\gamma^2)}{r^2} - \frac{\alpha\eta + \beta\xi - 2\omega\alpha\beta}{\rho r} = \frac{\alpha\beta}{\rho} + \frac{\beta^2+\gamma^2}{r}\,, \tag{6}$$

e si suppone ω costante, si ricade sopra un'equazione del tipo (1); ma nel caso di un'elica circolare, qualsivoglia retta genera una superficie a parametro distributore costante. Per le rette di qualsiasi piano parallelo al cilindro, il valore del parametro dipende unicamente dalla orientazione delle rette nel piano. Ad ogni valore di ω corrisponde poi un particolare complesso quadratico, rappresentato dall'equazione (6), che diventa

$$\frac{\alpha\xi}{\beta^2+\gamma^2} = \frac{r\rho^2}{\rho^2+r^2} - \omega$$

quando per assi delle z e delle x si prendano la normale principale e l'asse del cilindro. Il detto complesso si scinde in due complessi lineari, costituiti da tutte le rette che incontrano l'asse ($\xi = 0$) o gli son perpendicolari ($\alpha = 0$), quando il parametro distributore assume il valore

$$\frac{1}{\omega} = \frac{1}{r} + \frac{r}{\rho^2}\,.$$

Fanno ancora eccezione le curve di Bertrand. Nello spazio rigidamente connesso al loro triedro esistono infinite superficie rigate a ciascuna delle quali corrisponde un dato valore di ω. Così i paraboloidi Π e Π_1 rispondono entrambi ai valori 0 e b, cioè, *mentre le generatrici d'un sistema inviluppano,* come si è visto, *certe curve dello spazio, le altre generano superficie, il cui parametro distributore è costantemente inverso di b.* Del resto, identificando (6) con (1), nell'ipotesi che questa sia riducibile alla forma (5), si trovano le relazioni

$$\alpha\xi = (b-\omega)(\beta^2+\gamma^2)\,, \quad \beta\eta = a\alpha\beta - \omega(\alpha^2+\gamma^2)\,,$$
$$\alpha\eta + \beta\xi + a(\beta^2+\gamma^2) + (b-2\omega)\alpha\beta = 0.$$

Eliminando poi ξ ed η si ottiene l'eguaglianza

$$\beta(a\alpha + b\beta) = \omega(\alpha^2+\beta^2)\,,$$

per la quale si vede nuovamente come sia necessario far l'una o l'altra ipotesi

$$\beta = 0\,, \quad a\alpha + b\beta = 0\,,$$

affinchè riesca $\omega = 0$. Invece l'eliminazione di ω fornisce le equazioni di due complessi

$$(\alpha^2+\beta^2)\xi = -(a\beta - b\alpha)(\beta^2+\gamma^2)\,, \tag{7}$$
$$(\alpha^2+\beta^2)\eta = \alpha\beta(a\beta - b\alpha) - \gamma^2(a\alpha + b\beta)\,,$$

intersezione dei quali *è la congruenza formata, nello spazio rigidamente connesso al triedro fondamentale di qualsiasi curva di Bertrand, dalle generatrici di superficie a parametro distributore costante.* Siccome alle (7) si soddisfa prendendo

$$\gamma = 0\,, \quad z = \beta(a\beta - b\alpha)\,,$$

si vede che la congruenza racchiude infinite perpendicolari alla normale principale. Quelle che distano di h dal piano rettificante costituiscono due sistemi di parallele, corrispondenti a due valori di ω, radici dell'equazione

$$h(a-h) + \omega(b-\omega) = 0\,.$$

Posto

$$h = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\cos\theta\right), \quad \omega = \frac{1}{2}\left(b + \sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{sen}\,\theta\right),$$

θ rappresenta l'angolo dei due sistemi. Le rimanenti rette della congruenza sono distribuite su infiniti paraboloidi, rappresentati, in coordinate di punti, dall'equazione

$$hx^2 - (a-h)y^2 + bxy = (a^2+b^2)(z-h)\,\mathrm{sen}^2\,\theta\,.$$

Ad ogni valore di ω corrisponde una coppia di paraboloidi, le cui generatrici d'un sistema si spostano sopra superficie a parametro distributore $\frac{1}{\omega}$, mentre le altre generano superficie a parametro $\frac{1}{b-\omega}$.

Altrettanto dicasi delle proiezioni di tutte queste rette su due dati piani, le cui distanze dal piano rettificante si ottengono risolvendo rispetto ad h l'equazione (8). In particolare, *le tangenti a certe due parabole, situate in piani perpendicolari, che passano per la normale principale, generano superficie a parametro distributore $\frac{2}{b}$.* Così vien generalizzata, per tutte le curve di Bertrand, una proprietà dei circoli storti, ottenuta precedentemente.

Ueber die Aenderung der Hauptkrümmungen einer Fläche bei einer beliebigen Berührungstransformation.

(*Eine Anwendung der Methoden von* Grassmann).

Von R. Mehmke in Darmstadt.

In der « Zeitschrift für Matematik und Physik » Band 37, Seite 189, 1892, habe ich einen Satz über Berührungstransformationen auf beliebigen Flächen mitgetheilt, der in der Beschränkung auf die Ebene aussagt, dass bei jeder ebenen Berührungstransformation die Krümmung der Transformirten einer beliebigen Curve in irgend einem Punkt eine gebrochene lineare Function von der Krümmung der gegebenen Curve im entsprechenden Punkt ist [1]. Diesem Satz entspricht in der räumlichen Geometrie der folgende:

Wird eine Fläche einer beliebigen Berührungstransformation des Raumes unterworfen, so sind die Coefficienten der quadratischen Gleichung, welche die Hauptkrümmungen der Transformirten in irgend einem Punkte liefert, bilineare Functionen von den Hauptkrümmungen der gegebenen Fläche im entsprechenden Punkt.

Wir bezeichnen mit x den Punkt eines Flächenelementes, mit a eine Strecke von der Richtung der positiven Normale dieses Elementes, wobei wir festsetzen, dass x die Masse 1 und a die Länge 1 haben soll. Heisst $(\bar{x}, \bar{a})$ dasjenige Flächenelement, in welches das Flächenelement (x, a) durch eine beliebige Berührungstransformations des

---

(1) Einige geometrische und kinematische Anwendungen dieses Satzes zeige ich in einer Abhandlung, welche in der genannten Zeitschrift abgedruckt werden wird.

Raumes übergeführt wird, so kann diese Transformation durch zwei Gleichungen der Form

$$\bar{x} = f(x, a) \; ; \quad \bar{a} = \varphi(x, a) \tag{1}$$

dargestellt werden (¹). Handelt es sich um die Transformation einer bestimmten Fläche, so sind x und a als bestimmte Functionen zweier Parameter u_1 und u_2 zu denken. Die quadratische Gleichung in k, welche die Hauptkrümmungen der Fläche im betrachteten Punkte zu Wurzeln hat, lässt sich dann schreiben (²):

$$\left[a\left(k\frac{\partial x}{\partial u_1}+\frac{\partial a}{\partial u_1}\right)\left(k\frac{\partial x}{\partial u_2}+\frac{\partial a}{\partial u_2}\right)\right]=0 \, .$$

Die Gleichung für die Hauptkrümmungen der transformirten Fläche in Punkt $\bar{x}$ ist daher:

$$\left[\bar{a}\left(k\frac{\partial \bar{x}}{\partial u_1}+\frac{\partial \bar{a}}{\partial u_1}\right)\left(k\frac{\partial \bar{x}}{\partial u_2}+\frac{\partial \bar{a}}{\partial u_2}\right)\right]=0 \, . \tag{2}$$

Aus den Gleichungen (1) folgt aber durch Ableitung nach u_i:

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial u_i}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u_i}+\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial u_i}\, , \qquad \frac{\partial \bar{a}}{\partial u_i}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u_i}+\frac{\partial \varphi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial u_i}$$

$$(i=1, 2)\, .$$

Vor dem Einsetzen dieser Werthe in Gleichung (2) wollen wir noch die Annahme machen, dass zu Parameterlinien auf der gegebenen Fläche ihre Krümmungslinien gewählt worden seien. Dann ist bekanntlich (³), wenn man die Hauptkrümmungen der gegebenen Fläche im Punkt x mit k_1 und k_2 und zur Abkürzung $\dfrac{\partial x}{\partial u_i}$ mit b_i (⁴) bezeichnet:

$$\frac{\partial a}{\partial u_i}=-k_i \, . \, b_i \, ,$$

(¹) Damit diese Gleichungen wirklich eine Berührungstransformation liefern, damit also je zwei, nach der Ausdrucksweise des Herrn Lie vereinigt liegende Flächenelemente wieder in zwei vereinigt liegende Elemente verwandelt werden, müssen die partiellen Ableitungen der Functionen f und φ nach x und a gewisse Bedingungsgleichungen erfüllen, von denen jedoch im Obigen kein Gebrauch zu machen sein wird.

(²) Vergl. Formel 181 in: H. Grassmann jun., *Anwendung der Ausdehnungslehre auf die allgemeine Theorie der Raumkurven und krummen Flächen*, II. Teil: Krumme Flächen, erste Hälfte. Beilage zum Programm der lateinischen Hauptschule zu Halle a. S., Ostern 1888.

(³) Vergl. H. Grassmann a. a. O. Formel 180.

(⁴) b_1 und b_2 sind Strecken von beliebiger Länge parallel zu den beiden Haupttangenten der gegebenen Fläche im Punkt x.

und Gleichung (2), nach Potenzen von k geordnet, nimmt die Gestalt an:

$$\begin{aligned}
&\left[\bar{a}\left(\frac{\partial f}{\partial x}b_1-k_1\frac{\partial f}{\partial a}b_1\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}b_2-k_2\frac{\partial f}{\partial a}b_2\right)\right].\, k^2 \\
&+\left\{\left[\bar{a}\left(\frac{\partial f}{\partial x}b_1-k_1\frac{\partial f}{\partial a}b_1\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}b_2-k_2\frac{\partial \varphi}{\partial a}b_2\right)\right]\right. \\
&\left.+\left[\bar{a}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}b_1-k_1\frac{\partial \varphi}{\partial a}b_1\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}b_2-k_2\frac{\partial f}{\partial a}b_2\right)\right]\right\}.\, k \\
&+\left[\bar{a}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}b_1-k_1\frac{\partial \varphi}{\partial a}b_1\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}b_2-k_2\frac{\partial \varphi}{\partial a}b_2\right)\right]=0\, .
\end{aligned} \tag{3}$$

Damit ist der oben ausgesprochene Satz bewiesen (¹).

Indem ich von weiteren Folgerungen aus diesem Satze hier absehe, bemerke ich nur noch, dass aus Gleichung (3) durch Elimination von k_1 und k_2 eine bilineare Beziehung zwischen dem Gauss'schen Krümmungsmaass und der mittleren Krümmung der Transformirten einer beliebigen Fläche in einem beliebigen Punkt einerseits und den entsprechenden Grössen der ursprünglichen Fläche andererseits abgeleitet werden kann.

ERRATA

Nella pag. 160, linea 11 dal fondo, due volte, dopo « vereinigt liegende », si aggiunga « unendlich benachbarte ».

Dipendenza fra le proprietà delle relazioni

di G. Vailati *a Crema.*

(Estratto di lettera al Direttore).

. . . .

Approfitto volentieri per scriverle, dell'occasione che mi è offerta dall'articolo del prof. De Amicis, pubblicato nell'ultimo fascicolo della *Rivista di matematica.*

Per quanto è a mia cognizione, credo che l'argomento della *dipendenza fra le proprietà delle relazioni* non sia mai stato per l'innanzi trattato sotto quella forma, che pure è la più semplice e più naturale, nè da un punto di vista così generale.

(¹) Derselbe kann mit dem hier gegebenen Beweise offenbar auf ein krummes Gebilde von n Dimensionen in einem ebenen Raume von $(n+1)$ Dimensionen ausgedehnt werden.

Le seguenti osservazioni ed appunti che si riferiscono ai dettagli della trattazione potrebbero forse invogliare l'autore dell'articolo ad introdurvi alcune modificazioni che porterebbero a uno svolgimento più completo dell'argomento aumentando la portata del suo lavoro.

1° Le tre proprietà a cui nell'articolo sono rispettivamente applicate le denominazioni di *anti-transitiva, anti-comparativa, anti-adequativa* non sono, se ben si osservi, tre proprietà distinte, come salta subito all'occhio facendo uso, per enunciarle, delle notazioni della logica algebrica. Ciascuna di esse infatti viene ad essere espressa in simboli colla seguente formola:

$$a \supset b \,.\, b \supset c \,.\, a \supset c : = : \Lambda .$$

Si tratterebbe quindi di una sola proprietà che, a causa dell'imperfezione del linguaggio ordinario, può essere enunciata in tre modi diversi. È inutile avvertire che in conseguenza di ciò diventa superfluo il dimostrare (Teorema IV) che una relazione che possiede una delle dette proprietà apparentemente distinte, possiede anche le altre due: altri teoremi inoltre vengono per tale considerazione ad essere suscettibili di semplificazione sì nell'enunciato che nella dimostrazione.

2° Alle proprietà del tipo *conversivo* cioè:

1) $a \supset b \,.\supset.\, b \supset a$ (p. conversiva),

b) $a \supset b \,.\supset:\, b \bar{\supset} a$ (p. anti-conversiva),

ne andrebbe aggiunta una terza, cioè la seguente:

3) $a \bar{\supset} b \,.\supset.\, b \supset a$

ed è facile constatare che *non sono possibili altre proprietà dello stesso tipo:* infatti l'unica altra possibile che sarebbe:

4) $a \bar{\supset} b \,.\supset.\, b \bar{\supset} a$,

per un noto teorema di logica equivale alla 1).

(Un esempio di relazione godente della proprietà 3) si ha nella relazione S considerata nella mia nota ultimamente pubblicata nella *Rivista*).

3° Parimente la categoria di proprietà alle quali il prof. De Amicis dà il nome molto appropriato di *mediative* andrebbe completata colle due seguenti:

a) $a \supset b \,.\, b \supset c : \supset : c \supset a$ (p. reversiva),

b) $a \supset b \,.\, b \supset c : \supset : c \bar{\supset} a$ (p. anti-reversiva).

Aggiungendo alle 4 proprietà che l'A. designa col nome di *transitiva, comparativa, adequativa, anti-transitiva* le due suddette, e completando la categoria di proprietà così ottenuta colle proprietà della

relazione contraria $\bar{\supset}$ corrispondenti alle dette sei proprietà della relazione diretta è facile dimostrare o meglio verificare *che si sono esaurite tutte le possibili combinazioni che danno luogo a proprietà distinte del tipo « mediativo »* comprendendo sotto questa denominazione tutte quelle proprietà in virtù delle quali il sussistere o no d'una relazione tra due enti a, b del sistema, viene ad essere dedotto dal sussistere o no della relazione stessa tra un terzo ente c (medio) del sistema e ciascuno dei due enti a, b.

Concludendo si avrebbero, invece delle 10 considerate nell'articolo, 17 proprietà, delle quali *due* del tipo riflessivo, *tre* del tipo conversivo e *dodici* del tipo transitivo.

Il modo più semplice di raggrupparle e distinguerle senza incorrere nell'inconveniente di introdurre troppo gran numero di designazioni nuove mi sembrerebbe il seguente:

Propr. riflessiva:	$a \supset a$	Id. della relazione contraria	$a \bar{\supset} a$
— conversiva:	$a \supset b . \supset . b \supset a$	(La proprietà corrispondente della relazione contraria, come già si notò, non costituisce una proprietà distinta).	
— anti-conversiva:	$a \supset b . \supset . b \bar{\supset} a$	Id. della contraria	$a \bar{\supset} b . \supset . b \supset a$
— transitiva:	$a \supset b . b \supset c : \supset : a \supset c$	—	$a \bar{\supset} b . b \bar{\supset} c . \supset . a \bar{\supset} c$
— comparativa:	$a \supset b . a \supset c : \supset : b \supset c$	—	$a \bar{\supset} b . a \bar{\supset} c : \supset : b \bar{\supset} c$
— adequativa:	$a \supset c . b \supset c : \supset : a \supset b$	—	$a \bar{\supset} c . b \bar{\supset} c : \supset : a \bar{\supset} b$
— reversiva:	$a \supset b . b \supset c : \supset : c \supset a$	—	$a \bar{\supset} b . b \bar{\supset} c : \supset : c \bar{\supset} a$
— anti-transitiva:	$a \supset b . b \supset c : \supset : a \bar{\supset} c$	—	$a \bar{\supset} b . b \bar{\supset} c : \supset : a \supset c$
— anti-reversiva:	$a \supset b . b \supset c : \supset : c \bar{\supset} a$	—	$a \bar{\supset} b . b \bar{\supset} c : \supset : c \supset a$

Passando ora allo studio dei rapporti di dipendenza o d'incompatibilità tra tali proprietà (col metodo già seguito dal prof. De Amicis per ciò che riguarda il numero più limitato di proprietà da lui considerate) è certo che non mancherebbero di presentarsi altri interessanti teoremi.

Volendo poi estendere il campo delle ricerche introducendo la considerazione di altri *tipi* di proprietà oltre i già accennati, il primo a presentarsi come opportuno oggetto di studio mi sembrerebbe quello delle proprietà riferentisi all'*univocità o meno* delle relazioni (o più propriamente delle *corrispondenze* che le definiscono). Una di esse sarebbe per es. la seguente:

Se b, c sono enti distinti del sistema: $a \supset b \,.\supset.\, a \bar{\supset} c$.

Si potrebbero poi considerare quelle proprietà che si ottengono invertendo l'ordine delle deduzioni, nell'enunciazione delle proprietà mediative, come sarebbe la seguente:

$$a \supset b . \supset . a \supset c : \supset : b \supset c$$

che si ottiene, invertendo l'ordine della deduzione, da

$$b \supset c : \supset : a \supset b . \supset . a \supset c$$

la quale non è altro che la proprietà *transitiva:* $b \supset c . a \supset b : \supset : a \supset c$.

Un esempio di relazione godente della proprietà ora accennata si ha nella $\supset$ del calcolo logico, tanto per l'interpretazione di *deducibilità*, che per quella di *inclusione*.

Le proprietà del tipo della precedente hanno speciale affinità con quelle del tipo riflessivo.

Finisco con un'osservazione sulle proprietà della relazione $=$, le quali, come ha mostrato benissimo il prof. De Amicis, si possono tutte dedurre da una sola che è la proprietà *adequativa*. È da avvertire però che questo è vero solo nel caso che si ammetta il postulato enunciato nel primo capoverso del suo articolo, in virtù del quale dato un ente qualunque a del sistema è sempre possibile trovare un ente b (che può anche essere ancora lo stesso a) tale che si abbia $a = b$.

Se si volesse prescindere da questo postulato cesserebbe la possibilità di dedurre le proprietà caratteristiche dell'uguaglianza dalla sola proprietà *adequativa*, cioè dalla seguente:

$$a = b . c = b : \supset : a = c \tag{1}$$

e sarebbe necessario assumere come fondamentale anche un'altra proprietà, e precisamente la riflessività, cioè:

$$a = a . \tag{2}$$

Se invece di quest'ultima si volesse insieme alla (1) assumere l'altra:

$$a = b . \supset . b = a , \tag{3}$$

è facile vedere che non si potrebbe dimostrare la (2) senza far uso del postulato suesposto.

Ammesse invece le proprietà (1) e (2), la (3) si dimostra immediatamente senza bisogno di alcun'altra supposizione nel modo già indicato dal prof. De Amicis, cioè:

Se si ha $a = b$, avendosi d'altra parte per la (2) $b = b$, potremo scrivere per la (1)

$$b = b . a = b : \supset : b = a .$$

. . . .

Sopra una questione elementare della teoria degli aggregati

di G. CANTOR (Halle a. S.).

(Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung, I, 1892, p. 75-78).

Traduzione di G. VIVANTI.

Nella memoria intitolata: *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen* (Jour. für Math., t. 77, p. 258) si trova forse per la prima volta una dimostrazione del teorema, che vi sono infiniti aggregati, i quali non possono riferirsi biunivocamente all'insieme di tutti i numeri interi finiti 1, 2, 3, ..., ossia, come io uso esprimermi, i quali non hanno la potenza della serie dei numeri 1, 2, 3, ..., n, ... Infatti, da ciò che ho dimostrato nel § 2, segue senz'altro, che per es. l'insieme di tutti i numeri reali d'un intervallo qualunque $(\alpha \ldots \beta)$ non può rappresentarsi in forma di serie $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$

Può darsi però di quel teorema una dimostrazione assai più semplice, indipendente dalla considerazione dei numeri irrazionali.

Sieno infatti m e w due caratteri escludentisi a vicenda, e consideriamo un insieme M di elementi $E = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, che dipendono da infinite coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, ciascuna delle quali è o m o w. M sia l'insieme di tutti gli elementi E.

Agli elementi di M appartengono per es. i 3 seguenti:

$$E' = (m, m, m, m, \ldots), \quad E'' = (w, w, w, w, \ldots), \quad E''' = (m, w, m, w, \ldots).$$

Dico che l'insieme M non ha la potenza della serie 1, 2, ..., n, ...

Ciò risulta dal teorema seguente:

« Se $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ è una serie semplicemente infinita qualsiasi d'elementi dell'insieme M, v'è sempre un elemento E_0 di M che non coincide con alcuno degli E_n ».

Sia:

$$E_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, \ldots), \quad E_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots), \ldots,$$
$$E_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}, \ldots), \ldots$$

Qui le a_{mn} sono in modo determinato m o w. Definiamo ora una serie $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ tale, che b_n sia o m o w e sia diverso da a_{nn}. Se quindi $a_{nn} = m$, $b_n = w$, e se $a_{nn} = w$, $b_n = m$.

Consideriamo poi l'elemento $E_0 = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$ di M; allora è evidente che l'eguaglianza $E_0 = E_m$ non può essere soddisfatta per alcun valore intero e positivo di m, giacchè altrimenti per un tal valore e per tutti i valori interi di n si avrebbe $b_n = a_{mn}$, e quindi in particolare $b_m = a_{mm}$, il che è escluso dalla definizione di b_n. Da questo teorema segue immediatamente che l'insieme di tutti gli elementi di M non può porsi sotto forma di serie $E_1, E_2, ..., E_n, ...$, giacchè altrimenti ci troveremmo di fronte alla contraddizione, che E_0 apparterrebbe e non apparterrebbe ad M.

Questa dimostrazione sembra notevole, non solo per la sua grande semplicità, ma anche perchè il principio in essa seguito può senz'altro estendersi al teorema generale, che le potenze degli aggregati ben definiti non hanno alcun massimo, o, ciò che è lo stesso, che per qualunque dato aggregato L si può determinarne un altro M di potenza superiore.

Sia per es. L il continuo lineare, l'insieme di tutte le quantità numeriche reali $z \geqq 0$ e $\leqq 1$; e designiamo con M l'insieme di tutte le funzioni uniformi $f(x)$ che prendono i due soli valori 0 ed 1 quando x passa per tutti i valori reali $\geqq 0$ e $\leqq 1$.

Che M ha potenza non minore di L, segue da ciò, che possono assegnarsi aggregati parziali di M aventi la stessa potenza di L, per es. quello formato di tutte le funzioni di x che prendono per un unico valore x_0 di x il valore 1 e per tutti gli altri il valore 0.

Ma M non ha neppure potenza eguale ad L, giacchè altrimenti l'aggregato M potrebbe riferirsi biunivocamente alla variabile z, e quindi concepirsi sotto forma di una funzione uniforme delle due variabili x e z, $\varphi(x, z)$, per modo che per ciascuna specializzazione di z si otterrebbe un elemento $f(x) = \varphi(x, z)$ di M e reciprocamente qualunque elemento $f(x)$ di M risulterebbe da $\varphi(x, z)$ mediante una determinata specializzazione di z. Questo però conduce ad una contraddizione. Giacchè, se si designa con $g(x)$ quella funzione uniforme di x che prende solo i valori 0 ed 1 e per ogni valore di x è diversa da $\varphi(x, x)$, $g(x)$ è un elemento di M, e d'altra parte non può risultare da $\varphi(x, z)$ mediante alcuna specializzazione $z = z_0$, poichè $\varphi(z_0, z_0)$ è diversa da $g(z_0)$.

Se adunque la potenza di M non è nè inferiore nè eguale a quella di L, ne segue che è superiore ad essa (cfr. *Journ. für Math.*, t. 84, p. 242).

Io ho già nelle *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* (Leipzig, 1883; *Math. Annalen*, t. 21) dimostrato in modo del tutto diverso, che le potenze non hanno alcun massimo; ivi si è anche dimostrato, che l'insieme di tutte le potenze, imaginate disposte in ordine di grandezza, costituisce una serie ben ordinata, sicchè per ciascuna potenza ve n'ha nella natura una immediatamente superiore, e di più per ciascuna serie infinita di potenze ve n'ha una immediatamente superiore.

Le potenze rappresentano l'unica e necessaria generalizzazione dei numeri cardinali finiti, esse non sono altro che i numeri cardinali attualmente infiniti ed hanno la stessa realtà e determinatezza di quelli finiti; soltanto i rapporti che passano tra essi, la *teoria dei numeri* ad essi relativa, è in parte diversa che nel campo finito.

La ulteriore esplorazione di questo campo è còmpito dell'avvenire.

Sull'uso della rappresentazione geometrica nella teoria aritmetica dei numeri complessi.

Nota di G. Vivanti.

1. Nell'occasione d'un corso sulla teoria generale dei numeri algebrici tenuto nell'Università di Bologna, ebbi ad osservare che la teoria dei numeri interi complessi prende una forma assai chiara ed intuitiva mediante l'uso costante della rappresentazione geometrica. Espongo qui quella parte delle mie lezioni che si riferisce all'accennato argomento, nella lusinga che essa possa riuscire di qualche interesse ai lettori della *Rivista* dal punto di vista didattico.

Ometterò per brevità tutto quanto riflette l'estensione ai numeri complessi delle operazioni elementari, estensione la quale deve farsi conformemente al *principio della permanenza delle leggi formali* di Hankel.

2. Dicesi *numero intero complesso* ogni espressione della forma $\alpha = a + bi$, dove a e b sono numeri interi positivi, nulli o negativi.

I due numeri $\alpha = a + bi$, $\alpha' = a - bi$ si dicono *coniugati*, e il loro prodotto $a^2 + b^2$ si chiama *norma* dell'uno o dell'altro di essi, e si designa con $N(\alpha)$, $N(\alpha')$. La radice quadrata della norma, presa con segno positivo, è il valore assoluto, e si indica con $|\alpha|$.

La norma del prodotto di più numeri è eguale al prodotto delle loro norme.

3. Dirò *sistema* T l'insieme di tutti i numeri interi complessi; esso comprende anche tutti i numeri interi positivi e negativi.

La somma, la differenza e il prodotto di due numeri del sistema T appartengono allo stesso sistema.

Se quindi si dice che un numero intero complesso α è *divisibile* per un altro β quando ve n'ha un terzo γ tale che $\alpha = \beta\gamma$, sussistono anche pei numeri interi complessi [1] le due leggi fondamentali della divisibilità, e cioè:

---

[1] Esse hanno luogo per qualunque sistema avente la proprietà che la somma, la differenza ed il prodotto di due suoi elementi appartengono al sistema medesimo.

a) Se α è divisibile per β e β per γ, α è divisibile per γ;

b) Se α e β sono divisibili per γ, lo sono pure $\alpha+\beta$ e $\alpha-\beta$.

Se α è divisibile per β, $N(\alpha)$ è divisibile per $N(\beta)$; infatti, posto $\alpha=\beta\gamma$, si ha (n. 2) $N(\alpha)=N(\beta)N(\gamma)$.

Segue da ciò, che se ε è un numero del sistema T il quale sia divisore di 1, $N(\varepsilon)$ deve dividere $N(1)$ ossia 1, e quindi dev'essere $N(\varepsilon)=1$. Adunque i soli divisori di 1 nel sistema T sono 1, i, -1, $-i$; essi diconsi *unità*.

Due numeri il cui rapporto è un'unità diconsi *associati*. I numeri del sistema T, fatta eccezione per lo zero, sono associati 4 a 4; e precisamente lo sono tra loro i numeri $a+bi$, $-b+ai$, $-a-bi$, $b-ai$.

Se un numero è divisibile per un altro, lo è pure per tutti i numeri associati a quest'ultimo.

Fra quattro numeri associati ve n'ha sempre uno tale che la sua parte reale sia positiva e il coefficiente di i sia positivo o nullo.

4. Ai numeri del sistema T può estendersi il concetto di *congruenza*, e valgono anche per essi i teoremi noti sulle congruenze ordinarie. Senza arrestarmi su questo argomento, osserverò soltanto che, se due numeri sono congruenti rispetto ad un modulo, lo sono pure rispetto a qualunque modulo associato a questo. Ne segue (v. n. 3 in fine), che come modulo d'una congruenza può sempre prendersi, o un numero reale positivo, o un numero complesso in cui tanto la parte reale che il coefficiente di i sieno positivi.

5. È noto in qual modo si rappresentano geometricamente nel piano i numeri complessi. In tale rappresentazione i numeri del sistema T hanno per imagine i vertici (*nodi*) d'un *reticolo* (*reticolo di base* 1 o *reticolo* (1)), avente un nodo nell'origine, e formato di quadrati i cui lati hanno lunghezza 1 e sono paralleli rispettivamente agli assi.

La somma di due numeri complessi α, β è data geometricamente dal quarto vertice del parallelogrammo racchiuso dai raggi vettori dei punti rappresentanti i numeri α, β.

Quanto al prodotto, io ne darò un'interpretazione geometrica alquanto diversa da quella comunemente adottata (1). Consideriamo dapprima due casi particolari:

a) Moltiplicazione per un'unità. — Le imagini di quattro numeri associati si trovano ai vertici d'un quadrato avente il centro nell'origine; quindi il passaggio successivo da un numero α ai suoi 3 associati αi, $-\alpha$, $-\alpha i$ è raffigurato dalla rotazione del raggio vettore nel senso positivo di 90°, 180°, 270° senza mutamento della sua lunghezza.

b) Moltiplicazione per un numero reale e positivo c. — Si effettua variando la lunghezza del raggio vettore nel rapporto $c:1$ senza alterarne la direzione.

Dopo ciò debbasi moltiplicare $\alpha=a+bi$ per $\gamma=c+di$, e si indichi il prodotto con η; sarà:

$$\eta=\alpha\gamma=\alpha(c+di)=\alpha c+\alpha id\,.$$

Il prodotto parziale αc si ottiene prendendo sulla direzione del raggio vettore di α, e nello stesso verso o in verso opposto secondochè $c \gtrless 0$, la lunghezza $|\,\alpha c\,|$; il prodotto parziale αid si ottiene prendendo nella direzione del raggio vettore di αi, e nello stesso verso o in verso opposto secondochè $d \gtrless 0$, la lunghezza $|\,\alpha d\,|$. La somma $\alpha c+\alpha id$ infine si ha come il quarto vertice di un rettangolo avente un vertice nell'origine, e i cui lati hanno direzione rispettivamente parallela e perpendicolare al raggio vettore di α e lunghezze $|\,\alpha c\,|$ ed $|\,\alpha d\,|$. Questo rettangolo si compone di $|\,cd\,|$ quadrati tutti congruenti al quadrato avente per lato il raggio vettore di α. Dando a c, d successivamente tutti i valori interi positivi e negativi (non escluso lo zero), si ottengono tutti i *multipli* di α; le loro imagini costituiscono i nodi d'un reticolo (*reticolo di base* α o *reticolo* (α)) avente un nodo nell'origine e i cui lati hanno la lunghezza $|\,\alpha\,|$ e sono rispettivamente paralleli e perpendicolari al raggio vettore di α. Naturalmente i nodi del reticolo (α) sono tutti nodi del reticolo (1), giacchè tutti i multipli di α sono, come α stesso, numeri interi complessi.

6. Per ciò che si disse nel n. 3, una ed una sola delle imagini di 4 numeri associati cade sul semiasse delle quantità reali positive o nell'interno del primo quadrante. E poichè tutti i numeri tra loro associati dànno origine ad un medesimo reticolo, come base di questo potrà sempre prendersi un numero che soddisfaccia alle condizioni poc'anzi accennate. Se α è la base così scelta, diremo *primo quadrato* del reticolo (α) il quadrato racchiuso dai raggi vettori di α e di αi.

Se si imagina sovrapposto al reticolo (α) un reticolo mobile ad esso identico, e s'imprime a quest'ultimo un moto di traslazione per modo che l'origine di esso venga a coincidere con un nodo del reticolo fisso, i due reticoli coincideranno ancora in tutta la loro estensione, e i nodi del reticolo (1) contenuti nel primo quadrato del reticolo mobile coincideranno con altrettanti nodi del reticolo (1) contenuti in un certo quadrato del reticolo fisso. Due nodi del reticolo (1) del piano fisso, che possono venir portati a coincidenza con un medesimo nodo del

(1) È quasi inutile aggiungere che questa interpretazione sussiste anche per la moltiplicazione di numeri complessi non interi.

reticolo (1) del piano mobile mediante traslazione del reticolo mobile (α) che lo portino a coincidenza col reticolo fisso (α), si dicono *omologhi*. È chiaro che in ciascun quadrato esiste uno ed un sol nodo del reticolo (1) omologo ad uno di tali nodi posto *nell'interno* del primo quadrato. Affinchè ciò si verifichi anche pei nodi posti sul contorno, occorre fare una convenzione; e cioè stabilire p. es. di considerare come appartenenti al primo quadrato i nodi giacenti sui raggi vettori di α e di αi, esclusi i punti rappresentanti questi numeri. Dopo ciò, se $f(1, \alpha)$ è il numero dei nodi del reticolo (1) appartenenti al primo quadrato del reticolo (α), può dirsi che gl'infiniti nodi del reticolo (1) si dividono, rispetto al modulo α, in $f(1, \alpha)$ *classi*, per modo che tutti i nodi d'una stessa classe sono tra loro omologhi.

7. Colla convenzione fatta, a ciascun quadrato appartiene *uno solo* de' suoi vertici, epperò esso potrà senza ambiguità individuarsi mediante il vertice che gli appartiene. Così il primo quadrato potrà designarsi come *il quadrato di vertice* O.

Sia ora P un nodo del reticolo (1) contenuto nel quadrato di vertice M (fig. 1), e sia P_0 il suo omologo nel primo quadrato. Poichè M

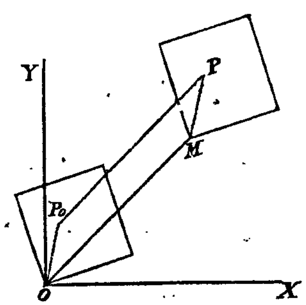


Fig. 1.

è l'imagine d'un multiplo $\alpha\mu$ di α, e le OP_0, MP sono eguali e parallele, indicando con π, π_0 i numeri rappresentati da P, P_0, sarà:

$$\pi = \pi_0 + \alpha\mu \quad \text{ossia} \quad \pi \equiv \pi_0 \ (\text{mod. } \alpha).$$

Adunque i punti omologhi rappresentano numeri tra loro congruenti rispetto al modulo α; e la nostra divisione in classi coincide con quella che si considera nella teoria dei numeri.

8. Qualunque nodo del reticolo (1) ammette uno ed un solo suo omologo nel primo quadrato; quest'ultimo rappresenta il *resto minimo* del numero di cui quel nodo è l'imagine.

Dicesi *quadrato centrale* il quadrato PQRS (fig. 2) eguale ed egualmente posto a quelli del reticolo (α), ed avente il centro nell'origine;

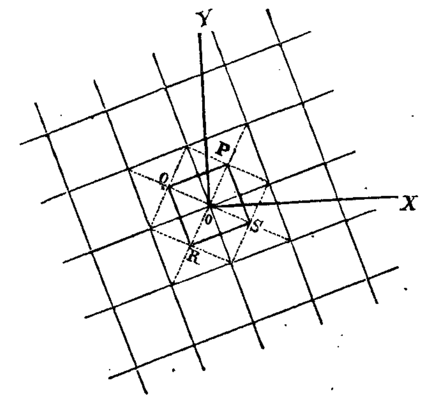


Fig. 2.

esso non fa parte del reticolo (α). Qualunque nodo del reticolo (1) ha uno ed un solo suo omologo appartenente al quadrato centrale, purchè pei nodi posti sul contorno di questo si faccia una convenzione analoga a quella stabilita nel n. 6; esso rappresenta il *resto assolutamente minimo* del numero di cui quel nodo è imagine. I resti assolutamente minimi hanno la proprietà che la loro norma non supera mai $\frac{1}{2}N(\alpha)$, e quindi è sempre minore di $N(\alpha)$ (1).

---

(1) Da questo fatto si deduce senza alcuna difficoltà la possibilità di determinare mediante un numero finito d'operazioni il massimo comun divisore di due numeri interi complessi, e quindi tutti i teoremi che ne derivano, fra cui quello che ogni numero del sistema T può scomporsi in fattori primi in un sol modo.

È qui forse il luogo di accennare i principali teoremi relativi ai numeri primi del sistema T. Di alcuni di questi Dirichlet ha dato dimostrazioni semplicissime nelle sue *Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes* (Crelle's J. XXIV).

Se un numero è primo, lo sono pure i suoi associati e il suo coniugato.

Se α è un numero primo complesso, $N(\alpha)$ è un numero primo ordinario, e reciprocamente.

I numeri primi del sistema T sono:

9. Se m è una quantità positiva qualsiasi, v'ha soltanto un numero *finito* di numeri interi complessi il cui valore assoluto sia minore di m. Ne segue che in un insieme finito od infinito di numeri interi complessi ve n'ha sempre uno (od anche più) il cui valore assoluto è minimo.

10. L'insieme dei numeri interi complessi rappresentati dai nodi d'un reticolo qualunque ha queste due proprietà:

a) La somma e la differenza di due numeri qualunque dell'insieme appartengono ad esso;

b) Ogni multiplo d'un numero qualunque dell'insieme è un numero dell'insieme.

Vogliamo ora stabilire reciprocamente, che qualunque insieme I di numeri interi complessi dotato delle proprietà *a*) e *b*) ha per imagine l'insieme di tutti i nodi di un reticolo (¹).

Sia γ il numero (od uno dei numeri) dell'insieme I il cui valore assoluto è minimo, e costruiamo il reticolo (γ). Se un numero λ dell'insieme I avesse per imagine un punto diverso dai nodi di (γ), questo avrebbe nel quadrato centrale un suo omologo diverso da 0; e il numero λ_0 di cui questo è imagine, avendo la forma $\lambda - \mu\gamma$ (dove μ è un numero del sistema T), dovrebbe, per le proprietà *a*), *b*), appartenere ad I. Ma $N(\lambda_0) < N(\gamma)$, e quindi $|\lambda_0| < |\gamma|$, contro l'ipotesi che $|\gamma|$ sia minimo; dunque tutti i punti dell'insieme I sono nodi del reticolo (γ). D'altra parte tutti i nodi di questo reticolo sono punti dell'insieme I, perchè rappresentano multipli di γ; quindi I e (γ) sono identici.

11. Se α è divisibile per γ, tutti i nodi di (α) sono nodi di (γ); può dirsi allora che il reticolo (α) è *contenuto* nel reticolo (γ). Qualunque reticolo è contenuto nel reticolo (1).

Il problema fondamentale che dobbiamo ora risolvere è questo:

Se il reticolo (α) è contenuto nel reticolo (γ), determinare il numero dei nodi del secondo che appartengono a ciascun quadrato del primo.

Siano A, C le imagini di α, γ, e poniamo $\alpha = \mu\gamma$.

Se μ è reale, O, C ed A sono in linea retta (fig. 3), ed è evidente che il quadrato costruito su OA contiene $|\mu|^2$ ossia $N(\mu)$ nodi del reticolo (γ).

---

a) I numeri $\pm 1 \pm i$;

b) I numeri $x + y$, dove $x^2 + y^2$ è un numero primo ordinario;

c) I numeri primi ordinari della forma $4n + 3$ e i loro associati.

(¹) Secondo il linguaggio di Dedekind, ciò significa che ogni *ideale* del sistema T è un *ideale principale*, ossia che questo sistema non dà luogo alla considerazione di *numeri ideali*.

Se μ è puramente imaginario, si può ridurre al caso precedente considerando invece di γ il suo associato γi e rammentando che i reticoli (γ) e (γi) sono identici.

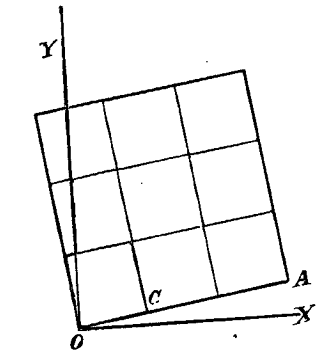


Fig. 3.

Sia ora μ complesso, e pongasi $\mu = m + ni$. Prendendo, ove ciò occorra, invece di γ un suo associato, si può sempre fare in modo che m ed n sieno positivi. Allora (fig. 4) l'angolo COA è compreso

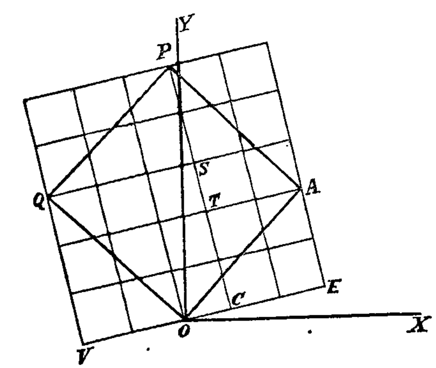


Fig. 4.

fra 0° e 90°, e se da A si abbassa la perpendicolare AE sopra OC si ha: $OE = m|\gamma|$, $AE = n|\gamma|$.

Costruiamo il quadrato OAPQ, e descriviamo le altre linee segnate nélla figura. I nodi del reticolo (γ) appartenenti al quadrato OAPQ (tenuto conto della convenzione di cui nel n. 6) si compongono:

a) Dei nodi contenuti nel triangolo PQS, esclusi i lati PQ, PS;

b) Di quelli contenuti nel triangolo PTA, escluso il lato AP;

c) Di quelli contenuti nel poligono QSTAO, esclusi i lati QS, ST, TA.

Mediante opportune traslazioni del reticolo (γ) può farsi coincidere dapprima PQS con AOE, indi PTA con QVO. Ne segue che invece dei nodi *a*), *b*) possono prendersi rispettivamente:

a') I nodi contenuti nel triangolo AOE, esclusi i lati AO, AE;

b') Quelli contenuti nel triangolo QVO, escluso il lato OQ.

L'insieme dei nodi *a'*), *b'*), *c*) equivale all'insieme dei nodi contenuti:

d) Nel quadrato CSQV, esclusi i lati QS, SC;

e) Nel quadrato EATC, esclusi i lati TA, AE.

Ma questi nodi sono rispettivamente, per ciò che si disse poc'anzi, in numero di m^2 e di n^2; quindi il numero dei nodi del reticolo (γ) contenuti nel quadrato OAPQ è m^2+n^2 ossia $N\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ od ancora $\frac{N(\alpha)}{N(\gamma)}$ [1].

In particolare si ha per $\gamma=1$: $f(1,\alpha)=N(\alpha)$. Cioè: i numeri del sistema T si dividono, rispetto al modulo α, in $N(\alpha)$ classi.

12. La determinazione della nota funzione aritmetica $\varphi(\alpha)$ diviene assai facile mediante le considerazioni precedenti.

Supponiamo per semplicità che α contenga due soli fattori primi ρ e σ. Ciascun quadrato del reticolo (α) contiene $\frac{N(\alpha)}{N(\rho)}$ nodi del reticolo (ρ) e quindi $N(\alpha)-\frac{N(\alpha)}{N(\rho)}$ nodi del reticolo (1) che non sono nodi del reticolo (ρ) e che rappresentano quindi numeri primi con ρ. Del pari esso contiene $\frac{N(\alpha)}{N(\sigma)}$ nodi del reticolo (σ), ma di questi ne furono già esclusi $\frac{N(\alpha)}{N(\rho\sigma)}$ ossia $\frac{N(\alpha)}{N(\rho)N(\sigma)}$ come appartenenti al reticolo (ρ), quindi restano da escludersi soltanto $\frac{N(\alpha)}{N(\sigma)}-\frac{N(\alpha)}{N(\rho)N(\sigma)}$ nodi, sicchè ne rimangono

[1] Dalla fig. 4 risulta una dimostrazione semplissima, e che credo nuova, del teorema di Pitagora. Infatti sommando le eguaglianze PQS = AOE, PTA = QVO, ed aggiungendo da ambe le parti QSTAO, si ottiene:

$$\mathrm{OAPQ} = \mathrm{CSQV} + \mathrm{EATC},$$

ossia

$$\mathrm{OA}^2 = \mathrm{QS}^2 + \mathrm{AT}^2 = \mathrm{OE}^2 + \mathrm{OV}^2 = \mathrm{OE}^2 + \mathrm{AE}^2.$$

$N(\alpha)-\frac{N(\alpha)}{N(\rho)}-\left(\frac{N(\alpha)}{N(\sigma)}-\frac{N(\alpha)}{N(\rho)N(\sigma)}\right)$ ossia $N(\alpha)\left(1-\frac{1}{N(\rho)}\right)\left(1-\frac{1}{N(\sigma)}\right)$ come imagini di numeri primi con ρ e con σ. Si ha adunque:

$$\varphi(\alpha)=N(\alpha)\left(1-\frac{1}{N(\rho)}\right)\left(1-\frac{1}{N(\sigma)}\right).$$

13. La dimostrazione del teorema di Fermat generalizzato:

$$\rho^{\varphi(\alpha)}\equiv 1 (\mathrm{mod}\ \alpha),$$

dove ρ è un numero qualunque primo con α, si fa esattamente come pei numeri ordinari.

14. Anche il teorema di Wilson può stabilirsi senza alcune difficoltà. Questo teorema si enuncia dicendo, che il prodotto di tutti i resti minimi rispetto ad un modulo primo α, eccettuato lo zero, aumentato di 1, è divisibile per α.

Posto $\alpha=a+bi$, noi possiamo (come si è osservato più volte) prendere a in modo che sia $a>0$, $b\geq 0$; inoltre possiamo supporre α diverso da $1+i$, giacchè per questo modulo il teorema si verifica immediatamente non essendovi oltre lo zero altro resto minimo che i. Siccome il numero 2 nel sistema T non è primo, così sarà certamente $a+b>2$.

Se λ è un resto minimo qualunque di α, v'ha uno ed un solo resto minimo μ che soddisfa alla congruenza:

$$\lambda\mu\equiv 1 (\mathrm{mod}\ \alpha);$$

esso è (v. n. 13) il resto minimo di $\lambda^{\varphi(\alpha)-1}$ ossia di $\lambda^{N(\alpha)-2}$.

Vediamo ora se può essere $\lambda=\mu$. Indicando con θ il loro valore comune, si avrebbe allora:

$$\theta^2\equiv 1\ (\mathrm{mod.}\ \alpha),\quad \text{ossia}\quad (\theta+1)(\theta-1)\equiv 0\ (\mathrm{mod.}\ \alpha),$$

sicchè o $\theta+1$ o $\theta-1$ dovrebbe essere divisibile per α. Le imagini dei numeri θ dovrebbero quindi essere nodi del reticolo (1) appartenenti al primo quadrato OAPQ (fig. 5) del reticolo (α) e distanti dai nodi di quest'ultimo della lunghezza 1 in senso parallelo all'asse delle quantità reali. È chiaro che di tali punti ve n'ha due soli, cioè T_1 e T_2; essi sono distinti, perchè se coincidessero sarebbe $a+b=2$. Designando con θ_1, θ_2 i numeri corrispondenti ai punti T_1, T_2 si ha:

$$\theta_1+1\equiv 0,\qquad \theta_2-1\equiv 0\ (\mathrm{mod.}\ \alpha).$$

Tutti gli altri resti minimi, eccetto lo zero, si dividono in $\frac{N(\alpha)-3}{2} = c$ coppie $\lambda_1, \mu_1; \lambda_2, \mu_2; \ldots; \lambda_c, \mu_c$ tali che:

$$\lambda_r \mu_r \equiv 1 \pmod{\alpha}. \qquad (r = 1, 2, \ldots, c).$$

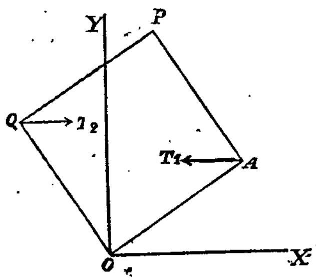


Fig. 5.

Ne segue:

$$\lambda_1 \mu_1 \lambda_2 \mu_2 \ldots \lambda_c \mu_c \theta_1 \theta_2 \equiv -1 \pmod{\alpha},$$

relazione che esprime il teorema di Wilson.

Mantova, 23 ottobre 1892.

CORRISPONDENZA

Egregio Signore,

Per calcolare l'area compresa tra un dato perimetro ed una retta fondamentale si sono misurate, a distanza di 30 metri una dall'altra, successivamente le ordinate y_1, y_2, y_3, ecc. fino alla y_{21}; e di tali ordinate si sono ottenuti i valori

$$y_1 = y_3 = y_5 = \text{ecc.} \ldots = y_{19} = y_{21} = 20 \text{ m.}$$
$$y_2 = y_4 = y_6 = \text{ecc.} \ldots = y_{18} = y_{20} = 14 \text{ m.}$$

Si prega il lettore di calcolare col metodo di Simpson, insegnato nelle scuole ed esposto in tutti i manuali:

1° L'area della figura chiusa tra le ordinate estreme y_1 ed y_{21},

2° L'area della figura chiusa tra le ordinate y_2 ed y_{20}.

Se comparando i due risultati la S. V. troverà una conseguenza evidentemente assurda che la metta in sospetto circa la bontà del metodo adoperato, voglia la S. V. compiacersi di manifestarmi il suo giudizio in argomento, che gliene sarò gratissimo.

Milano, Ottobre 1892. *Devotissimo*

Ing. CROTTI FRANCESCO.

I teoremi funzionali nel calcolo logico.

La questione di sapere se nel calcolo logico esistano o no funzioni legate da speciali teoremi (per es. additivi, moltiplicativi ... o ancor più complicati), si riduce al vedere se vi sono delle funzioni f, che soddisfanno ad un'equazione

$$(1)\ldots \qquad G\{f[\psi(a, b)], f(a), f(b)\} = 0 \ (^1),$$

ove G è la relazione che lega la $f[\psi(a, b)]$ con le $f(a)$ e $f(b)$, ψ esprime la natura del teorema funzionale, a e b sono quantità logiche qualsivoglia.

Risolvendo l'equazione (1) per $f[\psi(a, b)]$ avremo:

$$(2)\ldots \qquad f[\psi(a, b)] = \varphi[f(a), f(b)]$$

dove, com'è noto, φ contenendo, oltre le variabili, alcune quantità indeterminate, può assumere infiniti valori. Pertanto vi sarà, in generale, un numero infinito di soluzioni e, quindi, di funzioni f, che godono una comunque data proprietà funzionale ψ. Importa determinarle.

All'uopo si sviluppi il membro a sinistra, della (2), per $\psi(a, b)$ e quello a destra per $f(a)$ e $f(b)$:

$$f(1)\psi(a, b) + f(0)\psi_1(a, b) = \varphi(1, 1)f(a)f(b) + \varphi(1, 0)f(a)f_1(b)$$
$$+ \varphi(0, 1)f_1(a)f(b) + \varphi(0, 0)f_1(a)f_1(b),$$

quindi, sviluppando le ψ, ψ_1, f, f_1, per a e b:

$$\begin{aligned} & f(1)[\psi(1, 1)ab + \psi(1, 0)ab_1 + \psi(0, 1)a_1b + \psi(0, 0)a_1b_1] \\ & + f(0)[\psi_1(1, 1)ab + \psi_1(1, 0)ab_1 + \psi_1(0, 1)a_1b + \psi_1(0, 0)a_1b_1] \\ & = \varphi(1, 1)[f(1)a + f(0)a_1][f(1)b + f(0)b_1] + \varphi(1, 0)[f(1)a \\ & + f(0)a_1][f_1(1)b + f_1(0)b_1] + \varphi(0, 1)[f_1(1)a + f_1(0)a_1][f(1)b \\ & + f(0)b_1] + \varphi(0, 0)[f_1(1)a + f_1(0)a_1][f_1(1)b + f_1(0)b_1] \end{aligned}$$

e sussistendo l'(1) per i valori speciali 0 ed 1 di a e b, si ottiene, coll'eguagliare i coefficienti dei costituenti ab, ab_1, a_1b, a_1b_1:

$$(3)\ldots \left\{ \begin{aligned} & f(1)\psi(1, 1) + f(0)\psi_1(1, 1) = f(1)\varphi(1, 1) + f_1(1)\varphi(0, 0) \\ & f(1)\psi(1, 0) + f(0)\psi_1(1, 0) = f(0)f(1)\varphi(1, 1) + f_1(0)f(1)\varphi(0,1) \\ & + f(0)f_1(1)\varphi(1, 0) + f_1(0)f_1(1)\varphi(0, 0) \\ & f(1)\psi(0, 1) + f(0)\psi_1(0, 1) = f(0)f(1)\varphi(1, 1) + f(0)f_1(1)\varphi(0, 1) \\ & + f_1(0)f(1)\varphi(1, 0) + f_1(0)f_1(1)\varphi(0, 0) \\ & f(1)\psi(0, 0) + f(0)\psi_1(0, 0) = f(0)\varphi(1, 1) + f_1(0)\varphi(0, 0). \end{aligned} \right.$$

---

(1) Uso la notazione dello SCHRÖDER.

Risolvendo questo sistema d'equazioni per $f(0)$ e $f(1)$, la funzione f è pienamente determinata.

Così — cito i casi più semplici — le funzioni

$$f(a) = a + m\,, \quad f(a) = a.m\,,$$

cioè la somma ed il prodotto logico, godono le proprietà funzionali

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \qquad [\text{come la } f(a) = am \text{ dell'algebra}]$$
$$f(a.b) = f(a).f(b) \qquad [\text{come la } f(a) = m^a].$$

Diffatti, essendo per la prima proprietà:

$$\psi(a, b) = a + b\,,$$
$$\varphi[f(a), f(b)] = f(a) + f(b)$$

e quindi

$$\psi(1, 1) = \psi(1, 0) = \psi(0, 1) = 1\,,$$
$$\psi(0, 0) = 0\,,$$
$$\varphi(1, 1) = \varphi(1, 0) = \varphi(0, 1) = 1\,,$$
$$\varphi(0, 0) = 0\,,$$

la seconda o la terza equazione del sistema (3) dànno la condizione

$$f(0) f_1(1) = 0\,,$$

che è manifestamente soddisfatta dai valori

$$f(0) = m\,, \quad f(1) = 1\,,$$

della somma e

$$f(0) = 0\,, \quad f(1) = m\,,$$

del prodotto logico.

Alla seconda proprietà corrisponde la medesima equazione condizionale.

In modo analogo si accerta che la negazione logica:

$$f(a) = a_1$$

possiede i due teoremi funzionali

$$f(a+b) = f(a).f(b) \qquad [\text{come la } f(a) = \log a]$$
$$f(a.b) = f(a) + f(b) \qquad [\text{come la } f(a) = a^m],$$

soddisfacendo alla condizione

$$f(1) f_1(0) = 0\,.$$

All'incontro non v'è alcuna funzione logica che goda la proprietà

$$f(a+b) = f(a) f_1(b) + f_1(a) f(b)$$
$$[\text{come, posto } f_1(a) = \cos a, \text{ la } f(a) = \text{sen } a],$$

perchè la prima e la quarta equazione in (3) dànno allora

$$f(1) = f(0) = 0\,,$$

cioè, per qualsiasi a,

$$f(a) = 0\,.$$

Velletri, Novembre 1892. ALBINO NAGY.

A proposito di un libro del prof. Gino Loria

SULLA

Scuola Napoletana di Matematica nella prima metà del secolo.

Osservazioni di ERNESTO PASCAL.

È uscito a Genova un libro (¹) del mio amico e collega Prof. Loria in cui si fa la storia di quella che egli chiama la *scuola napoletana di matematica* capitanata da Nicola Fergola.

Bisogna confessare che è un libro che, ad altri pregi, aggiunge quello invidiabile d'essere scritto con una forma spigliata ed elegante per modo che si legge con gran diletto e tutto d'un fiato come se fosse un piacevole libro di letteratura.

L'Autore impressionato da alcune parole di Chasles, e dalla poca conoscenza che fuori di Napoli si avea e si ha di questa scuola del Fergola, ha creduto di farne la storia per rivendicare (secondo lui) all'Italia una gloria dimenticata, e alcune priorità in certi risultati di geometria.

Certamente molti dei lettori di quel libro, massime stranieri, al leggerne, almeno il titolo, si saranno domandati: dunque esisteva una scuola napoletana? e noi non la conoscevamo? e quelli che, così all'ingrosso, avranno scorso il volume saranno rimasti nell'opinione che il Loria ha scritto la storia di una cosa ingiustamente dimenticata, e che mentre in altri centri d'Europa fiorivano le scuole di Lagrange, Gauss, Jacobi, Monge, Carnot, Möbius, Staudt, a Napoli ne fioriva un'altra a pari con quelle.

In altri termini molti dei lettori, dando alla parola *scuola* il suo naturale significato, avranno creduto che a Napoli nella prima metà

(¹) LORIA, *Nicola Fergola e la scuola di matematici che lo ebbe a duce.* (Estratto dagli Atti della R. Università di Genova), 1892.

del secolo, è fiorita propriamente una scuola che ha contribuito insieme alle altre di Europa al progresso degli studii matematici [1].

Ora è su questo appunto che io voglio discutere qui. Forse da qualcuno dei giudizii che dà il Loria, potrebbe sembrare che egli effettivamente qualche volta abbia intravista la verità; ma, come succede sempre a chi fa un lungo e faticoso lavoro, che si appassiona del soggetto, e cerca di adornarlo alla meglio, come padre che cerca di nascondere con soverchia indulgenza gli errori del figlio, egli ha finito col porci davanti un monumento, che, secondo il mio modo di vedere, non risponde alla realtà, e col dare a certe cose un'importanza assai maggiore e assai diversa da quella che loro bisogna dare.

Forse anche alla estrema mitezza dei giudizii del Loria avrà contribuito non poco il fatto che egli non ha mai vissuto a Napoli, e sui soli documenti che avea presenti, e sulle poche e incomplete memorie dei tempi ha dovuto ricostruire la storia di tanti anni, senza che mai l'eco dei giudizii su quei fatti gli fosse giunta all'orecchio per altra via che per quella dei libri, e questo avrà fatto sì che quando si sarà trovato di fronte a qualche intoppo che lo avrebbe potuto condurre più vicino alla verità, egli, nella grande delicatezza dell'animo suo, e nell'incertezza di dare un giudizio avventato e forse difforme dal vero, ha preferito indulgentemente passare oltre.

E finalmente ci avrà contribuito anche per non piccola parte, l'orgoglio, certamente nobilissimo, di poter presentare ai suoi contemporanei una cosa dimenticata, e non ha pensato che non sempre gli uomini che dimenticano hanno torto.

Per conto mio non posso nascondere che certamente il còmpito di oggi mi è penoso, e avrei preferito scrivere tutt'altre cose piuttosto che dare giudizii su fatti cui non fui nè attore, nè spettatore, e sopra uomini, indubbiamente egregi, che mi precedettero di tanto tempo sulla scena del mondo.

Ma cercherò di essere nei miei giudizî il più possibilmente obbiettivo; di dimenticarmi di tutto quello che ho sentito dire, per dire solo quello che risulta dall'esame dei fatti.

Quando si giudica un libro, il critico può proporsi diversi intenti. Può proporsi di dire quello che egli ne pensa sul genere del lavoro che esamina, se quell'indirizzo di studii gli va a genio o no, gli pare utile o meno; oppure può proporsi di entrare nel medesimo ordine di idee dell'autore, accompagnarsi passo passo con lui, giovarsi possibilmente di altri fatti e di altre notizie sfuggite a questi, e paragonare poi le conclusioni sue con quelle dell'autore.

(1) Vedi la prefazione nel volume del LORIA.

In quanto al genere del lavoro del Loria non mi son proposto qui di giudicarlo. Certamente non sarei lontano dal credere che certi cadaveri sarebbe meglio lasciarli in riposo nelle loro tombe onorate, e debbo confessare francamente che fra un autore che risolva uno dei tanti problemi che affaticano le menti dei geometri d'oggi, e un altro che occupi il suo tempo a ricercare per es. se l'inventore delle sezioni coniche fu Menecmo o Platone, e se Aristeo ha preceduto di poco o di assai l'Euclide, io non ci penso molto e preferisco il primo.

Ma questa è altra quistione.

La cosa di cui voglio occuparmi io qui è diversa. Io voglio bensì entrare nello stesso ordine di idee di quello del Loria. Quello che io dirò potrebbe risultare tutto intero dai medesimi fatti e dalle stesse considerazioni che il Loria, con pazienza ammirevole, è andato accumulando nel corso delle 142 pagine del suo volume; solo che egli non ne ha tirato le conseguenze giuste, e quando ha trovato qualche cosa che avrebbe potuto condurlo al giudizio più severo, ma più esatto, se n'è allontanato subito [1].

Ogni lettore paziente, e meno entusiasta dell'Autore, potrebbe ricostruire da sè quasi tutto quello che dico io. Io non farò che risparmiare la fatica agli altri.

***

Immaginiamoci dunque per un momento trasportati al principio del secolo che volge al tramonto.

Nel cuore d'Europa i maggiori matematici subendo il fascino di quella vita nuova, il soffio di quel movimento di idee, che si sintetizzò politicamente nella grande Rivoluzione, e intellettualmente nell'Enciclopedia, si sforzano in tutti i modi di aprire nuove vie e di segnare nuovi indirizzi per le matematiche, e scrivono opere e memorie che anche adesso, alla distanza di un secolo, si leggono con profitto e con ammirazione. Legendre, Lagrange, Gauss, Jacobi, Abel, fondano l'analisi moderna, Poncelet, Monge, Carnot, la moderna geometria, e mentre tutto questo avviene altrove, immaginiamoci poi che in un angolo remoto di questa Europa, alcuni dotti, piena la testa di erudizione classica, si riuniscono per risollevare i cadaveri di Archimede e di Apollonio, e crederli ancora uomini vivi, proclamano *summa salus* per l'insegnamento delle matematiche una cattedra all'Università dove si insegnassero i metodi di quei matematici antichi [2], fanno credere ai loro contemporanei e

(1) Vedi p. es. i brani citati alle p. 41, 42, 110 del libro.
(2) V. p. 96 dell'opera.

conterranei che non esiste altra matematica al di fuori di quella, reputano sublime problema quello concernente qualche quistione sulle coniche, sia pure difficile, e per mezzo secolo restano fissi in queste idee, e fanno restar fissi gli altri, seminando dei germi che riuscirà poi difficile sradicare; allora, me lo permetta l'amico Loria, io non dirò che quei dotti hanno fondata una scuola, e molto meno poi io potrò dire che hanno rinnovata quella scuola pitagorica di Cotrone cui il Loria allude, in un momento di entusiasmo, nella prefazione del suo lavoro.

I pitagorici di Cotrone si riunivano per tentare di risolvere i problemi più ardui, per quei tempi, di filosofia naturale, ma mentre essi studiavano e discutevano, nessun uomo dei loro tempi ne sapea più di loro.

Qui la cosa era tanto diversa.

Qui si tratta di uomini dotti che vogliono camminare a ritroso coi tempi, che si chiudono gli occhi per non vedere quello che si fa altrove, e che avrebbero potuto adoperare invece tutte le forze del loro ingegno, indiscutibilmente poderoso, a seguire la corrente delle idee nuove, e a creare così davvero un monumento incancellabile alla loro gloria.

Nè si può obbiettare la solita ragione della mancanza di comunicazioni e del nessun commercio intellettuale che quella sventurata regione d'Italia avea col resto d'Europa perchè quei dotti sapevano di opporsi alla scuola di Lagrange, conoscevano, almeno di nome, quello che si facea altrove, ma quella luce dava loro fastidio ed essi chiudevano gli occhi per non vederla. E ciò risulta ad ogni passo dallo stesso lavoro del Loria [1].

Tutto quell'ambiente ci trasporta in pieno cinquecento, mentre che bisogna pensare che eravamo già nella prima metà di questo secolo, nel momento in cui era già sorta la luce dei tempi nuovi.

Insomma io debbo pur francamente confessare che a me, sin da molto tempo, ha fatto sempre un'impressione irresistibilmente sfavorevole il vedere quelli uomini d'ingegno occupati per mezzo secolo, come già i matematici del rinascimento, a proporsi e a risolvere dei problemi di natura specialissima, come il problema di Archimede, o quello dei contatti circolari, o quello delle tre e quattro rette, o quello delle inclinazioni, e così via dicendo, anzichè seguire l'indirizzo che già da molto tempo, da Cartesio in poi, avean cominciato a seguire i geometri, abbandonando i problemi speciali e cercando di raccogliere le nozioni matematiche in una sintesi unica, costruendo cioè una matematica che

(1) Mi piace citare p. es. solo la nota a pag. 20.

dovea stare a quella del rinascimento, come la chimica di Lavoisier stette all'alchimia. E si può anche aggiungere che è tanto forte questo amore che i seguaci di quella scuola presero per tutte quelle tendenze, indirizzi, e perfino abitudini cinquecentiste che cercano di imitarle per quanto possono, e la matematica disfida dell'anno 1839, fatta a similitudine delle antiche disfide [1], è la più eloquente delle prove di quello che dico.

Nè vale il dire che il capo-scuola, il Fergola, avea sentito il bisogno di stabilire dei principii generali, e avea all'uopo pubblicato dei libri in cui cercava di proporre dei metodi per la trattazione dei problemi geometrici [2], quali il principio di conversione, quello di trasferimento, ecc.

Non ci vuol molto a convincersi che l'opera di cui parlo è più metafisica che matematica; lo stesso suo titolo: *Della invenzione geometrica*, le fu dato dal Flauti per imitare il classico Cicerone che avea scritto *Della invenzione retorica* [3]. Il suo autore nello scriverla, avea ingenuamente creduto che la grande geometria del secolo che cominciava potea racchiudersi solo nei principii euristici dei filosofi greci, che egli si ingegna di ricostruire [4].

Nella sua mente, indubbiamente acuta, c'era ancora troppo classicismo per arrivare a scindere le due cose che debbono essere sempre scisse, la matematica e la metafisica.

Il Loria crede che ben altro avvenire avrebbe potuto avere la scuola napoletana se non si fosse allontanata da questo così *elevato indirizzo* [5].

Ma dunque crede davvero il Loria che si avrebbe potuto fondare una geometria nel senso vero e largo, speculando, anche per mille anni, sui principii di trasferimento e di conversione e su altri di simil natura? Davvero che non mi avrei aspettato un tale giudizio da un così valente cultore delle discipline geometriche.

Creda pure a me, il Loria; egli non scrisse la storia di una *scuola* di matematica, ed insisto su questo perchè la parola *scuola* potrebbe essere presa in un senso molto diverso e molto lontano dalla verità.

Egli non ha scritto che la storia della coltura matematica napoletana nella prima metà del secolo; coltura matematica che, bisogna pur con-

(1) LORIA, p. 108.
(2) Id. p. 31 e seg.
(3) Id. p. 33.
(4) Id. p. 36.
(5) Id. p. 44.

venirne, era, rispetto ai tempi, un'assai ben povera cosa; tre secoli prima sarebbe stata sì una grande scuola di Rinascimento, ed infatti, come ho già notato, anche per le sue tendenze e per la sua indole, ricorda troppo da vicino quelle scuole classiche del cinquecento, nelle quali si sentì il bisogno, per ricostruire le basi del nuovo sapere umano, di tornare alle fonti pure dell'antica Grecia; anche Nicolò Tartaglia cominciò col ripristinare l'Euclide; ma un Rinascimento in pieno secolo decimonono mi sembra, ed è infatti, un anacronismo.

Come coltura matematica fu dunque una ben povera cosa, rispetto ai tempi, e che finì poi coll'essere anche (se lo ricordi il Loria) una ben triste cosa.

Si ostacolò la via a tutti quelli che non volevano stare fra le loro tenebre. È vero che anche la scuola di Lagrange avea cercato di soffocare l'ingegno nascente del Wronski, ma al grande Lagrange i posteri possono perdonare l'ostilità al giovine e ribelle matematico polacco.

In un pubblico concorso tenutosi, credo, nell'anno 1857 per una cattedra di geometria analitica all'Università di Napoli, si presentò fra i concorrenti un giovine matematico di ingegno vivacissimo e che anzichè stare a risolvere gli eterni problemi di Apollonio, avea preferito nudrire la sua mente della lettura proficua delle opere degli ultimi insigni geometri inglesi e tedeschi, il Plücker segnatamente.

Quel giovine si chiamava Giuseppe Battaglini e si vide posposto a chi valea tanto meno di lui.

È vero che il Battaglini avea informata la trattazione della sua tesi alle splendide e nuovissime idee di Plücker, mentre l'altro non era uscito da quello che ne avrebbe potuto sapere Archimede, ma gli onorevoli giudici (fra cui c'era del resto qualche persona di ingegno, ma che subiva inesorabilmente l'ambiente) tennero gran conto del fatto, che questi avea scritto la sua dissertazione in latino e con stile e pompa ciceroniana, mentre il primo non l'avea scritta che semplicemente in italiano.

Il Battaglini ne scrisse, dolendosene, al Betti il cui nome allora già cominciava a preludere a quella gran fama che gli venne poi, e n'ebbe una risposta nobilissima, degna dell'uomo che la dava: *che aspettasse tempi migliori*, e i tempi migliori non tardarono a venire e fecero in fatti giustizia.

Davvero che bisogna pur confessare che è strana e inaspettata la condizione nella quale ci troviamo noi due, io e Loria, che scriviamo, di dover ora dopo tanti anni e in luoghi così lontani dal teatro dell'azione, rievocare la memoria di fatti che appassionarono i nostri padri, e tanto più quando poi si consideri che nessuno di noi due ha potuto mai avere un interesse diretto a quei fatti.

Io son venuto troppo tardi per sentire ancora l'influenza di quelle cattive tendenze che, negli studii matematici, hanno per tanti anni dominato in quella regione d'Italia, e hanno contribuito sempre più ad isolarla intellettualmente dal resto d'Europa, e che hanno rovinato molte carriere di giovani d'ingegno.

Però la colpa di rievocare la memoria di fatti ormai in dimenticanza, non è mia; io posso addebitarla al mio amico Loria che me ne ha data l'occasione scrivendo quel libro, e ponendo, quella da lui chiamata *scuola napoletana* sotto una luce, secondo me, assai diversa dalla vera.

***

Ma mi si può dire adesso: Ebbene ammettiamo pure quello che voi dite, che quella scuola non era all'altezza dei tempi, e quale avrebbe potuto essere senza supporre nessun nuovo sforzo, o nessun maggiore ingegno nei suoi fautori, ma solo una maggiore larghezza di idee, un più modesto sentimento della propria personalità, e una maggiore liberalità nell'attrarre nella loro orbita le idee nuove già sorte da molto tempo; ma si potrà poi negare che tutto questo movimento, qualunque esso sia stato, abbia contribuito in ogni modo a mantener vivo l'amore per gli studii matematici, e a fare anche la sua parte di bene?

In verità non posso negare che fra l'occuparsi di nulla, o l'occuparsi di Apollonio, è assai meglio fare quest'ultima cosa; ma quando io vedo che nel medesimo tempo le altre regioni d'Italia, politicamente in condizioni anche più tristi, accoglievano le idee nuove d'oltremonti, e cominciavano già a divenir centri di elevata coltura matematica, io mi domando, con rammarico, perchè quella sventurata regione d'Italia che pure non era inferiore alle altre nelle lettere e nelle scienze speculative, dovea poi restarne tanto al disotto nelle scienze matematiche?

E quando poi io considero la storia delle lotte di cui il Flauti si fece centro, dalle sue prime contrastate vittorie, sino alla sua finale disgrazia (1), le parole acri che gli uscirono dalla penna nei momenti di rabbia, l'opposizione metodica e ostinata che egli e i suoi fautori faceano ai giovani che appena appena accennavano di volersi scostare

(1) Nel 1860 sciolta si l'Accademia delle Scienze, e ricompostasi poco dipoi, il Flauti che ne avea sino allora fatto parte col titolo di *segretario perpetuo*, non fu riammesso. Da allora non ci furono altri segretarii *perpetui*, carica creata modellandosi sugli statuti dell'Accademia di Francia, ma che aveva fatta cattiva prova.

dalle loro idee, i cattivi germi di idee piccine e unilaterali che si seminavano negli splendidi ingegni del mezzogiorno, mi viene allora una gran voglia di chiedere a me stesso: Son questi dunque gli effetti, è questo dunque l'ambiente magnificato dal Loria come una *scuola di matematica?* E se qualcuno qui mi chiedesse: *Fu una scuola o finì per essere un dispotismo scientifico?* cosa potrei allora rispondergli io?

Io non voglio assumermi la grave responsabilità di una risposta: però resta sempre il fatto che i germi di quelle idee ristrette e intolleranti sono scomparsi solo negli ultimi anni.

Giova per esempio ricordare che quell'uomo venerando di Fortunato Padula, cui si deve una delle prime e più forti ribellioni alla cosiddetta scuola napoletana, non potette però nei tardi suoi anni liberarsi dal bisogno di rivolgersi al Consiglio superiore per elevare una protesta contro il nuovo e giovine professore di meccanica Dino Padelletti che avea largamente introdotto nelle sue lezioni l'uso delle nuove e larghe vedute dei matematici stranieri. E il Consiglio superiore dette ragione a Padelletti.

Fortunato Padula lottatore vittorioso contro la scuola dell'intolleranza, ricade nei suoi tardi anni, nella medesima intolleranza che da giovine avea combattuto.

È un fatto che è un sintomo e val la pena di notarlo.

Potrei aggiungere altre cose, ma le taccio.

Certamente, lo ripeto ancora, il còmpito mio questa volta non è stato piacevole, e tanto più quando penso che proprio questa volta non ho potuto degnamente rispondere alle frasi tanto gentili verso Napoli, colle quali l'amico Loria, con quella delicatezza d'animo che gli è così abituale, chiude il suo volume, scritto in una forma così elegante.

Ma io non potea tacere nel vedere magnificato, in buona fede, un indirizzo di cose che io reputo una delle principali cagioni della grande decadenza degli studii matematici nel mezzogiorno d'Italia prima del 1860. La mia natura è fatta così che quando ho da dire una cosa che mi sembra vera, non posso tacerla.

Al vantaggio di vivere in pace cogli uomini, preferisco quello di vivere in pace colla mia coscienza.

Milano, 18 novembre 1892.

RECENSIONI

Premiers principes d'Algèbre avec plus de 1200 exercices gradués, par MM. C. A. Laisant et E. Perrin. — Paris, Delagrave, 1892.

Le livre de MM. Laisant et Perrin, petit ouvrage excellent, est destiné aux élèves des écoles normales primaires et aux candidats aux écoles supérieures de commerce. Les auteurs en ont exposé les matières avec beaucoup de clarté, et tenant compte des recherches les plus récentes, ils ont condensé les théories inscrites au programme des lycées. La rigueur des raisonnements et la correction du style sont les qualités essentielles d'un ouvrage destiné à l'enseignement. Ce livre les possède; les auteurs s'y révèlent comme professeurs, comme érudits et comme lettrés. Voici l'indication des matières qui y sont traitées:

Avant-propos.
1re Leçon. — *Objet de l'algèbre; principaux signes.*
2e » — *Quantités algébriques; monômes, polynômes.*
3e » — *Coefficients; exposants; termes semblables.*
4e » — *Addition.*
5e » — *Soustraction; quantités négatives.*
6e » — *Multiplication par un monôme.*
7e » — *Multiplication des binômes. Règle des signes.*
8e » — *Multiplication des polynômes. Formules utiles.*
9e » — *Division des monômes.*
10e » — *Division des polynômes.*
11e » — *Fractions algébriques.*
12e » — *Des équations en général.*
13e » — *Transposition des termes; disparitions des dénominateurs.*
14e » — *Équations du premier degré à une inconnue. Inégalités du premier degré.*
15e » — *Problèmes du premier degré à une inconnue.*
16e » — *Équations numériques du premier degré à deux inconnues. Élimination.*
17e » — *Équations générales du premier degré à deux inconnues. Équations à plus de deux inconnues.*
18e » — *Discussion des solutions générales des équations du premier degré à deux inconnues.*
19e » — *Des problèmes du premier degré à deux ou plusieurs inconnues.*
20e » — *Discussion des problèmes; interprétation des résultats.*
21e » — *Racine carrée; radicaux du 2e degré.*
22e » — *Résolution de l'équation incomplète du 2e degré.*
23e » — *Résolution de l'équation complète du 2e degré.*

Les auteurs ont traité la théorie des *Progressions* et des *Logarithmes* avec toute la netteté désirables, d'une façon pourtant assez sommaire, sans s'égarer dans de fastidieux développements. L'*Appendice* contient quelques notions sur divers sujets qui d'habitude ne sont pas compris dans l'Algèbre élémentaire, mais cependant, par leur nature même, ne sortent pas des limites abordables pour les commençants.

Ces aperçus sont de nature à éveiller la curiosité des élèves, et à provoquer chez eux l'initiative et l'esprit de recherche.

Toutes les théories sont exposées simplement, clairement, avec méthode et rigueur, et accompagnées d'exercices nombreux et bien choisis, à la suite de chaque leçon. Le volume est terminé aussi par un grand nombre d'*Exercices divers* qui ont pour objet d'habituer le lecteur à la pratique du calcul et de le familiariser avec certains artifices, applicables à la résolutions de telle ou telle question, et sur lesquels il est à peu près impossible de formuler des règles un peu générales.

En terminant nous disons que peu de manuels d'Algèbre sont si bien à la portée des élèves; peu sont à ce point appropriés à l'enseignement élémentaire, peu, croyons-nous, obtiendront un succès plus grand et plus mérité, aussi le recommandons-nous vivement aux professeurs et aux élèves des lycées et des collèges.

Lisbonne, août 1892. RODOLPHE GUIMARAES
Officier du Génie.

Gli elementi di Euclide. — Nuova edizione modificata ed accresciuta dal Dott. MICHELE GREMIGNI. Libro I. — Firenze, Successori Le Monnier, 1893.

In una circolare, inviata alla fine di ottobre ai professori di matematiche delle scuole secondarie, la ditta Successori Le Monnier annunziava una nuova edizione degli *Elementi di Euclide* curata dal prof. Gremigni, e per mostrare l'importanza di questa pubblicazione univa alla circolare una copia della prefazione alla 2ª edizione del libro primo, scritta dallo stesso prof. Gremigni. — In essa l'autore dichiarava: « Mi son dato a ricercare quali fossero i postulati tacitamente ammessi nel testo euclideo; « e riunendo questi con quelli che vi si trovano esplicitamente enunciati, « ho potuto riassumerli sotto i seguenti nomi ecc. ... ». Più oltre aggiungeva: « Un'altra cosa che mi preme far rilevare *perchè è tale da dare la* « *maggior importanza alla presente pubblicazione*, è questa: ch'io a differenza degli altri autori, faccio a meno dei postulati del *diedro* e del- « l'*equivalenza* . . . .

. . . .

« Quanto poi al postulato dell'equivalenza, sono lieto di essere riuscito, « dopo una lunga prova, a darne la dimostrazione; onde il lettore troverà « qui, dalla proposizione D alla proposizione F inclusive, la teoria com- « pleta dell'equivalenza dei poligoni, la quale potrà anche estendersi a « tutte le grandezze in generale. Con questa innovazione copriamo ora la « maggior lacuna che fin qui si notava nel testo euclideo ».

Queste dichiarazioni ed altre di secondario interesse facevano prevedere che la nuova pubblicazione dovesse essere di straordinaria importanza, e che avrebbe largamente mantenuta la promessa, fatta nel 1867 dagli illustri professori Betti e Brioschi nella prefazione alla 1ª edizione degli *Elementi*, « di migliorarli cioè via via che nuove edizioni e l'esperienza che si andrà « facendo nelle nostre scuole ne additino la convenienza ». — E di vedere mantenuta una volta questa promessa si sentiva veramente il bisogno, poichè un quarto di secolo è trascorso dal giorno in cui fu fatta, e gli *Elementi d'Euclide*, editi dai Successori Le Monnier, hanno continuato a dominare invariati nelle nostre scuole con gli stessi difetti, con le stesse figure brutte e spesso sbagliate, senza migliorarsi mai, non tenendo alcun conto dei progressi fatti in questo tempo dagli studi geometrici elementari.

Vediamo come il prof. Gremigni ha mantenuto così belle promesse; e cominciamo subito dalla più importante, quella cioè della dimostrazione del postulato dell'equivalenza, che, come la dimostrazione di qualunque postulato, sarebbe un vero ed importante progresso nel campo della geometria.

La dimostrazione della proposizione E (*se due poligoni sono eguali ed hanno una parte comune, la rimanente parte dell'uno è equivalente alla rimanente parte dell'altro*), che l'autore è *lieto di aver trovato dopo una lunga prova*, è presso a poco una riproduzione di quella che il prof. Faifofer credè di dare dell'altra proposizione più generale: *sottraendo da due poligoni equivalenti due loro parti che siano eguali ad un terzo poligono, si ottengono resti equivalenti* (V. *Periodico di matematica* per l'insegnamento secondario, anno I, pag. 13. Roma 1886). — Il De-Paolis provò che questa dimostrazione è errata in una sua lettera al direttore del *Periodico*, pubblicata nel primo volume del *Periodico* stesso (pag. 44). Siccome ciò che scrisse il De-Paolis può applicarsi senza nessuna variazione alla dimostrazione del Gremigni, non esclusa la seconda parte che manca in quella del Faifofer, rimando senz'altro il lettore allo scritto del De-Paolis.

Quand'anche però la dimostrazione suddetta potesse esser completata e corretta, conservando il metodo adottato dal Faifofer e dal Gremigni (e che ciò sia possibile ne dubito molto col De-Paolis), sarei curioso di sapere per esempio come fa il Gremigni a ricavare il corollario 3° della proposizione F da quanto ha detto prima. — A tutti coloro poi che si occupano sul serio di geometria, parrà per lo meno ingenua la pretesa dell'autore di avere compendiata in tre proposizioni tutta la teoria dell'equivalenza, che è una delle più difficili della geometria elementare.

E passiamo al postulato del *diedro*. « Che un diedro sia rovesciabile « (dice l'A.) non è un postulato ma un teorema: perchè esso (*sic*) è con- « seguenza del postulato analogo dell'angolo e della proprietà che da un « punto di un piano non si può innalzare ad esso che una sola perpendi- « colare ». — Giacchè il Gremigni ha fatto questa scoperta, è strano che esso non si sia accorto anche che dalla possibilità di rovesciare un segmento si può molto facilmente dedurre la possibilità di rovesciare un angolo e viceversa (V. post. V, p. 3, e post. VIII, p. 6), e che molti autori, pur riconoscendo perfettamente questo fatto, hanno creduto di poter ammettere come postulato la possibilità di rovesciare un segmento, un angolo e un diedro, perchè consideravano come *un solo postulato* l'ammettere un medesimo fatto per enti della stessa natura. Riconosco che quest'opinione può essere discussa, ma per conto mio mi contento di vederla professata anche da valenti geometri come Sannia, D'Ovidio e De-Paolis.

Ciò posto, restano prive di qualsiasi fondamento le seguenti parole dell'autore: « E qui cade in acconcio di far osservare a tutti coloro, i quali « sostengono potersi fondere, anche nei primi elementi, la Geometria piana « colla solida, che se ciò deve ottenersi ammettendo il postulato del diedro, « tale fusione è un errore bello e buono ». Siccome il postulato dell'angolo e quello del diedro si possono, volendo, dedurre da quello del segmento, facendo o non facendo la fusione delle due geometrie, l'osservazione sopra riferita, resta un'asserzione gratuita nè bella nè buona, e che l'autore avrebbe potuto risparmiarsi, almeno per rispetto alla tomba recente dell'illustre De-Paolis, troppo presto rapito alla scienza, il quale fu di questa fusione strenuo difensore e propugnatore. — Padronissimo l'autore di pensare che anche didatticamente la suddetta fusione sia un errore; ma concederà, spero, agli altri il permesso di pensare diversamente, almeno finchè egli non sia riuscito a trovare in favore della sua tesi ragioni più convincenti della semplice asserzione « che sia prematuro cominciare lo studio « della Geometria solida nel Ginnasio, anche quando si tratti delle classi « superiori ».

Quanto ai postulati ammessi dall'A. ho poco da osservare, poichè essi sono in sostanza quelli adottati prima dal De-Paolis e poi da altri, e per questa parte la seconda edizione degli *Elementi* è migliore della prima.

Non parlo dei minori difetti del libro, che in gran parte sono comuni alla prima edizione. Soltanto esservo che, avendo creduto l'A. di poter liberamente riveder le bucce ad Euclide, sopprimendo e aggiungendo teoremi, cambiando dimostrazioni ecc., avrebbe fatto bene a migliorare in

molti luoghi la dicitura della prima edizione, e a colmare varie lacune che si colmano o *si coprono* (come dice l'A.) più facilmente di quella della teoria dell'equivalenza. Per esempio non si è mai accorto il dott. Gremigni che le prop. I, XII, XXII non si possono dire dimostrate rigorosamente senza i teoremi relativi alle intersezioni di un circolo con una retta, o di due circoli fra loro, teoremi che Euclide mette nel III libro?

Un'ultima osservazione ed ho finito. Come ho già detto, l'A. tratta Euclide molto in confidenza, sopprimendo o aggiungendo teoremi, cambiando dimostrazioni, ecc., fa insomma quello che farebbe un buon maestro muratore, il quale, senza chiedere il permesso all'ufficio d'arte, volesse *per fas* o *per nefas* adattare ai bisogni cambiati dei tempi un vecchio e monumentale edifizio, solidamente costruito. Tutto ciò può essere utile, ma è il caso di domandarsi, se con tante note, aggiunte e modificazioni gli *Elementi di Euclide* sono ancora gli *Elementi di Euclide*, e se per caso il nome del grandissimo geometra greco è utilizzato soltanto per dare accesso privilegiato nelle nostre scuole all'opera di un minor geometra italiano.

Livorno, 21 novembre 1892. GIULIO LAZZERI.

E. SADUN e C. SOSCHINO — *Lezioni di Aritmetica. Elementi della teoria dei numeri interi e frazionari.* — G. B. Paravia e Comp., 1893, pag. 198. L. 2,50.

Il libro dei sigg. Sadun e Soschino è il primo, fra quelli che la maggioranza degli insegnanti possono ritenere alla prima come adottabile nella scuola, che abbandoni risolutamente, se non completamente, le forme tradizionali, insieme ai tradizionali e grossolani errori e non sensi.

L'uso però dei concetti intuitivi di *ordine* e di *induzione completa*, senza che il primo sia definito ed il secondo enunciato, fanno sì che il libro dei sigg. Sadun e Soschino non possa ritenersi come un'*aritmetica razionale* e nemmeno come *elementi di una* **teoria** *dei numeri*, nel senso scientifico della parola. A questi piccoli difetti, che indicherò tra poco, e che sono facilmente rimediabili, va unito il pregio di una chiarezza e di una semplicità che dovrebbe trovarsi in tutti i lavori didattici, insieme ad altri pregi relativi all'ordine dell'esposizione, come p. e., aver posta la numerazione dopo la teoria delle operazioni fondamentali, l'aver rigorosamente definite le operazioni sui fratti (la moltiplicazione eccettuata) ed altri ancora che il lettore potrà facilmente rilevare da sè.

Ecco ora le principali mende alle quali accennavo prima.

Nel n. 1 dicono *eguali* gli oggetti sostituibili l'uno all'altro e nella nota 2ª a pag. 5 confermano questa definizione per i numeri eguali. Tale definizione non esprime una proprietà che sia *vera in generale*, poichè porterebbe p. e. a dimostrare le proposizioni indimostrabili

$$a=a;\quad a=b\,.\,\mathrm{o}\,.\,b=a;\quad a=b,\quad b=c\,.\,\mathrm{o}\,.\,a=c,$$

che costituiscono appunto la definizione di eguaglianza, e a ritenere p. e. la frazione continua $\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{5+\cfrac{4}{3}}}$, *determinata dai suoi fattori integranti* $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{3}$, eguale alla frazione continua $\cfrac{2}{4+\cfrac{21}{35+\cfrac{12}{9}}}$, perchè i fattori integranti di questa sono eguali a quelli della frazione data.

Nei nn. 2 e 3 la classe dei numeri interi non è definita, poichè non sono date le proprietà degli individui della classe, e solo di tale proprietà si fa sempre uso implicitamente senza enunciarle.

Nel n. 6 la definizione di *somma*, che è ottenuta facendo uso del principio di induzione, contiene implicitamente il principio $(a+b)+1=a+(b+1)$, che da sè solo *definisce la somma*, e contiene il teorema il cui enunciato è la definizione stessa.

Nel n. 19 si parla brevemente dei maggiori e minori senza porre in evidenza, e dare le proposizioni primitive da cui dipendono, le proprietà importanti

$$a, b \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, \supset .\, a = b \cup a > b \cup a < b$$
$$. \supset : a = b \,.\, a > b \,. = \Lambda : a = b \,.\, a < b \,. = \Lambda : a > b \,.\, a < b = \Lambda.$$

Nel n. 34 si trova la solita definizione di prodotto « ..... il numero formato, mediante addizione, col ..... » che, per l'aggiunta delle parole, *mediante addizione*, non perde nulla del carattere metafisico che ha non cercando di essere una definizione apparente, poichè non è *rigorosamente definito* il significato della frase « *formato mediante addizione* ». Del resto al n. 181 la medesima definizione comparisce per i fratti e questa volta priva, necessariamente, delle parole che gli autori hanno creduto dare rigore scientifico alla corrispondente definizione per i numeri interi.

Nel n. 153 si trova introdotto il numero frazionario ricorrendo al solito concetto di *unità frazionaria* che non è definita mediante le sue proprietà.

Infine, per ciò che riguarda l'ordine, osserverò che la teoria dei numeri interi, dei fratti e degli irrazionali, costituisce il vero corso di aritmetica, e tutto ciò che riguarda i numeri primi, i divisori e i multipli è solo una introduzione alla teoria superiore dei numeri interi, e come tale può essere posta alla fine dell'aritmetica. L'adoperarsi le teorie ora indicate per la risoluzione delle frazioni al minimo denominatore comune e ai minimi termini, non è argomento tanto importante da giustificare lo sviluppo di una teoria lunga, e difficile per le giovani menti, che ha formato, forma e formerà ancora chi sa per quanto tempo, il cavallo di battaglia dei programmi di aritmetica razionale [1]. BURALI-FORTI CESARE.

(1) È del resto l'unica parte dell'aritmetica le cui proposizioni sieno dimostrate un po' meno peggio negli ordinari trattati, astraendo dall'assoluta mancanza di fondamenti. Così si capisce che è un mezzo per giustificare il titolo di *aritmetica razionale*.

Sulle equazioni algebriche.

Nota di FRANCESCO GIUDICE *a Genova.*

Se si pone

$$f(\sqrt[n]{y}) = a_0 + a_1\sqrt[n]{y} + a_2\sqrt[n]{y}^2 + \ldots + a_{n-1}\sqrt[n]{y}^{n-1}$$

e s'indica con $\mathrm{N}f(\sqrt[n]{y})$ la norma di $f(\sqrt[n]{y})$ relativa al radicale posto in evidenza, cioè il prodotto

$$f(x) \,.\, f(\alpha x) \,.\, f(\alpha^2 x) \,.\, \ldots \,.\, f(\alpha^{n-1}x)$$

dove x è uno qualunque degli n valori di $\sqrt[n]{y}$ ed α è una radice n^{ma} propria dell'unità, si ha

$$\mathrm{N}f(\sqrt[n]{y}) = \left|\begin{array}{cc:cc} a_0 & a_1 & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-y} & a_0 & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \hdashline a_2 y & a_3 y & a_0 & a_1 \\ a_1 y & a_2 y & a_{n-1} & a_0 \end{array}\right|$$

Si può formare la norma d'un'espressione con più radicali, formando prima la norma relativa ad un radicale, poi quella dell'espressione ottenuta relativa ad un radicale rimasto e così via, fino a pervenire ad espressione senza radicali. Si offre quindi spontaneamente la via più naturale da seguirsi onde ottenere nel modo più semplice tutto ciò che è ottenibile per la risoluzione algebrica delle equazioni algebriche.

Per risolvere un'equazione del grado $n = p.q.r. \ldots$, si componga un'espressione la quale contenga radicali dei gradi p q r ... ed almeno n quantità arbitrarie, da determinarsi poi in modo che la norma della differenza tra tale espressione ed x coincida con l'equazione algebrica generale di grado n: se si otterrà tale determinazione con mezzi algebrici, si sarà risolta algebricamente l'equazione generale del grado n.

Non si potrebbe prendere un'espressione con meno di n indeterminate perchè, se così fosse fatto, eliminando esse indeterminate dalle n equazioni ottenute eguagliando i coefficienti delle stesse potenze di x, nell'equazione di grado n e nella norma della differenza tra detta espressione ed x, si otterrebbero delle relazioni tra i soli coefficienti dell'equazione, la quale quindi non sarebbe generale; a meno che le relazioni fossero tali da potersi soddisfare con opportuna trasformazione algebrica, dell'equazione generale.

Si potrà pure procedere così: partendo dall'equazione di grado p, si componga ogni coefficiente della stessa con un radicale di grado q, da conservarsi lo stesso, cioè si dia a ciascun coefficiente la forma

$$a_0 + a_1\sqrt[q]{\lambda} + a_2\sqrt[q]{\lambda^2} + \dots + a_{q-1}\sqrt[q]{\lambda^{q-1}}$$

dove le a_i sono indeterminate diverse nei diversi coefficienti mentre λ è la stessa per tutti. Si eguagli poi a zero la norma del primo membro e s'otterrà un'equazione del grado $p.q$: si cerchi d'esprimere le indeterminate contenute in quest'equazione per mezzo dei coefficienti dell'equazione generale del grado $p.q$, servendosi delle $p.q$ equazioni che stabiliscono l'eguaglianza delle potenze simili dell'incognita in quella ed in questa equazione. Se si riesce a ciò, si dia ad ogni coefficiente dell'equazione di grado $p.q$ la forma

$$b_0 + b_1 . \sqrt[r]{\mu} + b_2\sqrt[r]{\mu^2} + \dots + b_{r-1} . \sqrt[r]{\mu^{r-1}}.$$

S'eguagli a zero la norma del primo membro e s'otterrà un'equazione del grado $p.q.r$; si cerchi d'esprimere le indeterminate contenute in questa, servendosi delle equazioni che si ottengono eguagliando i coefficienti di quest'equazione agli omologhi dell'equazione generale di grado $p.q.r$. Continuisi così fino a pervenire all'equazione generale di grado $n = pqr\dots$ S'identifichi ancora quest'equazione a quella generale di grado n, attribuendo valori opportuni alle nuove indeterminate che saranno state introdotte. L'equazione generale di grado n sarà così ridotta all'equazione di grado p dalla quale siamo partiti: i coefficienti, pel calcolo precedente, saranno formati in modo conosciuto coi coefficienti dell'equazione generale di grado n, i quali vi figureranno anche sotto radicali dei gradi q $r\dots$

Determinando p_0 p_1 ... in modo da identificare la norma di

$$x - (p_0 + p_1\sqrt[n]{\rho} + \dots + p_{n-1}\sqrt[n]{\rho^{n-1}})$$

col primo membro dell'equazione

$$x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

le radici di questa saranno date da

$$x_i = p_0 + \alpha^i p_1\sqrt[n]{\rho} + \alpha^{2i}p_2\sqrt[n]{\rho^2} + \dots + \alpha^{(n-1)i}p_{n-1}\sqrt[n]{\rho^{n-1}}$$

dove α è radice n[ma] propria dell'unità. Si deduce

$$-a_1 = \Sigma x = np_0 .$$

Se sarà $a_1 = 0$, dovrà quindi ancor essere $p_0 = 0$ e si tratterà di identificare con

$$x^n + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

la norma di

$$x - (p_1\sqrt[n]{\rho} + p_2\sqrt[n]{\rho^2} + \dots + p_{n-1}\sqrt[n]{\rho^{n-1}})$$

dove p_1, od un altro p_i, può farsi eguale ad 1 (ABEL, *Œuvres complètes*, tome premier, pag. 71; tome second, pag. 236).

Equazioni dei gradi 2°, 3° e 4° ad un'incognita.

Seguendo l'indirizzo tracciato, risolveremo le equazioni di 2°, 3° e 4° grado con metodi i quali differiscono dagli usuali per lo meno quanto questi differiscono tra loro ed hanno sui medesimi il gran vantaggio didattico d'essere meglio coordinati. Specialmente per l'equazione di 4° grado daremo metodi semplicissimi di risoluzione: discuteremo in modo più rigoroso e completo che non si usi fare la natura delle radici di essa equazione ed, occasionalmente, daremo tre note forme canoniche della quartica binaria.

In quanto segue, le incognite x ed y saranno generalmente legate dalla

(1) $$y = ax + b.$$

Supporremo numeri reali a b c d ed a diverso da zero. Adotteremo inoltre le notazioni spesso usate (1):

(2) $$\begin{cases} \mathrm{H} = ac - b^2 \qquad\qquad \mathrm{G} = a^2d - 3abc + 2b^3 \\ \qquad\qquad \mathrm{I} = ae - 4bd + 3c^2 \\ \mathrm{J} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} = \dfrac{1}{a^3}(a^2\mathrm{HI} - \mathrm{G}^2 - 4\mathrm{H}^3). \end{cases}$$

Equazione di 2° grado.

(3) $$ax^2 + 2bx + c = 0.$$

Per la (1) e per la prima (2), si deduce

$$a.(ax^2 + 2bx + c) = y^2 + \mathrm{H} = 0.$$

(1) V. per es.: BURNSIDE and PANTON, *Theory of equations*, Dublin 1886.

Indicando con Δ il discriminante della forma $(a,\ b,\ c)\ (u,\ v)^2$, ponendo cioè

$$\Delta = -\mathrm{H} = b^2 - ac = \frac{a^2}{4}\cdot(x_1 - x_2)^2$$

si ha quindi, per la precedente equazione in y e per la (1), che:

Le due radici, x_1 x_2, della (3) *sono:*

$$(4)\qquad x_1 = \frac{1}{a}\cdot(-b+\sqrt{\Delta}) \qquad\qquad x_2 = \frac{1}{a}\cdot(-b-\sqrt{\Delta}).$$

Equazione di 3° grado.

$$(5)\qquad ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0.$$

Per la (1) e le (2), si deduce

$$a^2.(ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d) = y^3 + 3\mathrm{H}y + \mathrm{G}.$$

Si ponga quindi

$$(6)\qquad y^3 + 3\mathrm{H}y + \mathrm{G} = \mathrm{N}.(y - \sqrt[3]{z} - t\sqrt[3]{z^2})$$

$$= \begin{vmatrix} y & -1 & -t \\ -tz & y & -1 \\ -z & -tz & y \end{vmatrix}$$

$$= y^3 - 3tzy - z - t^3z^2 = 0.$$

Perchè ciò sia, deve essere

$$(7)\qquad -tz = \mathrm{H} \qquad\qquad -z - t^3z^2 = \mathrm{G}.$$

Da questo sistema risolvente, si ricava subito

$$\mathrm{G}^2 + 4\mathrm{H}^3 = (z - t^3z^2)^2.$$

Mediante quest'equazione e le (7), si trova subito

$$t.\sqrt[3]{z^2} = \frac{tz}{\sqrt[3]{z}} = -\frac{\mathrm{H}}{\sqrt[3]{z}} \qquad\qquad z = \frac{1}{2}\cdot(-\mathrm{G} + \sqrt{\mathrm{G}^2 + 4\mathrm{H}^3})$$

$$(t\sqrt[3]{z^2})^3 = t^3z^2 = \frac{1}{2}\cdot(-\mathrm{G} - \sqrt{\mathrm{G}^2 + 4\mathrm{H}^3})$$

quindi, per la (6), si ha

$$(8)\qquad y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-\mathrm{G} + \sqrt{\mathrm{G}^2 + 4\mathrm{H}^3})} - \frac{\mathrm{H}}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-\mathrm{G} + \sqrt{\mathrm{G}^2 + 4\mathrm{H}^3})}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-\mathrm{G} + \sqrt{\mathrm{G}^2 + 4\mathrm{H}^3})} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-\mathrm{G} - \sqrt{\mathrm{G}^2 + 4\mathrm{H}^3})}.$$

Indicando con Δ il discriminante della forma $(a,\ b,\ c,\ d)\ (u,\ v)^3$, ponendo cioè

$$(9)\qquad \Delta = \frac{1}{a^2}(\mathrm{G}^2 + 4\mathrm{H}^3) = -\frac{a^4}{27}(x_1 - x_2)^2.(x_1 - x_3)^2.(x_2 - x_3)^2$$

si ha, per le (8) ed (1), che:

Le radici, x_1 x_2 x_3, della (5) *sono*

$$(10)\ \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a}\cdot\left(-b + \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}(-\mathrm{G} + a\sqrt{\Delta})} + \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}(-\mathrm{G} - a\sqrt{\Delta})}\right) \\[2ex] x_2 = \dfrac{1}{a}\left(-b + \omega\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}(-\mathrm{G} + a\sqrt{\Delta})} + \omega^2\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}(-\mathrm{G} - a\sqrt{\Delta})}\right) \\[2ex] x_3 = \dfrac{1}{a}\left(-b + \omega^2\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}(-\mathrm{G} + a\sqrt{\Delta})} + \omega\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}(-\mathrm{G} - a\sqrt{\Delta})}\right) \end{cases}$$

ossia

$$(11)\ \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a}\left(-b + \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}(-\mathrm{G} + a\sqrt{\Delta})} - \dfrac{\mathrm{H}}{\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}(-\mathrm{G} + a\sqrt{\Delta})}}\right) \\[3ex] x_2 = \dfrac{1}{a}\left(-b + \omega\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}(-\mathrm{G} + a\sqrt{\Delta})} - \dfrac{\mathrm{H}\omega^2}{\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}(-\mathrm{G} + a\sqrt{\Delta})}}\right) \\[3ex] x_3 = \dfrac{1}{2}\left(-b + \omega^2\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}\cdot(-\mathrm{G} + a\sqrt{\Delta})} - \dfrac{\mathrm{H}\omega}{\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}(-\mathrm{G} + a\sqrt{\Delta})}}\right) \end{cases}$$

dove ω indica una qualunque delle due radici imaginarie cubiche dell'unità ed i valori di G H Δ *sono dati dalle* (2) (9). *Nelle* (10) *i due radicali cubici debbonsi prendere tali da aversi:*

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-\mathrm{G} + a\sqrt{\Delta})}.\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-\mathrm{G} - a\sqrt{\Delta})} = -\mathrm{H}.$$

Questa condizione si può soddisfare, essendo il primo membro uguale a $\sqrt[3]{\frac{1}{4}(\mathrm{G}^2 - a^2\Delta)}$, cioè a $\sqrt[3]{-\mathrm{H}^3}$.

Equazione di 4° grado.

(12) $$ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e=0\,.$$

Per le (1) e (2), si deduce

$$a^3(ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e)=y^4+6\mathrm{H}y^2+4\mathrm{G}y+a^2\mathrm{I}-3\mathrm{H}^2.$$

1° Metodo.

Si ponga

(13) $$y^4+6\mathrm{H}y^2+4\mathrm{G}y+a^2\mathrm{I}-3\mathrm{H}^2=\mathrm{N}\,.\,(y-t\sqrt[4]{z}-\sqrt[4]{z^2}-u\sqrt[4]{z^3})$$

$$=\begin{vmatrix} y & -t & -1 & -u \\ -uz & y & -t & -1 \\ -z & -uz & y & -t \\ -tz & -z & -uz & y \end{vmatrix}$$

$$=y^4-2(z+2tuz)y^2-4(t^2z+u^2z^2)y-t^4z-4tuz^2-u^4z^3+z^2+2t^2u^2z^2.$$

Perchè ciò sia, deve essere

(14) $$\begin{cases} z(1+2tu)=-3\mathrm{H} \qquad\qquad z(t^2+u^2z)=-\mathrm{G} \\ z^2(1-2tu)^2-z(t^2+u^2z)^2=a^2\mathrm{I}-3\mathrm{H}^2. \end{cases}$$

Da queste, si deduce subito la risolvente, coll'incognita z,

$$z(2z+3\mathrm{H})^2-\mathrm{G}^2=(a^2\mathrm{I}-3\mathrm{H}^2)z$$

ossia

(15) $$4z^3+12\mathrm{H}z^2+(12\mathrm{H}^2-a^2\mathrm{I})z-\mathrm{G}^2=0$$

la quale, ponendo

(16) $$-a\mathrm{V}=z+\mathrm{H}$$

e tenendo conto delle (2), si trasforma subito nella

(17) $$4\mathrm{V}^3-\mathrm{IV}-\mathrm{J}=0\,.$$

Applicando a questa la formula (8), s'ottiene

$$-\mathrm{V}=\frac{1}{2}\cdot\left[\sqrt[3]{-\mathrm{J}+\sqrt{\mathrm{J}^2-\frac{1}{27}\cdot\mathrm{I}^3}}+\sqrt[3]{-\mathrm{J}-\sqrt{\mathrm{J}^2-\frac{1}{27}\cdot\mathrm{I}^3}}\right]$$

per cui, indicando con Δ il discriminante della forma (a, b, c, d, e) $(u, v)^4$, ponendo cioè

(18) $$\Delta=\mathrm{I}^3-27\mathrm{J}^2$$

$$=\frac{a^6}{256}(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_1-x_4)^2(x_2-x_3)^2(x_2-x_4)^2(x_3-x_4)^2$$

e tenendo calcolo della (16) ed anche della (8), si ha

(19) $$z=-\mathrm{H}+\frac{a}{2}\left[\sqrt[3]{-\mathrm{J}+\sqrt{-\frac{\Delta}{27}}}+\sqrt[3]{-\mathrm{J}-\sqrt{-\frac{\Delta}{27}}}\right]$$

$$=-\mathrm{H}+\frac{a}{2}\left[\sqrt[3]{-\mathrm{J}+\sqrt{-\frac{\Delta}{27}}}+\frac{\mathrm{I}}{3\sqrt[3]{-\mathrm{J}+\sqrt{-\frac{\Delta}{27}}}}\right].$$

Indicando con z_1 z_2 z_3 le tre radici della risolvente (15), si ha, per le (14),

$$z_1+z_2+z_3=-3\mathrm{H}=z+2ztu$$

$$z_1\ z_2\ z_3=\frac{\mathrm{G}^2}{4}=\frac{z^2}{4}\,.\,(t^2+u^2z)^2.$$

Facendo $z=z_1$, si ha quindi

$$z_2+z_3=2ztu \qquad\qquad z_2\ z_3=\frac{z}{4}\,.\,(t^2+u^2z)^2$$

per cui si ha pure

$$\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}=\sqrt{(\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3})^2}=\sqrt{2ztu+2\,.\sqrt{z_2}\,.\sqrt{z_3}}\,.$$

ma, per l'ultima delle precedenti relazioni, è

$$\sqrt{z_2}\,.\sqrt{z_3}=\pm\frac{\sqrt{z}}{2}\,.\,(t^2+u^2z)$$

e noi, dopo d'aver fissati i valori di $\sqrt{z_1}$ e $\sqrt{z_2}$, dei due valori di $\sqrt{z_3}$ sceglieremo quello definito dalla

$$\sqrt{z_2}\,.\sqrt{z_3}=+\frac{\sqrt{z}}{2}(t^2+u^2z)\,.$$

Avremo così

$$\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}=\sqrt{2ztu+\sqrt{z}\,.\,(t^2+u^2z)}=\sqrt{(t\sqrt[4]{z}+u\sqrt[4]{z^3})^2}$$

$$=t\sqrt[4]{z}+u\sqrt[4]{z^3}$$

e, per quanto fu detto ora, sarà

$$\sqrt{z_1}\,.\sqrt{z_2}\,.\sqrt{z_3}=\frac{z}{2}\,.\,(t^2+u^2z)$$

ossia, per la seconda (14),

(20) $$\sqrt{z_1}\,.\sqrt{z_2}\,.\sqrt{z_3}=-\frac{\mathrm{G}}{2}\,.$$

Per le (13) ed (1), sarà quindi:

$$x = \frac{1}{a}(-b + \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3})\ .$$

dove deve esser tenuto conto della (20). Abbiamo dunque che:

Le radici della (12) *sono:*

$$(21)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a}(-b + \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}) \\[2mm] x_2 = \dfrac{1}{a}(-b + \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}) \\[2mm] x_3 = \dfrac{1}{a}(-b - \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}) \\[2mm] x_4 = \dfrac{1}{a}(-b - \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}) \end{cases}$$

dove $z_1\ z_2\ z_3$ *sono le tre radici della risolvente* (15) e $\sqrt{z_1}\ \sqrt{z_2}\ \sqrt{z_3}$ *sono radici quadrate delle stesse, soddisfacenti la* (20).

Per la (19), si ha quindi che:

Le radici della (12) *si possono esprimere compendiosamente così:*

$$(22)\quad x = \frac{1}{a}\Bigg\{-b \pm \sqrt{-\mathrm{H} + \frac{a}{2}\left(\sqrt[3]{-\mathrm{J}+\sqrt{-\frac{\Delta}{27}}} + \frac{\mathrm{I}}{3\sqrt[3]{-\mathrm{J}+\sqrt{-\frac{\Delta}{27}}}}\right)}$$
$$\pm \sqrt{-\mathrm{H} + \frac{a}{2}\left(\omega.\sqrt[3]{-\mathrm{J}+\sqrt{-\frac{\Delta}{27}}} + \frac{\omega^2\mathrm{I}}{3\sqrt[3]{-\mathrm{J}+\sqrt{-\frac{\Delta}{27}}}}\right)}$$
$$+\varepsilon\sqrt{-\mathrm{H} + \frac{a}{2}\left(\omega^2.\sqrt[3]{-\mathrm{J}+\sqrt{-\frac{\Delta}{27}}} + \frac{\omega\mathrm{I}}{3\sqrt[3]{-\mathrm{J}+\sqrt{-\frac{\Delta}{27}}}}\right)}\Bigg\}$$

oppure così:

$$(22')\quad x = \frac{1}{a}\Bigg\{-b \pm \sqrt{-\mathrm{H} + \frac{a}{2}\left(\sqrt[3]{-\mathrm{J}+\sqrt{-\frac{\Delta}{27}}} + \sqrt[3]{-\mathrm{J}-\sqrt{-\frac{\Delta}{27}}}\right)}$$
$$\pm \sqrt{-\mathrm{H} + \frac{a}{2}\left(\omega.\sqrt[3]{-\mathrm{J}+\sqrt{-\frac{\Delta}{27}}} + \omega^2\sqrt[3]{-\mathrm{J}-\sqrt{-\frac{\Delta}{27}}}\right)}$$
$$+\varepsilon.\sqrt{-\mathrm{H} + \frac{a}{2}\cdot\left(\omega^2.\sqrt[3]{-\mathrm{J}+\sqrt{-\frac{\Delta}{27}}} + \omega.\sqrt[3]{-\mathrm{J}-\sqrt{-\frac{\Delta}{27}}}\right)}\Bigg\}$$

dove, per ogni combinazione di segni dei primi due radicali esterni, devesi prendere per ε *quella delle due unità reali la quale rende soddisfatta la* (20). *Pei due radicali cubici che figurano in* (22') *si debbono prendere valori che abbiano per prodotto* $\frac{\mathrm{I}}{3}$.

2° Metodo.

Si ponga

$$(23)\quad y^4 + 6\mathrm{H}y^2 + 4\mathrm{G}y + a^2\mathrm{I} - 3\mathrm{H}^2 = \mathrm{N}.(y - \sqrt{z} - \sqrt{t + u\sqrt{z}})$$
$$= y^4 - 2.(z + t)y^2 - 4uzy + z^2 + t^2 - u^2z - 2zt = 0.$$

Dovrà essere

$$(24)\quad z + t = -3\mathrm{H} \qquad uz = -\mathrm{G}$$
$$(z - t)^2 - u^2z = a^2\mathrm{I} - 3\mathrm{H}^2.$$

Eliminando t ed u, s'ottiene

$$(2z + 3\mathrm{H})^2.z - \mathrm{G}^2 = (a^2\mathrm{I} - 3\mathrm{H}^2).z$$

che è la risolvente (15) già ottenuta.

Per le (24), è

$$t = -3\mathrm{H} - z \qquad u = -\frac{\mathrm{G}}{z}$$

onde, per le (1) e (23), si ha che:

Le radici della (12) *sono:*

$$(25)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a}\cdot\left(-b + \sqrt{z} + \sqrt{-3\mathrm{H} - z - \dfrac{\mathrm{G}}{\sqrt{z}}}\right) \\[2mm] x_2 = \dfrac{1}{a}\left(-b + \sqrt{z} - \sqrt{-3\mathrm{H} - z - \dfrac{\mathrm{G}}{\sqrt{z}}}\right) \\[2mm] x_3 = \dfrac{1}{a}\left(-b - \sqrt{z} + \sqrt{-3\mathrm{H} - z + \dfrac{\mathrm{G}}{\sqrt{z}}}\right) \\[2mm] x_4 = \dfrac{1}{a}\left(-b - \sqrt{z} - \sqrt{-3\mathrm{H} - z + \dfrac{\mathrm{G}}{\sqrt{z}}}\right) \end{cases}$$

dove z *è una radice qualunque, non nulla, della* (15) *ed è data dalla* (19).

Se la (15) avesse sole radici nulle, cioè se fossero nulli tutti i suoi coefficienti, meno il primo, dalle (2) si dedurrebbe subito che

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e}$$

per cui il primo membro della (12) sarebbe eguale ad $\frac{1}{a^3}\cdot(ax + b)^4$ e le radici della (12) sarebbero quindi tutte uguali a $-\frac{b}{a}$.

Per le (15) e (24), si ha

$$z_1+z_2+z_3=-3\mathrm{H}=z+t \qquad z_1z_2z_3=\frac{\mathrm{G}^2}{4}=\frac{u^2z^2}{4}$$

per cui, fatto $z=z_1$, si ha

$$z_2+z_3=t \qquad z_2z_3=\frac{u^2z}{4}$$

per cui, prendendo uno qualunque dei due valori di $\sqrt{z_1}$ con uno qualunque di quelli di $\sqrt{z_2}$ e con quello dei due valori di $\sqrt{z_3}$ pel quale risulta

$$\sqrt{z_2}\,.\,\sqrt{z_3}=+\frac{u\sqrt{z_1}}{2}$$

si avrà

$$\sqrt{t+u\,.\sqrt{z}}=\sqrt{(\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3})^2}=\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}\,.$$

Si ricade così sulle (21).

3° Metodo.

Si ponga

(26) $y^4+6\mathrm{H}y^2+4\mathrm{G}y+a^2\mathrm{I}-3\mathrm{H}^2=\mathrm{N}\,.\,(y^2+2\sqrt{z}\,.\,y+t+u\sqrt{z})$
$=y^4+2(t-2z)y^2-4uzy+t^2-u^2z=0\,.$

Deve essere:

(27) $$\left\{\begin{array}{ll} t-2z=3\mathrm{H} & uz=-\mathrm{G} \\ & t^2-u^2z=a^2\mathrm{I}-3\mathrm{H}^2 \end{array}\right.$$

Eliminando t ed u, s'ottiene:

$$(3\mathrm{H}+2z)^2.\,z-\mathrm{G}^2=(a^2\mathrm{I}-3\mathrm{H}^2)z$$

che è ancora la risolvente (15).

Si ha, per le (27),

$$t=3\mathrm{H}+2z \qquad u=-\frac{\mathrm{G}}{z}$$

onde, per la (26), è

(28) $$y^4+6\mathrm{H}y^2+4\mathrm{G}y+a^2\mathrm{I}-3\mathrm{H}^2=$$
$$\left(y^2+2\sqrt{z}y+3\mathrm{H}+2z-\frac{\mathrm{G}}{\sqrt{z}}\right)\cdot\left(y^2-2\sqrt{z}y+3\mathrm{H}+2z+\frac{\mathrm{G}}{\sqrt{z}}\right)$$

e, per la (1), è quindi:

(28') $$a^3.\,(ax^4+4bx^3+6cx^2+4\,.\,dx+e)=$$
$$\left\{(ax+b+\sqrt{z})^2+3\mathrm{H}+z-\frac{\mathrm{G}}{\sqrt{z}}\right\}\cdot\left\{(ax+b-\sqrt{z})^2+3\mathrm{H}+z+\frac{\mathrm{G}}{\sqrt{z}}\right\}$$

dove z è una radice qualunque, non nulla, della risolvente (15) ed è data dalla (19).

Risolvendo le equazioni che s'ottengono eguagliando a zero i fattori del 2° membro, si ritrovano i risultati già ottenuti.

Se z non avesse che valori nulli, i due fattori sarebbero entrambi $(ax+b)^2$, per ciò che fu detto a proposito del 2° Metodo.

4° Metodo.

Ritorniamo ad uno qualunque dei metodi precedenti, per es. all'ultimo. Troviamo, senza difficoltà:

$$a^6\Delta=(a^2\mathrm{I})^3-27(a^3\mathrm{J})^2=\frac{1}{27}\cdot\Big\{(3t^2-3u^2z+(t-2z)^2)^3$$
$$-(9(t^2-u^2z)\,.\,(t-2z)-(t-2z)^3-27u^2z^2)^2\Big\}$$
$$=(4t+u^2)^2.\,z^2.\,[(t-z)^2-u^2z]$$

da cui, con estrazione di radice quadrata, otteniamo

(29) $$a^3.\sqrt{-27\Delta}=3z\,.\,(4t+u^2)\,.\sqrt{3u^2z-3(t-z)^2}\,.$$

Abbiamo per ciò ancora

$$27a^3.\left(-\mathrm{J}\pm\sqrt{-\frac{\Delta}{27}}\right)=3z\,.\,(t+z)\,(4t+3u^2)-8z^3-8t^3$$
$$\pm\,3z(4t+u^2)\sqrt{3u^2z-3(t-z)^2}=[z+t\pm\sqrt{3u^2z-3(t-z)^2}]^3$$

per cui, con estrazione di radice cubica, s'ottiene:

$$z+t+\sqrt{3u^2z-3(t-z)^2}=3a\sqrt[3]{-\mathrm{J}+\sqrt{-\frac{\Delta}{27}}}$$
$$z+t-\sqrt{3u^2z-3(t-z)^2}=3a\,.\sqrt[3]{-\mathrm{J}-\sqrt{-\frac{\Delta}{27}}}\,.$$

Mediante addizione, tenendo pur calcolo della prima (27), si ricava la (19).

Delle due radici cubiche se ne deve estrarre una sola, essendo

$$\sqrt[3]{-\mathrm{J}+\sqrt{-\frac{\Delta}{27}}}\,.\sqrt[3]{-\mathrm{J}-\sqrt{-\frac{\Delta}{27}}}=\sqrt[3]{\mathrm{J}^2+\frac{\Delta}{27}}=\frac{\mathrm{I}}{3}\,.$$

Basta ora estrarre la radice quadrata di z per avere la scomposizione indicata dalla (28') e quindi x, con altra estrazione di radice quadrata.

Il precedente calcolo si può render molto semplice, se si formi prima la risolvente (17): per questa, si ha infatti subito:

(30) $$\Delta=\mathrm{I}^3-27\mathrm{J}^2=\mathrm{I}^3-27\mathrm{V}^2.\,(\mathrm{I}-4\mathrm{V}^2)^2=(\mathrm{I}-12\mathrm{V}^2)^2\times(\mathrm{I}-3\mathrm{V}^2)\,.$$

da cui si ricava, con estrazione di radice quadrata,

$$\sqrt{-\frac{\Delta}{27}} = (\mathrm{I} - 12\mathrm{V}^2) \, . \sqrt{\frac{3\mathrm{V}^2 - \mathrm{I}}{27}}$$

per cui, tenendo ancora calcolo della (17), si trova pur subito

$$\text{(31)} \qquad -\mathrm{J} \pm \sqrt{-\frac{\Delta}{27}} = -4\mathrm{V}^3 + \mathrm{IV} \pm (\mathrm{I} - 12\mathrm{V}^2) \, . \sqrt{\frac{3\mathrm{V}^2 - \mathrm{I}}{27}}$$
$$= \left(-\mathrm{V} \mp \sqrt{\frac{3\mathrm{V}^2 - \mathrm{I}}{3}} \right)^3 .$$

Mediante estrazione di radice cubica otteniamo ora

$$-\mathrm{V} + \sqrt{\frac{3\mathrm{V}^2 - \mathrm{I}}{3}} = \sqrt[3]{-\mathrm{J} - \sqrt{-\frac{\Delta}{27}}}$$
$$-\mathrm{V} - \sqrt{\frac{3\mathrm{V}^2 - \mathrm{I}}{3}} = \sqrt[3]{-\mathrm{J} + \sqrt{-\frac{\Delta}{27}}} \, .$$

Addizionando queste e tenendo calcolo della (16), si ricade sulla (19).

A completare la risoluzione della (12), non occorrono quindi più che tre estrazioni di radice quadrata, come mostrano le (25).

Il valore di Δ espresso colle $t \ u \ z$ si può pur ottenere osservando che il determinante della (12) differisce solo per un fattor numerico da quello della sua risolvente (15), essendo precisamente

$$a^6\Delta = 16 \, . \, (z_1 - z_2)^2 . \, (z_1 - z_3)^2 . \, (z_2 - z_3)^2 = 16\Delta_z$$

come si riconosce subito applicando la (9) alla (15) per formare il Δ_z e ponendo Δ in luogo di $\mathrm{I}^3 - 27\mathrm{J}^2$.

Si ha, per es., relativamente al primo metodo

$$z_1 = z \qquad z_2 + z_3 = 2ztu \quad , \quad z_2 z_3 = \frac{z}{4}(t^2 + u^2 z)^2 \, .$$

$$a^6\Delta =$$
$$\left\{(2z - 2ztu - (t^2 - u^2z)\sqrt{-z})(2z - 2ztu + (t^2 - u^2z)\sqrt{-z})(t^2 - u^2z)\sqrt{-z}\right\}^2$$
$$= -z . \left\{4z^2 . (1 - tu)^2 + z . (t^2 - u^2z)^2\right\}^2 . (t^2 - u^2z)^2 .$$

Carattere delle radici della biquadratica.

Relativamente alla molteplicità ed alla forma delle radici di un'equazione del quarto grado, distingueremo i seguenti casi:

Con radici multiple.

$$\Delta = 0 \begin{cases} \left.\begin{array}{lll} \mathrm{J} = 0 & \mathrm{H} = 0 & \text{(Quattro eguali)} \\ \mathrm{J} = 0 & \mathrm{H} \neq 0 & \text{(Tre} \quad \text{»} \quad \text{)} \end{array}\right\} \text{reali} \\ \mathrm{J} \neq 0 \quad a^3\mathrm{J} = 8\mathrm{H}^3 \begin{cases} \mathrm{H} < 0 & \text{(Due doppie reali)} \\ \mathrm{H} > 0 & \text{(» » complesse)} \end{cases} \\ \mathrm{J} \neq 0 \quad a^3\mathrm{J} \neq 8\mathrm{H}^3 \begin{cases} \mathrm{H} < 0 \text{ ed } a^2\mathrm{I} < 12\mathrm{H}^2 & \text{(Due eguali; tutte reali)} \\ \mathrm{H} \geqq 0 \text{ od } a^2\mathrm{I} \geqq 12\mathrm{H}^2 & \text{(» » due compl.)} \end{cases} \end{cases}$$

Senza radici multiple.

$$\Delta < 0 \quad \text{(Due reali e due complesse)}$$

$$\Delta > 0 \begin{cases} \mathrm{H} < 0 \text{ ed } a^2\mathrm{I} < 12\mathrm{H}^2 & \text{(Quattro reali)} \\ \mathrm{H} \geqq 0 \text{ od } a^2\mathrm{I} \geqq 12\mathrm{H}^2 & \text{(» compl.)} \end{cases}$$

Infatti:

Perchè siano tutte uguali le radici della (12), è necessario e sufficiente che siano nulle tutte tre le quantità $z_1 \ z_2 \ z_3$, come mostrano le (21), ossia nulle G H I, come mostra la (15); per cui è necessario e sufficiente che siano nulle Δ J ed H, come si riconosce subito per l'ultima (2) e per la (18). In questo caso, per la (22), le radici della (12) sono tutte uguali a $-\frac{b}{a}$.

Perchè tre radici della (12) siano uguali fra loro e diverse dalla rimanente, è necessario e sufficiente che siano tutte uguali e diverse da zero le tre quantità $z_1 \ z_2 \ z_3$, come mostrano le (21), cioè sia $\mathrm{I} = 0$ $-\mathrm{G}^2 = 4\mathrm{H}^3 \neq 0$, come mostra la (15), od anche $\Delta = 0 = \mathrm{J} \neq \mathrm{H}$, come mostra l'ultima (2) con la (18). Per la (22), una radice della (12) è $\frac{1}{a}.(-b + 3\sqrt{-\mathrm{H}})$ e le rimanenti son tutte uguali a $-\frac{1}{a}.(b + \sqrt{-\mathrm{H}})$, dove deve essere $\mathrm{G}\sqrt{-\mathrm{H}} < 0$, per la (20). Essendo un quadrato $-\mathrm{H}^3$, perchè uguale a $\frac{\mathrm{G}^2}{4}$, è un quadrato anche $-\mathrm{H}$, per cui le radici sono tutte razionali nei coefficienti dell'equazione. Per ciò che fu detto, la radice semplice è pur data da $-\frac{1}{a} . \left(b + 3\sqrt[3]{\frac{\mathrm{G}}{2}}\right)$ e la tripla da $-\frac{1}{a}\left(b - \sqrt[3]{\frac{\mathrm{G}}{2}}\right)$.

Perchè si abbiano due coppie di radici uguali è necessario e sufficiente che siano nulle due delle quantità z_1 z_2 z_3 e non sia zero la rimanente, come si deduce dalle (21), cioè che siano nulle G $12H^2-a^2I$ e non sia nulla H, come mostra la (15); per cui è necessario e sufficiente che sia $\Delta=0$ ed $a^3J=8H^3\neq 0$, come si riconosce subito per la (18) e l'ultima (2). In questo caso, la (12) ha due radici uguali ad $\frac{1}{a}\cdot(-b+\sqrt{-3H})$ e le rimanenti uguali ad $\frac{1}{a}(-b-\sqrt{-3H})$.

Perchè si abbiano due radici uguali, e diseguali dalle rimanenti, è necessario e sufficiente che vi siano radici uguali e non si verifichi nessuno dei primi tre casi per cui è necessario e sufficiente che sia $\Delta=0$ $J\neq 0$ $a^3J\neq 8H^3$. In questo caso debbono essere uguali, e diverse da zero, due delle quantità z_1 z_2 z_3, come si deduce subito dalle (21). Essendo $\Delta=0$, e per l'ultima relazione (2), è:

$$J^2=\left(\frac{I}{3}\right)^3 \qquad -H-a\sqrt[3]{J}=\frac{G^2}{4\,.\,(-H+\frac{a}{2}\sqrt[3]{J})^2}$$

per cui $\sqrt[3]{J^2}$ epperò anche $\sqrt[3]{J}$ e $\sqrt{-H-a\sqrt[3]{J}}$ sono razionali nei coefficienti della (12); per ciò, come nei casi prec. s'è pur visto, in accordo con la teoria delle radici razionali, ancora $\frac{1}{a}\cdot(-b+\sqrt{-H+a\sqrt[3]{-J}})$, che è la radice doppia unica dell'equazione (12), è razionale nei coefficienti di questa.

Siccome una radice d'un'equazione a coefficienti reali, la quale sia sola del suo grado di molteplicità, è necessariamente reale, anzi è razionale nei coefficienti; così sono reali nei casi 1° e 2° le radici della (12) e sono reali quelle della (15) anche nei casi 3° e 4°: in questi casi, perchè siano tutte reali le radici della (12), ossia, per le (21), tutte positive quelle della (15), è necessario e sufficiente che non sia negativa nessuna delle quantità $-H$ $12H^2-a^2I$: questa doppia condizione, infatti, è soddisfatta evidentemente se sono tutte positive le radici della (15) ed, inversamente, se è soddisfatta, l'equazione (15) non può aver radici negative perchè il suo primo membro allora non ha che termini negativi per z negativa.

Quando Δ non è nullo, le radici sono tutte diseguali, per la (18), per la quale si riconosce pure subito che due radici sono reali e due complesse quando è $\Delta<0$; e sono invece o tutte reali o tutte complesse quando è $\Delta>0$. Per distinguere gli ultimi due casi, basta ricordare quanto fu detto pei casi 3° e 4°.

Resta così dimostrata l'esattezza del quadro dato per il carattere delle radici della biquadratica.

Quando siano già formate le (15) e (17), il semplice esame dei coefficienti farà conoscere se abbia luogo uno dei primi tre casi: per decidere nei casi rimanenti basterà formare ancora il discriminante, che s'ottiene subito coi coefficienti della (17).

Come risulta dai fatti ragionamenti, i casi considerati per le radici dell'equazione di quarto grado si possono pur riferire alla natura delle radici della sua risolvente così:

Biquadratica (12).	*Risolvente* (15).
Quattro uguali.	Tre nulle.
Tre uguali.	Tre uguali non nulle.
Due doppie { reali.	Due nulle ed una { positiva.
Due doppie { complesse.	Due nulle ed una { negativa.
Una doppia, reale, con due diverse { reali.	Una doppia { positiva.
Una doppia, reale, con due diverse { complesse.	Una doppia { negativa.
Due compl. e due reali, tutte div.	Due complesse.
Quattro reali differenti.	Tre positive diverse.
Quattro complesse differenti.	Una positiva e due neg. diverse.

Invarianti irrazionali.

Le radici della risolvente (15) dipendono molto semplicemente dagli invarianti irrazionali della biquadratica, denotati da Klein con $\mathsf{A}\ \mathsf{B}\ \Gamma$. Infatti, mediante la sostituzione $12V=W$, la (17) trasformasi in equazione cubica che ha questi tre invarianti per radici: tenendo conto delle (16) e (19), si ha quindi subito:

$$(32)\quad \begin{cases} \mathsf{A}=12V_1=-12.\frac{z_1+H}{a}=2.\left\{\sqrt[3]{27J+\sqrt{-27\Delta}}+\sqrt[3]{27J-\sqrt{-27\Delta}}\right\}=6\left(R+\frac{I}{3R}\right). \\ \mathsf{B}=12V_2=-12.\frac{z_2+H}{a}=6\left(\omega R+\frac{\omega^2 I}{3R}\right) \qquad R=\sqrt[3]{J-\sqrt{-\frac{\Delta}{27}}} \\ \Gamma=12V_3=-12.\frac{z_3+H}{a}=6\left(\omega^2 R+\frac{\omega I}{3R}\right) \end{cases}$$

Si ha quindi per gli invarianti irrazionali denotati con A B C dal Klein [1]

$$(33)\quad \begin{cases} \mathrm{A}=\frac{1}{3}(-\mathrm{B}+\Gamma)=\frac{4}{a}.(z_2-z_3) \qquad \mathrm{B}=\frac{1}{3}(-\Gamma+\mathrm{A})=\frac{4}{a}.(z_3-z_1) \\ \mathrm{C}=\frac{1}{3}.(-\mathrm{A}+\mathrm{B})=\frac{4}{a}.(z_1-z_2)\,. \end{cases}$$

Forme canoniche.

Eliminando $p\ q\ r\ s$ dalla

$$u=\frac{px+q}{rx+s}$$

presa insieme con le tre uguaglianze che s'ottengono da essa ponendovi successivamente u_0 ed x_0, u_1 ed x_1, u_2 ed x_2 in luogo di u ed x, si ottiene l'equazione

$$(34)\qquad \begin{vmatrix} x & 1 & ux & u \\ x_0 & 1 & u_0x_0 & u_0 \\ x_1 & 1 & u_1x_1 & u_1 \\ x_2 & 1 & u_2x_2 & u_2 \end{vmatrix}=0$$

che, risolta per u, dà [2]:

$$(34')\qquad u=\frac{u_0u_1\cdot\frac{x-x_2}{(x_0-x_2)(x_1-x_2)}+u_0u_2\frac{x-x_1}{(x_0-x_1)(x_2-x_1)}+u_1u_2\frac{x-x_0}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)}}{u_0\cdot\frac{x_0-x}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+u_1\frac{x_1-x}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+u_2\frac{x_2-x}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}}\,.$$

Questa relazione lega univocamente le variabili u ed x in modo che la u prenda i valori $u_0\ u_1\ u_2$ quando la x prende i valori $x_0\ x_1\ x_2$, rispettivamente. Per mezzo della medesima calcoleremo quelle tre semplicissime trasformate, o forme canoniche, della quartica binaria, le quali sono usualmente considerate nella teoria delle funzioni ellittiche.

---

[1] V. Felix Klein, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen, Ausgearbeiteit und vervolständigt von* R. Fricke; Leipzig, 1890, pag. 12 e 7.

[2] È un caso particolare di una notevole formula d'interpolazione di Cauchy; V. *Analyse algébrique*, 1821, pag. 529.

Se nella (34') poniamo 0 1 ∞, una volta in luogo di $u_0\ u_1\ u_2$ ed un'altra volta in luogo di $x_0\ x_1\ x_2$, otteniamo le

$$(35)\qquad u=\frac{x_1-x_2}{x_1-x_0}\cdot\frac{x-x_0}{x-x_2} \qquad\qquad u=\frac{(u_0-u_1)u_2x+u_0(u_1-u_2)}{(u_0-u_1)x+u_1-u_2}$$

che si potevano anche formare immediatamente.

Indicando con

$$y_1\ \ y_2\ \ y_3\ \ y_4$$

le radici della

$$(12')\qquad y^4+6\mathrm{H}y^2+4\mathrm{G}y+a^2\mathrm{I}-3\mathrm{H}^2=0$$

e con

$$\mathrm{X}_1\ \ \mathrm{X}_2\ \ \mathrm{X}_3\ \ \mathrm{X}_4$$

le corrispondenti radici della trasformata che s'ottiene con la sostituzione

$$(35')\qquad \mathrm{X}=\frac{y_1-y_3}{y_2-y_3}\cdot\frac{y-y_2}{y-y_1}$$

si trova subito $\quad \mathrm{X}_1=\infty \qquad \mathrm{X}_2=0 \qquad \mathrm{X}_3=1$

e, per le (21) e (33), si trova pure facilmente:

$$(36)\quad \mathrm{X}_4=\frac{y_1-y_3}{y_2-y_3}\cdot\frac{y_4-y_2}{y_4-y_1}=\frac{\sqrt{z_1}+\sqrt{z_3}}{\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}}\cdot\frac{\sqrt{z_3}-\sqrt{z_1}}{-\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}}=\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=-\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}$$

per cui la trasformata è

$$(37)\qquad \mathrm{X}.(\mathrm{X}-1).(\mathrm{CX}+\mathrm{B})=0\,.$$

Trasformiamo ora questa con la

$$\mathrm{Y}=\frac{(\mathrm{V}_1-\mathrm{V}_2)\mathrm{V}_3\mathrm{X}+(\mathrm{V}_3-\mathrm{V}_1)\mathrm{V}_2}{(\mathrm{V}_1-\mathrm{V}_2)\mathrm{X}+\mathrm{V}_3-\mathrm{V}_1}$$

dove $\mathrm{V}_1\ \mathrm{V}_2\ \mathrm{V}_3$ sono le radici della (17). Indicando con $\mathrm{Y}_1\ \mathrm{Y}_2\ \mathrm{Y}_3\ \mathrm{Y}_4$ le radici della trasformata, corrispondenti alle radici ∞ 0 1 X_4 della (37), trovasi immediatamente

$$\mathrm{Y}_1=\mathrm{V}_3 \qquad \mathrm{Y}_2=\mathrm{V}_2 \qquad \mathrm{Y}_3=\mathrm{V}_1$$

e, per la (16) e la (36), trovasi pure subito

$$\mathrm{Y}_4=\frac{(z_1-z_2)(z_3+\mathrm{H})(z_3-z_1)+(z_3-z_1)(z_2+\mathrm{H})(z_2-z_1)}{(z_2-z_1).(z_3-z_1)+(z_1-z_3).(z_2-z_1)}=\infty\,.$$

La trasformata non è dunque altro che la (17) coll'aggiunta d'una radice infinita per cui, nella forma non omogenea, non si distingue dalla (17) medesima; essa è

$$(38)\qquad 4\mathrm{Y}^3-\mathrm{IY}-\mathrm{J}=0\,.$$

Le trasformate in X ed Y si potevano ottenere con estrema facilità osservando che la (34) stabilisce semplicemente una corrispondenza proiettiva tra le variabili u ed x la qual cosa, interpretata geometricamente, significa essere il rapporto anarmonico di quattro punti u eguale a quello dei corrispondenti punti x; cosicchè per le nostre trasformate, indicando con λ il rapporto anarmonico dei quattro punti $y_1\ y_2\ y_3\ y_4$, ossia delle quattro radici $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ della (12), si ha

$$\lambda = (y_1\ y_2\ y_3\ y_4) = (\infty\ \ o\ \ 1\ \ X_4) = (V_3\ V_2\ V_1\ Y_4)$$

da cui segue appunto

$$(36')\qquad X_4 = \lambda = \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} \cdot \frac{y_4 - y_2}{y_4 - y_1}$$

$$Y_4 = \frac{(V_1 - V_2)V_3X_4 + (V_3 - V_1)V_2}{(V_1 - V_2)X_4 + (V_3 - V_1)} .$$

Ci varremo di quest'osservazione per calcolare una terza trasformata. Dall'equazione

$$\lambda = \left(Z;\ -Z;\ \frac{1}{Z},\ -\frac{1}{Z}\right)$$

deducesi

$$Z^2 = \frac{1 + \sqrt{\lambda}}{1 - \sqrt{\lambda}}$$

per cui, eseguendo sulla (37) la sostituzione lineare che si ottiene dalla seconda (35) ponendovi $Z\ X$ $\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{\lambda}}{1-\sqrt{\lambda}}}\ \ -\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{\lambda}}{1-\sqrt{\lambda}}}\ \ \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{\lambda}}{1+\sqrt{\lambda}}}$ in luogo di $u\ x\ u_0\ u_1\ u_2$, otterremo la trasformata

$$(39)\qquad \left(Z^2 - \frac{1+\sqrt{\lambda}}{1-\sqrt{\lambda}}\right) \cdot \left(Z^2 - \frac{1-\sqrt{\lambda}}{1+\sqrt{\lambda}}\right) = Z^4 - 2 \cdot \frac{1+\lambda}{1-\lambda} Z^2 + 1 = 0 .$$

Ridotti omogenei i primi membri delle (37) (38) (39), col porvi $\dfrac{x_1}{x_2}$ in luogo di X Y Z e moltiplicare per x_2^4, divengono

$$(37')\qquad x_2 \cdot x_1 \cdot (x_1 - x_2) \cdot (Cx_1 + Bx_2).$$

$$(38')\qquad x_2 \cdot (4x_1^3 - Ix_1x_2^2 - Jx_2^3)$$

$$(39')\qquad \left(x_1^2 - \frac{1+\sqrt{\lambda}}{1-\sqrt{\lambda}} x_2^2\right) \cdot \left(x_1^2 - \frac{1-\sqrt{\lambda}}{1+\sqrt{\lambda}} x_2^2\right) .$$

La quartica binaria

$$f(x_1,\ x_2) = f = (a,\ b,\ c,\ d,\ e)\,(x_1,\ x_2)^4$$

può dunque trasformarsi identicamente, mediante sostituzioni lineari conosciute, in ciascuna delle (37') (38') (39') dove λ, come fu detto, è

il rapporto anarmonico dei quattro punti nulli della $f(x, 1)$, in un certo ordine, ed è, per (36) e (32),

$$(40)\qquad \lambda = -\frac{B}{C} = \frac{A - \Gamma}{A - B} = \frac{-3\omega R^2 + I}{3R^2 - \omega I} \qquad R = \sqrt[3]{J - \sqrt{-\frac{\Delta}{27}}} .$$

La f si trasforma, per es., nella (37'), ricorrendo alle (35') ed (1), precisamente mediante la sostituzione inversa della

$$x_1' = \rho(y_1 - y_3) \cdot [ax_1 + (b - y_2)x_2]$$
$$x_2' = \rho(y_2 - y_3) \cdot [ax_1 + (b - y_1)x_2]$$

dove ρ è una costante da determinarsi in modo che la trasformazione riesca identica. Importa specialmente conoscere i determinanti delle sostituzioni: potremmo ottenerli operando direttamente la trasformazione; ma preferiamo calcolarli per mezzo della

$$J \cdot I' = r^2 \cdot J' \cdot I$$

dove I J ed I' J' sono gli invarianti, razionali, delle forme f ed f' ed r è il modulo della sostituzione lineare che conduce da f ad f'.

Per la (37'), che, per le (32) (33) (17), si può scrivere

$$4(V_2 - V_1)x_1^3x_2 + 12V_1x_1^2x_2^2 + 4(V_3 - V_1)x_1x_2^3$$

si trova subito

$$I' = 4(V_2 - V_1)(V_1 - V_3) + 12V_1^2 = 4 \cdot [(V_2 - V_1)(V_1 - V_3) + 3V_1^2$$
$$- 2V_1(V_1 + V_2 + V_3)] = -4(V_1V_2 + V_2V_3 + V_3V_1) = I$$
$$J' = 4V_1 \cdot [(V_2 - V_1)(V_3 - V_1) - 2V_1^2 + V_1(V_1 + V_2 + V_3)] = 4V_1V_2V_3 = J$$

epperò è

$$r^2 = 1 .$$

Per la (38') si trova immediatamente ancora

$$r^2 = 1 .$$

Per la (39') si trova che il quadrato del modulo è $-\dfrac{4}{B+C}$. Se vogliamo che il modulo sia ± 1, il che può esser utile, moltiplicheremo essa (39') per $-\dfrac{B+C}{4}$; per le (40) (32) e (33), otteniamo così la

$$(39'')\qquad \left\{ \begin{aligned} & -\frac{B+C}{4} \cdot \left(x_1^4 - 2 \cdot \frac{1+\lambda}{1-\lambda} x_1^2x_2^2 + x_2^4\right) \\ & = (V_3 - V_2)x_1^4 - 6V_1x_1^2x_2^2 + (V_3 - V_2)x_2^4 . \end{aligned} \right.$$

Per questa troviamo infatti

$$I' = (V_3 - V_2)^2 + 3V_1^2 = (V_3 - V_2)^2 + 3V_1^2 - (3V_1 + V_2 + V_3) \cdot (V_1 + V_2 + V_3)$$
$$= -4(V_1V_2 + V_2V_3 + V_3V_1) = I$$
$$J' = -V_1[(V_2 - V_3)^2 - V_1^2] = -V_1 \cdot [(V_2 - V_3)^2 - (V_2 + V_3)^2] = 4V_1V_2V_3 = J$$

epperò è

$$r^2 = 1 .$$

La quartica binaria f si può dunque trasformare identicamente in ciascuna delle (37') (38') (39") mediante sostituzioni lineari di modulo ± 1.

Osserveremo infine che, eguagliando l'invariante assoluto $\frac{I^3}{J^2}$ della (12) a quello della (39), si trova:

$$\frac{I^3}{J^2} = 108 \cdot \frac{(1-\lambda+\lambda^2)^3}{(1+\lambda)^2 . (\lambda-2)^2 . (2\lambda-1)^2} . \tag{41}$$

Questa è l'equazione che lega i sei rapporti anarmonici dei quattro punti nulli d'una quartica all'invariante assoluto, $I^3 : J^2$, della medesima. Si trasforma in quella di Clebsch [1], ponendovi

$$2I = i \qquad 6J = j \qquad \lambda = \frac{1}{\alpha}$$

ed in quella di Klein [2], ponendovi $27J : (J-1)$ in luogo di J, essendo il J di Klein eguale ad $I^3 : \Delta$.

Errata. — Nel determinante a pag. 193 il secondo elemento della prima verticale e l'ultimo elemento della penultima verticale sono $a_{n-1}y$.

Soluzione algebrica dell'equazione

$$0 = x - \cfrac{1}{x - \cfrac{1}{x - \ddots - \cfrac{1}{x}}} .$$

Nota di V. Mollame.

Teorema I. — *Siano a ed a' due quantità reali che soddisfino l'equazione*

$$a^2 + a'^2 = 1 . \tag{1}$$

Nella serie

$$a', \; a'_2, \; a'_3, \ldots \tag{2}$$

sia ogni termine legato ai due che lo precedono mediante la relazione

$$a'_k = 2aa'_{k-1} - a'_{k-2} \qquad k = 2, 3, \ldots, \tag{3}$$

nella quale è da supporsi $a'_1 = a'$: si avrà allora che il termine a'_n $(n > 1)$ di quella serie è nullo ogni volta, soltanto, che a sia la parte reale d'una radice complessa 2n.esima *dell'unità reale positiva.*

---

[1] V. *Leçons sur la Géométrie* recueillies et complétées par Ferdinand Lindemann. Paris, 1879, pag. 284-85 e 297.

[2] *Vorlesungen über die Theorie der ell. Modulfunctionen* ...., pag. 15.

In fatto, posto

$$(a + a'i)^k = b_k + b'_k i \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

dove $i = (-1)^{\frac{1}{2}}$, si ha che

$$(a_k + a'_k i)^k = (b_{k-1} + b'_{k-1})(a + a'i) :$$

e dal confronto dei secondi membri dell'uguaglianza (4) con la precedente risultano le relazioni

$$b_k = ab_{k-1} - a'b'_{k-1}$$
$$b'_k = ab'_{k-1} - a'b_{k-1} ;$$

dalle quali facilmente si ricava l'altra relazione

$$b'_k = 2ab'_{k-1} - (a^2 + a'^2)b_{k-2} ,$$

che, in virtù dell'equazione (1), diviene

$$b'_k = 2ab'_{k-1} - b'_{k-2} . \tag{5}$$

La precedente relazione ha la stessa forma della (3): e siccome dalla (4) si ha pure che $b'_0 = 0$ e $b'_1 = a'$, così i termini della serie b'_1, b'_2, b'_3 ecc. calcolati mediante la relazione (5) non differiscono da quelli corrispondenti della serie (2). Si può quindi nelle relazioni (4) e (5) sostituire a'_k a b'_k e cambiare poi nella (4), per comodità di scrittura, b_k in a_k: dopo ciò le dette relazioni divengono, rispettivamente, la seguente

$$(a + a'i)^k = a_k + a'_k i \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

e la relazione (3).

Ciò posto, se si vuole che nella serie (2) risulti $a'_n = 0$ $(n > 1)$, dovrà la relazione (6) per $k = n$ ridursi all'altra

$$(a + a'i)^n = a_n \tag{7}$$

e, viceversa, se la precedente relazione è verificata, allora la (6) per $k = n$ mostra che nella serie (2) è $a'_n = 0$.

Dunque affinchè sia nullo il termine a'_n $(n > 1)$ della serie (2) è necessario e sufficiente che il termine iniziale a' di quella serie e la quantità a soddisfino l'equazione (7), oltre l'equazione (1).

Dall'uguaglianza delle norme, $(a^2 + a'^2)^n$ ed a_n^2, dei due membri della (7) e dall'equazione (1) si deduce che $a_n^2 = 1$ e che quindi $a_n = \pm 1$. Laonde l'equazione (7) diviene

$$(a + a'i)^n = \pm 1 ,$$

e questa mostra che a è la parte reale di $a+a'i$, che è dell'equazione binomia

$$z^{2n}=1 \tag{8}$$

una radice complessa, essendosi supposto $a'_1(=a')$ diversa da zero.

C. D. D.

Se $a+a'i$ è una radice primitiva dell'equazione (8) allora nella serie (2) sarà a'_n il primo dei termini nulli: ma se $a+a'i$ non è radice primitiva dell'equazione (8) sibbene dell'equazione

$$z^{\frac{2n}{\nu}}=1$$

si avrà
$$(a+a'i)^{\frac{2n}{\nu}}=1$$
cioè
$$(a+a'i)^{\frac{n}{\nu}}=\pm 1:$$
ma
$$(a+a'i)^{\frac{n}{\nu}}=a_{\frac{n}{\nu}}+a'_{\frac{n}{\nu}}i,$$

dunque $a'_{\frac{n}{\nu}}=0$ e quindi il primo termine che si annulla nella serie (2) è $a'_{\frac{n}{\nu}}$, ed a'_n è il ν.*esimo* dei termini nulli.

TEOREMA II. — *L'equazione.*

$$0=x-\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x-\ddots-\cfrac{1}{x}}} \tag{9}$$

dove l'incognita x si suppone scritta $n-1$ volte, ha per radici le parti reali, moltiplicate per 2, delle radici complesse dell'equazione binomia

$$z^{2n}=1.$$

La relazione (3) mostra che due termini consecutivi della serie (2) non possono essere insieme nulli; altrimenti tutti gli altri termini precedenti quelli, e quindi il primo, dovrebbero esser nulli: mentre si è invece supposto a' non $=$ zero.

Dalla stessa relazione (3) si ha pure che

$$\frac{a'_2}{a'}=2a \tag{10}$$

e che

$$\frac{a'_k}{a'_{k-1}}=2a-\cfrac{1}{\cfrac{a'_{k-1}}{a'_{k-2}}}$$

da quest'ultima si ricava che

$$\frac{a'_n}{a'_{n-1}}=2a-\cfrac{1}{2a-\cfrac{1}{2a-\ddots-\cfrac{1}{2a-\cfrac{1}{\cfrac{a'_2}{a'_1}}}}}.$$

cioè, avuto riguardo alla (10),

$$\frac{a'_n}{a'_{n-1}}=2a-\cfrac{1}{2a-\cfrac{1}{2a-\ddots-\cfrac{1}{2a}}}, \tag{11}$$

dove la quantità $2a$ è da scriversi $n-1$ volte.

Se la quantità a è la parte reale di una radice complessa dell'equazione (8), allora, in virtù del teorema I, è $a'_n=0\,(n>1)$ e però, in tal caso, il primo membro della (11) si ridurrà a zero e sarà $2a$ una radice dell'equazione (9). La quale perciò ha per radici le parti reali, moltiplicate per 2, delle radici complesse dell'equazione binomia (8), che è risolubile algebricamente.

C. D. D.

Le radici complesse dell'equazione (8) sono $2n-2$, e siccome esse sono a due a due coniugate, così le differenti parti reali di tali radici sono soltanto $\frac{2n-2}{2}$ cioè $n-1$: l'equazione (9) è perciò di grado $n-1$. Oltre a ciò le dette radici sono pure a due a due uguali e di segni contrarii: per la qual cosa l'equazione (9) deve avere solo le potenze pari di x se n è dispari, oppure se, nell'ipotesi di n pari, si sopprime da quella equazione la radice $x=0$ corrispondente alla radice $\pm i$ dell'equazione (8).

Le $n-1$ differenti parti reali delle radici complesse dell'equazione (8) sono, come è noto, i coseni degli archi

$$\frac{\pi}{n},\quad \frac{2\pi}{n},\quad \ldots,\quad \frac{(n-1)\pi}{n}$$

e però
$$x=2\cos\frac{k\pi}{n}$$
$$k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$$

è la soluzione trigonometrica dell'equazione (9).

Catania, Novembre 1892.