# RIVISTA

DI

# MATEMATICA

EDITA

DA

**G. PEANO**

Professore di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino.

Volume III



TORINO
FRATELLI BOCCA
LIBRAI DI S. M.

1893

# INDICE.

RIVISTA DI MATEMATICA

**Vol. III. — 1893**

## Sulla raccolta di formule.

Al presente fascicolo va unito il 1° foglio della raccolta di formule e di teoremi di matematica, della quale raccolta si è già parlato nella *Rivista,* vol. II, in un supplemento al fascicolo 3°, a pag. 76 e 112.

Un buon numero di collaboratori si è già diviso il lavoro della raccolta e coordinazione delle varie parti del formulario.

I lettori, che troveranno aggiunte o correzioni da fare a queste formule, sono pregati di inviarle a chi si assunse la compilazione della parte a cui si riferisce l'aggiunta, o direttamente, o per mezzo della direzione della *Rivista.* Queste aggiunte verranno pubblicate col nome del proponente.

I varii capitoli del formulario si seguiranno man mano saranno pronti; e sono dati come supplemento alla *Rivista.*

La Redazione.

I.

La parte I contiene le formule di logica matematica; i §§ 1-4 contengono le formule già pubblicate nella *Rivista* (vol. I, pag. 24-31) colle correzioni ed aggiunte indicate a pag. 182-4. Le formule più importanti sono segnate con asterisco. Per schiarimenti su queste formule si veda il vol. I della *Rivista.* Si è aggiunto il § 5 contenente le proprietà delle funzioni o corrispondenze, perchè da un certo punto di vista esse appartengono più alla logica che alla matematica.

G. Vailati, *R. Università, Torino.*

II.

La parte II della *Raccolta* contiene le formule che si riferiscono alle operazioni algebriche. La numerazione in certi punti è interrotta e potrà essere completata dalle aggiunte che i lettori della *Rivista* vorranno fare. I segni delle operazioni sono quelli comunemente usati; i segni logici sono quelli adoperati negli articoli di *Logica* già pubblicati nella *Rivista.*

Le note storiche usciranno in un prossimo fascicolo.

F. Castellano, *Accademia Militare, Torino.*

*Indice.*



---

## Spiegazione dei segni.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Il segno | $=$ | significa | *è eguale* [I § 1, § 4 P 2]. |
| » | $\supset$ | » | *si deduce*, o, *è contenuto* [I § 1, § 4 P 1]. |
| » | $\cap$ | » | *e* (ed è generalmente sottinteso). |
| » | $\cup$ | » | *o* [I § 2]. |
| » | $-$ | » | *non* [I § 2]. |
| » | $\Lambda$ | » | *assurdo* o *nulla* [I § 3]. |
| » | V | » | *vero*. (Esso è usato, per ragioni di simmetria, solo in I § 3). |
| » | $\circ$ | | fra due proposizioni o classi, $a \circ b$, ha il significato del latino *aut*. (Esso è usato solo in I § 3, P 24-30). |
| » | $\varepsilon$ | significa | *è, è un* [I § 4]. |
| » | K | » | *classe*. Quindi Kq vale *classe di numeri reali* [I § 4]. |
| » | $\iota$ | » | *eguale*. Quindi $\iota 0$ significa *eguale a 0*, o *nullo*. |
| » | $b \vert a$ | » | *funzione*, o segno di operazione, che trasforma gli $a$ in $b$ [I § 5, P 1-2]. |
| » | $f$ | » | la funzione *inversa* della $f$ [I § 5, P 21]. |
| » | $(b \vert a)$sim | » | funzione *simile*, o corrispondenza univoca e reciproca degli $a$ in $b$. |
| » | P | » | *proposizione*. |
| » | Pp | » | *proposizione primitiva*, che non si dimostra. |
| » | Hp | » | *ipotesi*. |
| » | Ts | » | *tesi*. |
| » | $\binom{a}{b}$ | | davanti ad una proposizione, indica ciò che essa diventa sostituendo $b$ ad $a$. |



| | | | |
|---|---|---|---|
| Il segno | N | significa | *numero intero positivo*. |
| » | $N_0$ | » | *numero intero positivo* o *nullo*. |
| » | n | » | *numero intero*. |
| » | Q | » | *numero reale positivo*. |
| » | $Q_0$ | » | *numero reale positivo* o *nullo*. |
| » | q | » | *numero reale*. |
| » | q′ | » | *numero immaginario* o *complesso* ordinario [II § 9]. |
| » | mod $a$ | » | *il valor assoluto di a*, o *il modulo di a* [II § 1 P 41, § 9 P 7]. |
| » | $\vert a$ | » | *il reciproco di a*. Quindi $b\vert a = b \times (\vert a) = \frac{b}{a}$. |
| » | $Z_m$ | » | l'insieme dei numeri 1, 2, 3, ... $m$ [II § 1 P 51]. |
| » | $Z(p, q)$, | | ove $p$ e $q$ siano interi e $p<q$ rappresenta l'insieme degli interi $p, p+1, \ldots q-1, q$ [II § 1 P 56]. |
| » | $\sqrt[n]{{}^*a}$, ovvero $a^{*\vert n}$, | | rappresenta le $n$ radici *algebriche* di $a$. |

**Nota.** — Ecco alcuni esempi sul segno di funzione.

| | | |
|---|---|---|
| q\|q | significa | *funzione reale di variabile reale*. |
| q\|Q | » | *funzione reale di variabile positiva*. |
| q\|$u$ | ove $u \, \varepsilon \,$Kq, significa | *funzione reale definita per tutti i valori della variabile appartenenti alla classe u*. |
| q\|N | significa | *serie a termini reali*. |
| Q\|N | » | *serie a termini positivi*. |
| q\|$Z_m$ | » | *successione di m quantità*. |
| ($Z_m$\|$Z_m$) sim | » | *permutazione dei numeri* 1, 2, ... *m*. |

Se $f \, \varepsilon \, q|Z_m$, le quantità che corrispondono, in questa corrispondenza $f$, ai numeri 1, 2, 3, ... si indicano con $f1, f2, f3, \ldots$ (È inutile usare le parentesi, $f(1), f(2), \ldots$, perchè esse non recano alcun vantaggio). Talvolta i valori della variabile si scrivono come indice: così $b \, \varepsilon \, N|Z_m$ si può leggere « sia $b$ una successione di $m$ numeri interi » ovvero « siano $b_1, b_2 \ldots b_m$ dei numeri interi ».

---

## Note alle formule di logica.

### § 1.

P. 2. Leibnitii. *Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis* (Ed. Erdmann, p. 95):

« Si idem secum ipso sumatur nil constituitur novum ».

P. 6. G. Boole. *Mathematical Analysis of Logic*, 1847, p. 17:

« If from a group of objects we select the X's we obtain a class of wich all the members are X's: if we repeat the operation on this class no further change will ensue: in selecting the X's we take the whole. Thus we have: $xx = x$, $x^2 = x$, $x^n = x$ ».

P. 7. Id. « It is indifferent in what order two successive acts of selection are performed. The symbolical expression of this law is: $xy = yx$ ».

P. 11, 30, 36, 40. Ch. Peirce. *On the Algebra of Logic. American Journal of Mathematics*, 1880, 1884.

13. Aristotelis *Analyt. Pr.* L. I, cap. IV:

Εἰ τὸ Α κατὰ παντὸς τοῦ Β, καὶ τὸ Β κατὰ παντὸς τοῦ Γ, ἀνάγκη καὶ τὸ Α κατὰ παντὸς τοῦ Γ κατηγορεῖσθαι.

Id. *De Sophist. Elench.*, cap. XXXIV:

Τῆς τοιαύτης πραγματείας [τῆς συλλογιστικῆς] οὐ τὸ μὲν ἦν, τὸ δ' οὐκ ἦν προειργασμένον· ἀλλ' οὐδὲν παντελῶς ὑπῆρχε — περὶ δὲ τοῦ συλλογίζεσθαι παντελῶς οὐδὲν εἴχομεν πρότερον λέγειν ἄλλο, ἀλλὰ τριβὴν ζητοῦντες πολὺν χρόνον ἐπονοῦμεν.

P. 33. Leibnitii. *Difficultates quaedam logicae:*

« Omne A est B, idest: equivalent A et AB ».

### § 2.

P. 3. J. A. Segner. *Specimen logicae universaliter demonstr.*, 1740:

« Si $x$ ponatur pro *non triangulo*, $-x$ erit *triangulum* » (J. Venn., *Symbolic Logic*, 1881, p. 184).

P. 6, 7, 8. Aug. De Morgan (*Cambridge Phil. Transactions*, 1858):

« Thus (A, B) et AB have $ab$ and $(a, b)$ for contraries » (*).

P. 16. Leibnitii. *Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis:*

« A + B = C significat A inesse vel contineri a C etsi A et B habeant aliquid commune ita ut ambo simul sumpta sint majora ipso C ».

(*) $[(A, B) = a \cup b\ ;\ \ a = -A]$.



P. 18, 19, 22, 32-4. Boole, op. cit., p. 16:

« It is indifferent whether from a group of objects considered as a whole we select the class X or whether we divide the group into two parts, select the X's from them separately and then connect the results. We may express this law by the equation $x(u+v) = xu + xv$ ».

P. 24-9. Ch. Peirce. *Three papers on Logic. Journal of speculative Philosophy* (1868).

### § 3.

P. 1. Aristotelis. *Analyt. Post.*, lib. I, cap. 11:

Τὸ δὲ μὴ ἐνδέχεσθαι ἅμα φάναι καὶ ἀποφάναι οὐδεμία λαμβάνει ἀπόδειξις.

P. 3. Id. *Categoriae*, VIII, 21:

Ἐπὶ δέ γε τῆς καταφάσεως καὶ τῆς ἀποφάσεως ἀεὶ ἐάν τε ᾖ, ἐάν τε μὴ ᾖ, τὸ μὲν ἕτερον ἔσται ψευδὲς τὸ δὲ ἕτερον ἀληθές.

Galeni. *Therapeut.*, lib. I, cap. IV, 10 (cfr. Prantl. Geschichte der Logik im Abendlande):

Περὶ παντὸς ἀναγκαῖον ἢ ἀποφάσκειν ἢ καταφάσκειν.

P. 8. Leibnitii. *Difficultates quaedam logicae* (Ed. Erdmann, p. 105):

« Omne A est B seu A non B est non ens. Nullum A est B seu AB est non ens ».

P. 9, 15-18. G. Boole. *An investigation of the laws of thought*, 1854.

19. A. De Morgan. *Formal Logic*, 1847, p. 278.

P. 22. E. Schröder. *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, Bd. II, 1891, S. 280-1.

P. 24-30. J. Hauber. *Scholae logico-mathematicae*, 1820.

### § 5.

3. R. Dedekind. *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig, 1888, n. 21. — 5. Id. n. 22. — 9. Id. n. 23. — 10. Id. n. 24. — 12-14. Id. n. 25. — 21. Id. n. 26. — 24. Id. n. 27. — 25. Id. n. 28. — 26. Id. n. 29. — 28. Id. n. 31.

*Rivista di Matematica*, 1891, p. 24-31, 182-184.

# *PRO VERITATE*

## Risposta alle « Osservazioni » del prof. E. Pascal

*di* GINO LORIA.

Alieno per indole da polemiche di ogni sorta, non avrei fatta alcuna replica alle *Osservazioni* (¹) che il prof. E. Pascal diresse contro il mio lavoro sopra *Nicola Fergola e la scuola di matematici che lo ebbe a duce* (²). Ma il timore che taluno dei lettori della *Rivista,* giudicandomi in base alle parole di lui, mi considerasse come persona a cui l'orgoglio di poter presentare a' suoi contemporanei cosa dimenticata (³) offuscasse la facoltà di rettamente giudicare, a cui l'ammirazione per le produzioni vetuste facesse tenere in ingiusto dispregio quelle moderne (⁴), mi consiglia a scrivere qualche linea di auto-difesa capace di dimostrare essere io in diritto di proclamarmi innocente da tali colpe.

***

Anzitutto una dichiarazione. Quando io vedo un uomo emettere e sostenere, sia con le opere, sia dalla cattedra, delle idee sue e vedo un gruppo di persone abbracciarle ed assumerle come regolatrici della loro vita intellettuale, io dico che queste persone costituiscono una

(¹) V. questa *Rivista,* vol. II, p. 179-186.
(²) Questo trovasi negli *Atti dell'Università di Genova* pubblicati in occasione del Centenario Colombiano. Gli estratti sono in deposito nella libreria Clausen.
(³) L. c. p. 180.
(⁴) E a questo proposito voglio notare come io non abbia mai negato essere l'opera dello scienziato di regola superiore a quella dello storico; e l'ho pubblicamente dichiarato (V. *Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario,* vol. V, p. 61, ove si legge: « Lungi da noi l'antico concetto che pone a uno stesso livello il far cose grandi e il raccontarle, quindi preferiremmo assai che gli insegnanti delle nostre scuole medie si occupassero di far progredire la scienza piuttostochè esporre conquiste già fatte ») assai prima di conoscere l'opinione che aveva su questo argomento il collega dell'Università Pavese (l. c. p. 181).



scuola di cui quell'uomo è il capo. E lo dico non già usando per capriccio la parola *scuola* in un senso a me particolare, ma basandomi sull'uso comune, secondo cui fra i significati di quella parola havvi pure il seguente: *confraternita o compagnia spirituale* (¹). E per ciò ho ritenuto e scritto, ed ora ripeto e sostengo che se i matematici di cui io tentai narrare le vicende scientifiche non si possono considerare come costituenti una scuola, giustizia esige si cancelli dalla storia della scienza la scuola di Platone come quelle di Pitagora e di Aristotele, e quante altre confraternite o compagnie intellettuali siano state registrate negli annali del pensiero umano. Nè so capire perchè dovrei parlare di coltura napolitana in genere (²) mentre in questa è inclusa, a tacer d'altro, la scuola sintetica, rivale di quella del Fergola, di cui io solo incidentalmente e quasi a forza feci qualche cenno.

***

In secondo luogo mi sento autorizzato di qualificare come completamente infondato l'appunto fattomi di equiparare la scuola del Fergola a quella di Pitagora (³), perchè l'innocente paragone da me fatto si riferisce unicamente ad un carattere secondario comune alle due scuole. Infatti, nella *Prefazione* al mio volume, dopo aver annunziato il mio intendimento di fare una succosa analisi dei prodotti dovuti alla scuola napolitana, per sottrarmi all'accusa di avere attribuita a taluno di quelli che la composero cosa che altri avesse pensata, avvertivo: « Ma tale e tanta è la comunanza di idee e l'unità di aspirazioni, tendenze e procedimenti di questi scienziati, che è vano sperare di potere valutare con esattezza separatamente l'opera di ciascuno; sicchè, malgrado certe diversità di opinioni, si sarebbe tentati di credere che essi avessero rinnovata a Napoli la scuola che tanti secoli addietro Pitagora aveva fondata a Crotone (⁴) ».

(¹) V. ad es. il *Vocabolario della lingua italiana* del Rigutini.
(²) L. c. p. 183.
(³) L. c. p. 182.
(⁴) Mi piace osservare come il senso delle mie parole sia stato perfettamente inteso dal grande storico M. Cantor, il quale scrisse: « Eine Schule « war in der That, welche Nicola Fergola (1753 bis 1822) gegründet hat, « eine Schule von so engem Zusammenhang, wie sie kaum je wieder be- « stand, seit Pythagoras fast in derselben Gegend deren Musterbild schuf. « Dieser sehr richtige Vergleich gehört Herrn Loria an, welcher ihn noch « damit belegte, dass bei den Schriften der neapolitanischen Schule man

***

Sgombrata così la via da queste due critiche, avvertirò che io ritengo come una delle regole fondamentali di ogni ricerca destinata a determinare l'influenza di un uomo, quella di studiare anzitutto lo stato delle cognizioni prima della sua comparsa per poi dedurre come e quanto egli modificò il suo ambiente. Per quanto questa regola possa apparir a molti come un *truism* indegno di venire esplicitamente enunciato, pure io ho creduto di dovere notarla perchè mi sembra che l'egregio mio contradditore ne abbia adottata una diametralmente opposta, quella cioè di paragonare le azioni di uno scienziato all'opera di quelli che vennero dopo di lui o di coloro che in altri luoghi e sotto l'impero di altre circostanze fecero più e meglio di lui. Ora che questo nuovo canone di critica storica possa condurre ai più sorprendenti e meno accettabili risultamenti è cosa che non esige alcuna dimostrazione. E se il lettore si proverà ad applicarlo a dei casi diversi da quello che ci occupa, si troverà costretto a modificare radicalmente giudizii da tutti accettati, e si renderà pienamente ragione del fatto che il prof. Pascal ed io, partendo dalle medesime premesse, arriviamo a conclusioni discordi; che mentre egli considera il periodo storico in questione come *di decadenza* io lo consideri come *di rinascimento;* che, mentre egli giudica siccome perniciosa l'influenza del Fergola, io m'inchini con riverenza dinnanzi a chi scosse definitivamente i Napolitani dal loro torpore e li spinse a correre animosi alla ricerca di nuovi veri, quei Napolitani che per tanti secoli rimasero sordi alle voci che, nel campo matematico, col precetto e coll'esempio facevano echeggiare in tutto il mondo civile la magica parola *avanti!*

***

Gli è appunto perchè io mi sono sforzato di tenere sempre dinnanzi a' miei occhi lo stato della scienza napolitana prima del Fergola, che

« stets in Zweifel sei, ob man von dem Verfasser oder den Verfassern « reden solle, da die Arbeiten, wie die Entdeckungen, bis zu einem ge- « wissen Grade Gemeingut waren, der Geist des Lehrers vollends überall « sichtbar blieb. Man möchte zum Vergleiche wohl auch die Arbeiten be- « ziehen, welche in unseren Tagen aus dem chemischen Laboratorium « berühmter Lehrer hervorgehen » (*Zeitschrift f. Math. u. Phys.*, 37 Bd., hist.-lit. Abth. p. 215).



ho enunciato un giudizio benevolo verso i principii di conversione e trasferimento che questi ha escogitati; essi rappresentano a' miei occhi il primo sintomo di aspirazione a metodi generali per la ricerca geometrica che mi sia stato possibile avvertire nella scienza napolitana. Come primo tentativo in una direzione d'indiscutibile fecondità io diedi lode al Fergola di averlo compiuto; come definitivo risultato, che potesse per mille anni (¹) dare origini a studii importanti, io certo mai l'ho creduto, nè so come si potesse attribuirmi tale opinione dal momento che rimproverai ai di lui discepoli di non avere proseguito in una via in cui egli aveva mosso il primo passo. Nè so, a dir vero, come possa essere giustificato il vivace attacco del prof. Pascal contro questo mio modo di vedere, il quale io, a p. 43-44 del mio scritto, esprimeva con le seguenti parole:

« Benchè tutti questi procedimenti (²) siano applicabili soltanto in certi casi, pure non si può revocare in dubbio il loro pregio; essi servono ad attestare come il Fergola avesse sentito il bisogno di far acquistare alla geometria la generalità posseduta dall'algebra, col sostituire, alle soluzioni speciali ad ogni singolo problema, delle argomentazioni applicabili ad un'intera categoria di questioni. Sgraziatamente questo elevato indirizzo che aveva ne' suoi albori la scuola napolitana, si cerca indarno nel meriggio di essa, per non parlare del tramonto; i discepoli del Fergola si occuparono, e non senza successo, di speciali questioni, ma nessuno seppe seguire il maestro nello scoprire nuovi metodi dotati di qualche generalità. Non ha forse qualche probabilità la supposizione che in questo cambiamento di direzione abbia sede una delle cause più efficaci dello screditο e della successiva rovina della scuola napolitana? »

Questo anzi mi porge il destro di rilevare esplicitamente — il che del resto emerge da innumerevoli passi del mio lavoro — come fra il Fergola e la generalità de' suoi discepoli io riconosca un enorme dislivello intellettuale. In particolare, che questi discepoli abbiano svisate, esagerandole, non poche delle sue idee, che essi non abbiano avvertito essere transitorio il valore di queste, io non lo nego ora e l'ho sempre riconosciuto; ma il valutare i discepoli dal maestro costituisce un errore storico non minore di quello che commetterebbe colui che, ricordando soltanto la guerra accanita e sleale mossa a Galileo in nome di Aristotele, dimenticasse che fu il filosofo di Stagira che per primo proclamò la necessità del metodo sperimentale, in un'epoca in cui era co-

(¹) L. c. p. 183.

(²) Cioè i metodi di trasferimento e conversione.

stume di inventare *a priori* un sistema di filosofia naturale e osservare i fatti nell'unico intento di costringerli a giustificarlo.

***

A meglio lavarmi della taccia di benevolenza cieca verso la scuola del Fergola, credo non vi sia di meglio che riportare qui le parole medesime con cui io ho compendiato il mio giudizio su di essa nel citato volume (p. 128-134).

« Riflettendo che il Fergola seppe da sòlo instradarsi e dirigersi verso la ricerca del vero, in un paese che era deficiente di tradizioni scientifiche e in un'epoca in cui le frequenti guerre, gli incessanti commovimenti interni e i molteplici cambiamenti di governo, avevano preparato e mantenevano un ambiente poco propizio alle tranquille meditazioni, non si sentirà alcuno stupore constatando l'alta stima di cui ben presto venne fatto segno e che egli seppe serbare, trasformare anzi in venerazione, colla propria attività didattica e scientifica. Quanto la prima fosse feconda è dimostrato dal numeroso stuolo di persone che lo riconobbero come maestro; mentre l'importanza della di lui opera scientifica emerge dallo studio de' suoi lavori, ed emergerebbe anche da quanto esponemmo nelle pagine precedenti, ove fossimo riusciti (come era nostra aspirazione) di mettere in chiaro come tutti gli scritti del Fergola possiedano un'indiscutibile originalità e siano improntati di quella spiccata tendenza verso le considerazioni generali, la quale di regola designa chi la possiede come uomo nato alle scoperte scientifiche.

L'esperienza fatta dal Fergola su sè stesso lo spinse a raccomandare lo studio degli antichi come eccellente preparazione alle investigazioni generali, a considerare questo metodo di istruzione come fecondo di effetti mirabili e certi: e per tale opinione egli non è certo da biasimarsi. Se un peccato il Fergola commise fu nel provare ed esprimere un'insormontabile avversione verso la geometria analitica di Lagrange; era forse difficile evitarla a lui educato nel metodo cartesiano ed innamorato di tutto che arieggiasse ai metodi dell'antica Grecia; ed è tanto diffusa quella ripugnanza verso il nuovo, che con eleganza moderna vien detto misoneismo, che noi saremmo disposti ad assolvernelo, ove quel peccato non avesse avute perniciose conseguenze. Giacchè i discepoli del Fergola, abbracciandone le idee senza discuterle, chiudendo gli occhi dinnanzi agli splendidi prodotti di cui il metodo di Lagrange era stato ubertoso prima e durante la campagna che essi avevano aperta contro di esso, s'illusero di poter abbattere una pianta



che aveva poste salde radici ed era adorna di foglie, di fiori e di frutti; e il torto di essi, che erano abbastanza giovani per potersi invece addestrare nel maneggio del nuovo strumento, venne ritenuto così grave che quando una scuola rivale volle abbattere quella del Fergola, trovò nella riluttanza di questa ad accogliere le idee di Lagrange, il punto debole ove colpirla a morte.

Ma l'esito di questo duello non deve far dimenticare il valore di chi ebbe avversa la sorte dell'armi! E chi tesse la necrologia della scuola napolitana, non può nè deve passare sotto silenzio come l'ampia e profonda conoscenza della letteratura classica che ivi si aveva, abbia permesso non soltanto di rilevare e correggere molti errori storici cui l'imponente autorità di Montucla aveva attribuito valore di dogmi, ma anche di diffondere e perfezionare la conoscenza degli antichi metodi d'indagine geometrica e di aggiungere qualche nuovo numero al catalogo dei lavori con cui i matematici recenti tentarono sopperire alla perdita di opere classiche. In questa perfetta conoscenza dei procedimenti vetusti, nell'ammirazione per essi, nell'ardente desiderio di emularli, è probabilmente da ricercarsi l'origine di quella scrupolosa cura della forma visibile in tutti gli scienziati di cui stiamo occupandoci: potrà forse il lettore moderno trovare il loro stile troppo carico di fiori retorici, non mai oscuro o scorretto; e con la continua meditazione sui classici essi probabilmente appresero anche il segreto di comporre buoni libri di istruzione, segreto del quale tutti sembrano essere stati in possesso.

Se non che tale culto per l'antichità, mentre può produrre eccellenti effetti quando venga professato in giusta misura, quando per converso degenera in una cecità intellettuale che impedisce di apprezzare secondo giustizia tutto che è moderno, ostacola l'avanzamento del sapere; di ciò non s'avvidero i discepoli del Fergola, essi non avvertirono cioè che la scuola napolitana stava per trasformarsi in una pianta parassita del forte tronco dovuto alle cure di Euclide e Apollonio, e che quindi era destinata a dare soltanto dei frutti che fossero una trasformazione dei succhi che circolavano nella pianta principale. Si sarebbe tentati di asserire che il maggior difetto degli investigatori di cui ci occupiamo consistesse nella scarsità di quella speciale fantasia che al geometra addita i problemi e i mezzi per risolverli; infatti, non soltanto i metodi di cui si servirono — eccezion fatta per alcuni pochi suggeriti dal Fergola — nacquero altrove, ma i principali fra i problemi a cui vennero applicati furono suggeriti da altri [1]; sembra anzi

[1] Vegga il lettore spassionato se tali parole convengono a un ammiratore entusiasta quale mi dipinge il prof. Pascal! (l. c. p. 181).

che questa deficienza fosse avvertita e volesse venire pudicamente nascosta, perchè il Flauti non smise mai di dire e ripetere a sazietà, essere impossibile l'arrivo di un istante ove un problema fosse da considerarsi come definitivamente esaurito, essere del pari impossibile che una ricerca matematica invecchiasse.

È un fatto che ci sembra degno della più seria considerazione questo, che ogni qualvolta in un paese comincia a ridestarsi lo spirito di ricerca delle verità geometriche, gli scienziati non sanno sottrarsi al fascino su di essi esercitato dai più antichi investigatori, ed in conseguenza si sforzano di calcarne le orme, di imitarne perfino le movenze e gli atteggiamenti: la storia della geometria, la quale registra, dopo periodi di inerzia, le divinazioni di opere antiche fatte in Italia dal Viviani, in Francia da Viète e Fermat, in Inghilterra da Halley, Horseley e Simson, è là per dimostrarlo! Si sarebbe per ciò indotti a pensare che nella vita intellettuale delle nazioni avvenga qualche cosa di analogo a ciò che l'embriologia insegna a verificarsi nella vita fisica degli animali; nello stesso modo che ogni essere vivente, avanti di acquistare vita autonoma e indipendente, ripassa per tutte quelle fasi di sviluppo che attraversò la specie a cui egli appartiene prima di raggiungere lo stato fisico della generazione a cui egli dovrà appartenere, così parrebbe che ogni popolo, prima di acquistare la capacità di accrescere le nostre cognizioni sui fenomeni dello spazio, debba per qualche tempo assumere le parvenze ed i modi di agire di chi dianzi battè la stessa strada. Accettata come vera questa legge di svolgimento, la scuola, di cui stiamo occupandoci, rappresenta uno stadio che la scienza napolitana doveva necessariamente attraversare prima di essere arruolata nella coorte chiamata a combattere per la conquista di nuovi veri [1].

Ma questo stadio, per la sua stessa natura, doveva avere breve durata. Il corpo al quale il Fergola aveva dato la vita, racchiudeva in sè stesso un germe roditore che lo avviava verso il sepolcro. Tuttavia, da quello che apparve, ben presto, come un cadavere in putrefazione, stavano per sprigionarsi nuove forme di vita; i germi ivi ammassati non aspettavano per svilupparsi che una circostanza propizia. E questa non si fece attendere a lungo.

Con la venuta a Napoli, nel 1844, di Jacobi e Steiner, giunse alle falde del Vesuvio la notizia delle nuove idee che direbbersi rappresentare quei « nouveaux filons » metalliferi invocati da Lagrange per

(1) Mi permetto fissare l'attenzione del lettore su questa spiegazione che tentai dare dell'anacronismo che prima del Pascal (l. c. p. 184) io avevo avvertito.



trattenere i matematici in una miniera che a lui appariva come omai esausta, e l'influenza esercitata da essi fu pressochè immediata.

L'interesse che provarono i giovani napolitani per le questioni che venivano agitate al di là dell'Alpi si estrinsecò con un rinnovamento completo nel loro campo di studi. E infatti vediamo, subito dopo quel ben augurato soggiorno presso di noi dei due grandi scienziati tedeschi, dal Padula dimostrati e maggiormente svolti alcuni teoremi che Steiner gli aveva comunicati su i baricentri di curvatura, sulla cubatura di certi solidi, su i flessi ed i punti doppi delle curve algebriche; il Del Grosso redigere prima uno *Sviluppo di una nuova teoria di Jacobi riguardante la genesi, la specie ed il sito delle linee del 2° ordine*, porgere poi un'*Applicazione del principio di Ivory della genesi, della specie, del sito della superficie di 2° ordine*, e finalmente occuparsi di estendere allo spazio il problema — da Steiner già risoluto — di « determinare quelle delle ellissi circoscritte ad un quadrangolo che più si approssima ad un cerchio »; inoltre Emanuele Fergola penetrare nel campo in cui aggiravasi lo stesso Steiner quando scriveva la memoria intitolata: *Teoremi relativi alle coniche inscritte e circoscritte*; e finalmente il Padula risolvere, più tardi, elegantissimamente un problema nel quale Steiner erasi imbattuto nelle sue celebri ricerche sintetiche sui massimi e minimi; che più? vediamo persino il Trudi — a cui sembra sia stato dalla sorte riserbato il cómpito di liquidare la bancarotta della scuola napolitana — allargare il campo de' suoi studi su i poligoni inscritti e circoscritti alle coniche profittando della luce che Jacobi aveva sparsa sopra tali questioni coll'applicarvi la teoria delle trascendenti ellittiche. E a questi nomi, altri molti potrei aggiungere e non di minor valore, ove ritenessi che quelli citati non fossero sufficienti attestazioni di qual fosse la corrente di idee che predominava in Napoli dopo l'anno 1844, e ove non osservassi che tale enumerazione ben presto mi condurrebbe al punto in cui non è più lecito parlare di una scuola *napolitana*, chè la mutazione radicale nelle condizioni politiche dell'Italia, accaduta poco dopo, venne a coordinare in un grande focolare unico i centri di studio sparsi per tutta la penisola.

Ma se nello stuolo di ricercatori che nel campo delle scienze esatte, in quest'ultimo mezzo secolo, tenne alto il nome italiano, non pochi si incontrano che ebbero in Napoli la loro educazione intellettuale, non è forse dovere di ricordare con riverenza e affettuosa gratitudine, il nome di Nicola Fergola, che fece risorgere quelle regioni dallo squallore dei bassi tempi alla luce di un'èra novella? »

***

Non tenterò di difendere i geometri della scuola napoletana dall'avere intralciata la carriera scientifica e professionale di coloro che non ne condividevano le idee; l'accusa è grave nè ho ragione di crederla ingiusta; dessa però colpisce non solo il Flauti, ma il Padula (1) e, a tacer d'altri minori, il Cauchy nel momento che combatteva Poncelet; nè si dimentichi che « les hommes savent si peu, quelle qu'en soit la fausseté, renoncer aux idées dont ils ont été imbus dans l'âge d'où partent leurs souvenirs, qu'à un très-petit nombre d'exceptions près, ce n'est dans toute une nation que la jeunesse qui embrasse et fait prévaloir une opinion ou propage des faits nouveaux » (2).

Nè discolperò me dall'appunto di avere scritto un intero volume per descrivere un periodo che, per quanto meritorio come quello che diede ai Napolitani un posto nell'*Histoire de la Géométrie* di Chasles, è indubbiamente un periodo di preparazione; è un appunto che io stesso mi feci e di cui tentai difendermi nella *Prefazione*, del quale d'altronde mi sento assolto ora che la raccolta di documenti da me fatta con tanta fatica ha reso possibile al prof. Pascal di gettarmi il guanto di una sfida ad armi cortesi che io ho raccolto, fidando dovesse arridere la vittoria a chi combatteva *per la verità* contro un campione tanto valoroso quanto leale.

Dovrei finalmente dichiararmi colpevole di soverchio ardimento per essermi provato a descrivere la vita intellettuale di un paese in cui io non ho mai vissuto (3) e di occuparmi di fatti in cui non ho mai potuto avere un interesse diretto (4). Ma ritengo che questa sia una condizione vantaggiosa e quello non sia ostacolo insormontabile. D'altronde mi è lecito illudermi che il mio ardire non sia stato eccessivo quando vedo persone in grado di conoscere lo stato delle cose accordare la loro approvazione all'opera mia e non negarmelo nemmeno quell'Accademia che espulse il Flauti dal suo seno ed a cui è oggi affidata la cura del sapere nella parte meridionale d'Italia (5).

(1) Confesso che non capisco bene perchè la scuola del Fergola sia responsabile anche di questo errore del suo più accanito avversario (luogo cit. p. 186).

(2) Così Lacroix a pag. 7 dei suoi *Essais sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier* (Paris 1838).

(3) L. c. p. 180.

(4) L. c. p. 184.

(5) Cfr. *Rendiconto dell'Accademia di Napoli*, seduta dell'11 giugno 1892.



Altro aggiungerei ove non temessi abusare della pazienza dei lettori (1); credo però che il fin qui detto sia sufficiente a dimostrare come nel narrare le vicende della scuola napolitana, io non abbia smarrita la via di storico onesto, io non abbia tentato l'impossibile, di estollere cioè chi non lo meritava, io non mi sia rifiutato di scorgere e constatare il male ove c'era; in una parola io non abbia posto in non cale il savio avvertimento di Montaigne: « Ce n'est pas aimer la vérité que ne l'aimer que flatteuse et agréable; il faut l'aimer âpre et dure; il faut en aimer les épines et les blessures ».

*Genova, 12 Dicembre 1892.*

---

## CORRISPONDENZA

Torino, 8 dicembre 1892.

*Egregio Sig. Direttore*,

Calcolando l'area compresa tra un dato perimetro ed una retta fondamentale nel modo indicato nella lettera del sig. ingegnere Crott Francesco (2), adoperando cioè la nota formola di Simpson:

$$S = \frac{h}{3}[y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 + 2y_5 + \dots + y_{2n} + y_{2n+1}]$$

si ottiene nel primo caso il numero $9600^{m.q.}$ e nel secondo l'altro numero $9720^{m.q.}$ che è maggiore del primo.

Vi è *l'assurdo* in codesto risultamento? A me pare di no.

La formola di Simpson suppone che il perimetro curvilineo compreso tra gli estremi di tre ordinate consecutive possa essere sostituito da un arco di parabola avente l'asse parallelo alle ordinate.

Ora, quando si calcola l'area totale compresa tra le ordinate $y_1$ e $y_{21}$, si sostituisce al perimetro dato quello di *dieci* archi eguali di parabola aventi i loro vertici alle estremità delle ordinate $y_2, y_4, \dots y_{20}$. Codeste parabole *hanno la* CONVESSITÀ *rivolta verso la retta fondamentale.*

Quando invece si calcola l'area compresa tra le ordinate $y_2$ e $y_{20}$, al perimetro dato si sostituisce quello di *nove* archi eguali di parabola

(1) Ulteriori mie giustificazioni avrei potuto trovare a p. 32-33, 41, ecc. del mio libro.

(2) Vedi *Rivista di Matematica*, vol. II, pag. 176.

(identica alla precedente). Questi ultimi archi però *hanno la* CONCAVITÀ *rivolta alla retta fondamentale*.

È egli indifferente sostituire ad un medesimo perimetro curvilineo una volta un arco di parabola avente la sua concavità rivolta in un senso ed un'altra rivolta in senso contrario?

Adunque i due numeri precedenti rappresentano due cose differenti e non uno il *tutto* e l'altro *una parte*.

*Suo devot.mo*
Prof. N. JADANZA.

---

Milano, 10 Dicembre 1892.

*Chiarissimo Signore,*

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

La quadratura approssimata di Simpson consiste sostanzialmente in ciò: divisa la fondamentale in un numero pari di intervalli eguali, e condotte le ordinate dai punti di divisione, agli archi del perimetro curvo della figura data, corrispondenti a tre ordinate successive, si sostituiscono altrettanti archi di parabole di secondo ordine passanti pei termini delle tre ordinate medesime, quindi si sommano le aree dei trapezi parabolici che ne risultano. Ora, se un arco del perimetro presenta punti di flesso o cuspidi i quali non coincidano con termini di ordinate, la parabola di secondo ordine, come tutte le coniche in genere, essendo priva di punti singolari, non solamente si presterà male a surrogare la linea limitante la figura, ma in taluni casi riescirà anche meno adatta della retta, cioè la quadratura a trapezi rettilinei potrà fornire una maggiore approssimazione.

Nel caso proposto dall'ing. Crotti, ammesso che la formula di Simpson sia applicabile ai dieci trapezi in cui è stata scomposta la figura, per le misure date, il perimetro curvo viene sostituito da dieci archi eguali di parabole coniche pure eguali, ciascuna volgente la convessità alla fondamentale; e l'area della figura eguaglia quella del trapezio parabolico, espressa da 10(20+20+4.14), ripetuta dieci volte, cioè 9600mq.

La formula medesima non è invece da applicarsi, per l'osservazione fatta, alla porzione di figura compresa tra le ordinate $y_2$ ed $y_{20}$, in ciascuna delle nove sezioni della quale il perimetro curvo presenta un cuspide formato dall'incontro di due rami delle parabole considerate prima. Volendola usare si avrebbe l'area del trapezio parabolico: 10(14+14+4.20) ripetuta nove volte, ossia 9720mq, area maggiore di quella già trovata, il che costituisce l'assurdo notato. In questo caso, immaginando la figura limitata da nove archi eguali di parabole aventi la concavità rivolta alla fondamentale, si vede chiaro come sia da preferirsi la spezzata rettilinea alla parabolica.



È davvero da lamentarsi che, anche in libri reputati e diffusi nelle scuole non si dica parola delle cautele da aversi nell'uso delle formule di quadratura approssimata, in particolare di quella di Simpson. Sarebbe bene che, oltre al mettere in avvertenza degli errori che può trarre seco l'uso incondizionato di questa, si mostrasse la convenienza delle quadrature con parabole di ordini superiori, le quali sono dotate di punti di flesso, ricorrendo agli integrali di Cotes, quando nel perimetro della figura ci sono singolarità che la parabola di secondo ordine non possa rappresentare. Così io non so perchè non sia adoperata nella pratica la quadratura parabolica di terzo ordine, che conduce ad una formula abbastanza semplice, poco più complicata di quella di Simpson, e che non mi fu dato di vedere ricordata nei libri che trattano di questi argomenti e da me esaminati. Divisa la fondamentale in $3n+1$ segmenti ciascuno eguale ad $a$, la formula è la seguente:

$$\frac{3}{8}a\left\{3\sum_{1}^{3n+1} y_r - y_1 - y_{3n+1} - \sum_{1}^{n+1} y_{3r-2}\right\},$$

che si può così enunciare: per avere l'area approssimata, usando della quadratura parabolica di terzo ordine, *si moltiplichino i* $\frac{3}{8}$ *dell'intervallo costante tra due ordinate consecutive, pel triplo della somma di tutte le ordinate, diminuito delle due ordinate estreme e della somma delle* $n+1$ *ordinate (comprese ancora le estreme) che limitano gli* $n$ *trapezi parabolici.*

Mi è propizia l'occasione per rassegnarmi colla massima stima

*Di Lei devot.mo*
Dott. GIUSEPPE BARDELLI.

---

## Sullo stesso soggetto.

(Formule di quadratura).

La formula di Cotes per la quadratura di terz'ordine, fatto per semplicità $n = 1$, è

$$\int_a^b y\,dx = \frac{b-a}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3)\,. \qquad (1)$$

Essa, e le successive fino al decimo ordine trovansi nel *Calcul intégral* di BERTRAND, pag. 333; esse sono pure riportate nel *Sammlung von Formeln von Làska* (Braunschweig, 1888, pag. 233). Sgraziatamente degli errori di stampa (troppo comuni in questo libro) rendono già errata la formula successiva alla (1).

La formula (1) è esatta per le funzioni intere di terzo grado, nè più nè meno della formula di Simpson più semplice

$$\int_a^b y dx = \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2) \,. \qquad (2)$$

Si può calcolare l'errore R che si commette usando la (1) per una funzione qualunque $y$, seguendo il metodo indicato nelle mie *Applicazioni geometriche*, pag. 213. Esso vale

$$R = \frac{(b-a)^4}{4!\,81}\int_0^3 (z-1)(z-2)(z-3) y^{\text{IV}} dz \,,$$

ove $y^{\text{IV}}$ rappresenta un valor medio fra quelli della derivata quarta di $y$, e questo valor medio è variabile con $z$. Quindi poichè il fattore che moltiplica $y^{\text{IV}}$ cambia di segno due volte nell'intervallo di integrazione, non si può portare il fattore $y^{\text{IV}}$ fuori del segno integrale. Bisognerà pertanto scomporre l'integrale $\int_0^3$ in $\int_0^1 + \int_1^2 + \int_2^3$, e in ognuno di questi portar fuori l'$y^{\text{IV}}$. Si otterrà

$$R = \frac{(b-a)^4}{4!\,81}\left(-\frac{19}{30}y_1^{\text{IV}} + \frac{11}{30}y_2^{\text{IV}} - \frac{19}{30}y_3^{\text{IV}}\right)$$

ove $y_1^{\text{IV}}$, $y_2^{\text{IV}}$, $y_3^{\text{VI}}$ sono valori di $y^{\text{IV}}$ rispettivamente negli intervalli (0, 1), (1, 2) e (2, 3).

Invece nella formula (2) di Simpson l'errore vale

$$R = -\frac{(b-a)^4}{4!\,120} y^{\text{IV}} \,.$$

G. PEANO.

---

## Sulle equazioni di Lagrange per il moto di un punto.

Se un punto si move sotto l'azione di una forza e il suo moto viene riferito a tre assi coordinati cartesiani ortogonali, scrivendo che la forza effettiva del punto, stimata secondo ciascuno dei tre assi, è uguale alla forza stimata secondo lo stesso asse, si ottengono le usuali equazioni del moto

$$(1) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = X \,, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y \,, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z \,.$$



Mi propongo di mostrare che se il moto del punto viene riferito ad un sistema qualunque di coordinate *generali*, con un procedimento analogo al precedente si ottengono le equazioni del moto di Lagrange.

Nei trattati non è messa in rilievo questa osservazione, la quale mentre da una parte fa vedere l'analogia che esiste fra le equazioni (1) e quelle di Lagrange, dall'altra fornisce un significato meccanico di queste ultime equazioni, significato che scompare stabilendo nella maniera solita le equazioni di Lagrange, e inoltre spiega come queste equazioni siano indipendenti dalla reazione, nel caso di un punto vincolato. Sia M un punto materiale di massa $m$, sollecitato da una forza applicata F; supponiamolo dapprima libero; siano $x$, $y$, $z$ le sue coordinate cartesiane ortogonali al tempo $t$ e $q_1$ $q_2$ $q_3$ tre coordinate affatto arbitrarie dello stesso punto al medesimo istante.

Abbiamo le equazioni

$$(2) \begin{cases} x = f(q_1, q_2, q_3) \\ y = \varphi(q_1, q_2, q_3) \\ z = \psi(q_1, q_2, q_3) \end{cases} \qquad (3) \begin{cases} q_1 = f_1(x, y, z) \\ q_2 = \varphi_1(x, y, z) \\ q_3 = \psi_1(x, y, z) \end{cases}$$

Dalle (3) si deduce che ciascuna delle tre equazioni

$$q_1 = \text{cost.} \,, \qquad q_2 = \text{cost.} \,, \qquad q_3 = \text{cost.}$$

rappresenta una superficie che passa per la posizione $(x, y, z)$ che il punto mobile M occupa al tempo $t$.

Il moto di M può essere definito in due modi: colle equazioni

$$(4) \qquad x = \lambda(t) \,, \quad y = \mu(t) \,, \quad z = \nu(t)$$

o colle equazioni

$$(5) \qquad q_1 = \lambda_1(t) \,, \quad q_2 = \mu_1(t) \,, \quad q_3 = \nu_1(t) \,.$$

Le (4) ci dicono che al tempo $t$ il punto M è l'intersezione di tre piani rappresentati rispettivamente dalle equazioni stesse; le (5) ci dicono analogamente che al tempo $t$ il punto M è l'intersezione delle tre superficie rappresentate rispettivamente dalle equazioni stesse.

Le (4) rappresentano ad ogni istante i moti di M sulle intersezioni dei piani (4), ossia rappresentano i moti delle proiezioni di M sugli assi cartesiani e ciascuna delle coordinate $x$, $y$, $z$ esprime lo spazio descritto alla fine del tempo $t$ dalla proiezione corrispondente; analogamente le (5) rappresentano, a ogni istante, i moti del punto M sulle intersezioni delle superficie (5); ad es.: la $q_1 = \lambda_1(t)$ rappresenta il moto di M sulla linea

$$(6) \qquad q_2 = \mu_1(t) \,, \quad q_3 = \nu_1(t)$$

qualora si mantengano costanti $q_2$ e $q_3$ e si faccia variare soltanto $q_1$ con la legge data da $q_1 = \lambda_1(t)$; ma qui devesi notare che non si può più affermare che $q_1$ sia lo spazio descritto alla fine del tempo $t$, dal punto M, sulla linea (6).

Sia $v$ la velocità di M al tempo $t$; siano $v_1$, $v_2$, $v_3$ ordinatamente le velocità del punto stesso a quell'istante sulle traiettorie

$$\begin{cases} q_2 = \mu_1(t) \\ q_3 = \nu_1(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} q_3 = \nu_1(t) \\ q_1 = \lambda_1(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} q_1 = \lambda_1(t) \\ q_2 = \mu_1(t) \end{cases}$$

Si ha dalle equazioni (2):

$$(7) \qquad v_x = \frac{\partial f}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} q'_2 + \frac{\partial f}{\partial q_3} q'_3$$

e altre due espressioni analoghe per $v_y$ e $v_z$.

Se riguardiamo $q_2$ e $q_3$ come costanti, coi valori che hanno al tempo $t$, le componenti $v_x$, $v_y$, $v_z$ divengono le componenti di $v_1$ sugli assi cartesiani; onde

$$(8) \qquad (v_1)_x = \frac{\partial f}{\partial q_1} q'_1 , \qquad (v_1)_y = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} q'_1 , \qquad (v_1)_z = \frac{\partial \psi}{\partial q_1} q'_1 .$$

Espressioni analoghe sussistono per le componenti di $v_2$ e di $v_3$.

Intanto noi vediamo, confrontando le (8) con le (7), che

$$v_x = (v_1)_x + (v_2)_x + (v_3)_x$$

e analoghe; onde $v$ è la risultante delle tre velocità $v_1$, $v_2$, $v_3$.

Ora indichiamo con $a_1$ il valore di un segmento che abbia per componenti cartesiane le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial q_1};$$

sarà
$$(v_1)_x = a_1 \cos(a_1 x) q'_1$$

e analoghe; onde, quadrando, sommando e estraendo la radice si otterrà

$$v_1 = a_1 q'_1$$

e quindi
$$\cos(a_1 x) = \cos(v_1 x) .$$

Dunque il segmento $a_1$ ha la direzione di $v_1$ e può perciò immaginarsi portato sulla tangente alla traiettoria (6) nel punto occupato dal mobile al tempo $t$.

Similmente si avrà

$$v_2 = a_2 q'_2 , \qquad v_3 = a_3 q'_3$$

ove $a_2$ e $a_3$ sono i valori di due segmenti che hanno ufficio analogo a quello di $a_1$.

È facile trovare i valori dei segmenti $a_1$, $a_2$, $a_3$ anche senza ricorrere alle (2), ma avendo soltanto riguardo alla natura del sistema di coordinate $q_1$, $q_2$, $q_3$.



Infatti sia $s_1$ lo spazio descritto alla fine del tempo $t$ dal punto M sulla traiettoria (6), contato da un'origine fissata ad arbitrio su di essa; $s_1$ sarà in generale funzione di $q_1$, $q_2$, $q_3$; per es.: prendendo le coordinate sferiche $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$ (longitudine), $q_3 = \theta$ (colatitudine), lo spazio descritto al tempo $t$ sulla traiettoria $q_1 = \text{cost.}$, $q_3 = \text{cost.}$ è un arco di parallelo, che, a meno di una costante, vale

$$\rho \operatorname{sen} \theta . \varphi = q_1 q_2 \operatorname{sen} q_3 .$$

Avremo dunque

$$v_1 = \frac{ds_1}{dt} = \frac{\partial s_1}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial s_1}{\partial q_2} q'_2 + \frac{\partial s_1}{\partial q_3} q'_3 = \frac{\partial s_1}{\partial q_1} q'_1$$

perchè $q'_2 = q'_3 = 0$ per il moto sulla traiettoria (6) al tempo $t$.

Confrontando i due valori di $v_1$ si deduce

$$a_1 = \frac{\partial s_1}{\partial q_1}$$

e analogamente

$$a_2 = \frac{\partial s_2}{\partial q_2} , \qquad a_3 = \frac{\partial s_3}{\partial q_3} .$$

Così, per le coordinate sferiche, è

$$a_2 = q_1 \operatorname{sen} q_3 = \rho \operatorname{sen} \theta .$$

Cerchiamo ora la forza viva del punto M.

Abbiamo

$$(9) \quad \mathrm{T} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \Big[ a_1^2 q'^2_1 + a_2^2 q'^2_2 + a_3^2 q'^2_3 + 2 a_1 a_2 q'_1 q'_2 \cos(a_1 a_2) + 2 a_2 a_3 q'_2 q'_3 \cos(a_2 a_3) + 2 a_3 a_1 q'_3 q'_1 \cos(a_3 a_1) \Big] .$$

Proiettando ortogonalmente la velocità $v$, l'accelerazione totale $w$ e la forza applicata F, sulla direzione di $a_1$, otterremo successivamente

$$\alpha) \qquad v \cos(v a_1) = a_1 q'_1 + a_2 q'_2 \cos(a_1 a_2) + a_3 q'_3 \cos(a_1 a_3) ;$$

moltiplicando ambi i membri per $a_1$, il secondo membro, in virtù della (9), diviene

$$\frac{\partial \left( \frac{\mathrm{T}}{m} \right)}{\partial q'_1} = \frac{1}{m} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_1}$$

quindi

$$v \cos(v a_1) = \frac{1}{m a_1} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_1} ;$$

$$\beta) \quad w\cos(wa_1) = \frac{d^2x}{dt^2}\frac{1}{a_1}\frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{a_1}\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{1}{a_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1}$$

$$= \frac{1}{a_1}\frac{d}{dt}\left[v_x\frac{\partial f}{\partial q_1} + v_y\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + v_z\frac{\partial \psi}{\partial q_1}\right]$$

$$-\frac{1}{a_1}\left[v_x\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\right) + v_y\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\right) + v_z\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{a_1}\frac{d}{dt}\left[va_1\cos(va_1)\right] - \frac{1}{a_1}\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial q_1} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial q_1} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial q_1}\right)$$

$$= \frac{1}{a_1}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_1}\right) - \frac{1}{2a_1}\frac{\partial}{\partial q_1}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

$$= \frac{1}{ma_1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_1}\right) - \frac{1}{ma_1}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_1};$$

$$\gamma) \quad \mathrm{F}\cos(\mathrm{F}a_1) = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\frac{1}{a_1}\frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\frac{1}{a_1}\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}\frac{1}{a_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1} = \frac{1}{a_1}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial q_1}.$$

Eguagliando la forza effettiva stimata sulla direzione di $a_1$ alla componente della forza applicata sulla stessa direzione, si ottiene, tralasciando il fattore comune $\frac{1}{a_1}$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_1}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_1} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial q_1}$$

che è una delle equazioni di Lagrange, e precisamente quella corrispondente alla coordinata $q_1$.

Per es. nel caso che le $q_1\ q_2\ q_3$ siano le coordinate sferiche, calcolando la proiezione dell'accelerazione totale sul raggio vettore, si trova

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \operatorname{sen}^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right];$$

scrivendo

$$m\frac{d^2\rho}{dt^2} - m\rho\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \operatorname{sen}^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \rho}$$

è questa appunto l'equazione di Lagrange relativa alla coordinata $\rho$.

Se il punto è vincolato a una linea o ad una superficie, le equazioni di Lagrange si applicano senz'altro e si riducono a una o due secondo che le variabili indipendenti sono una o due, cioè il punto è ritenuto da una linea o da una superficie.

Mercè il significato, stabilito precedentemente, delle equazioni di Lagrange, possiamo renderci facilmente ragione del perchè esse non contengono la reazione del vincolo.



Supponiamo ad es. che il punto sia ritenuto da una superficie

$$\pi(x, y, z) = 0.$$

Poniamo

$$x = f(q_1, q_2), \qquad y = \varphi(q_1, q_2), \qquad z = \psi(q_1, q_2)$$

e queste espressioni siano tali da soddisfare identicamente l'equazione del vincolo, qualunque siano i valori di $q_1$ e $q_2$. Si ha

$$\frac{\partial \pi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \pi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \pi}{\partial z}\delta z = 0$$

ossia

$$\frac{\partial \pi}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2}\delta q_2\right) + \ldots\ldots = 0$$

o ancora

$$\left(\frac{\partial \pi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{\partial \pi}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \frac{\partial \pi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial q_1}\right)\delta q_1 + \ldots\ldots = 0$$

da cui, poichè le variazioni $\delta q_1$ e $\delta q_2$ sono arbitrarie,

$$\frac{\partial \pi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{\partial \pi}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \frac{\partial \pi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial q_2} + \frac{\partial \pi}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + \frac{\partial \pi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial q_2} = 0;$$

onde i segmenti $a_1$ e $a_2$ sono normali alla normale della superficie $\pi(x, y, z) = 0$ in M, cioè stanno sul piano tangente della superficie stessa; quindi proiettando la forza totale (risultante di F e della reazione della superficie) sulle direzioni di $a_1$ e di $a_2$ si ha da fare soltanto la proiezione di F e perciò le due equazioni di Lagrange saranno indipendenti dalla reazione.

F. Porta.

---

## Alcune proprietà delle accelerazioni d'ordine qualunque nel moto di una figura piana nel suo piano.

***

Le proprietà principali di queste accelerazioni si deducono dal teorema:

« Esiste in ogni istante un punto della figura piana mobile nel suo piano la cui accelerazione di un dato ordine è nulla (centro delle accelerazioni di quell'ordine) e le accelerazioni degli altri punti sono proporzionali ai raggi che congiungono questi punti al centro delle accelerazioni, e fanno con questi raggi angoli uguali » [1].

La teoria dei vettori mi suggerisce una dimostrazione molto semplice di questo teorema.

Sia P un punto della figura mobile, $P' = \frac{dP}{dt}$ la sua velocità (accelerazione d'ordine zero), $P^{(n)} = \frac{d^nP}{dt^n}$ la sua accelerazione d'ordine $n-1$, $\omega$ la velocità angolare istantanea, $\omega'$, $\omega''$, $\omega'''$... le derivate di $\omega$ rispetto al tempo, $i$ l'unità immaginaria, cioè il fattore che produce la rotazione di un angolo retto.

È ben noto che se $P_1$ è un punto della figura, e C è il centro istantaneo di rotazione alla fine del tempo $t$, il vettore $P'_1$ è normale al vettore $P_1 - C$ e $\frac{\text{grand. } P'_1}{\text{grand. } (P_1 - C)} = \omega$, quindi

$$P'_1 = \omega(P_1 - C)i \ ; \quad P'_2 = \omega(P_2 - C)i$$

ed anche:

$$P'_1 - P'_2 = \omega(P_1 - P_2)i \ .$$

Derivando successivamente rispetto a $t$, si ha:

$$P_1'' - P_2'' = (-\omega^2 + \omega' i)(P_1 - P_2)$$
$$P_1''' - P_2''' = [-3\omega\omega' + i(\omega'' - \omega^3)](P_1 - P_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ed in generale:

$$P_1^{(n)} - P_2^{(n)} = (a + bi)(P_1 - P_2) = \rho(P_1 - P_2)e^{i\varphi} \qquad (1)$$

dove $a$ e $b$, e quindi $\rho$ e $\varphi$, sono funzioni facili a determinarsi di $\omega$ e delle sue successive derivate rispetto a $t$, cioè funzioni del tempo, e costanti rispetto ai punti della figura.

Dalla (1) si deduce:

$$P = P_1 + \frac{1}{\rho}(P^{(n)} - P_1^{(n)})e^{-i\varphi} \qquad (2)$$

e questa formola ci determina il punto P di data accelerazione $P^{(n)}$.

Se O è il punto d'accelerazione zero, sarà:

$$O = P_1 - \frac{1}{\rho}P_1^{(n)}e^{-i\varphi} \qquad (3)$$

ed è un punto del piano a distanza finita quando $\rho > 0$.

---

[1] J. Somoff, *Kinematik Uebersetzt von A. Ziwet*. Lipsia 1878, p. 340.



Dalla (3) si deduce:

$$P^{(n)} = \rho(P - O)e^{i\varphi} \qquad (4)$$

e questa formola dimostra il teorema.

L'argomento $\varphi$ è l'angolo costante delle accelerazioni, il modulo $\rho$ è il rapporto costante dell'accelerazione di un punto alla distanza di questo punto dal centro.

Per le velocità si ha: $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , $\rho = \omega$ .

Per le accelerazioni di 1° ordine:

$$\rho = \sqrt{\omega^4 + \omega'^2} \ , \qquad \varphi = \text{arc cos}\left(-\frac{\omega^2}{\rho}\right) = \text{arc sen}\left(\frac{\omega'}{\rho}\right) .$$

Per le accelerazioni di 2° ordine:

$$\rho = \sqrt{9\omega^2\omega'^2 + (\omega'' - \omega^3)^2} \ , \quad \cos\varphi = -\frac{3\omega\omega'}{\rho} \ , \quad \text{sen}\,\varphi = \frac{\omega'' - \omega^3}{\rho} \ .$$

Se $\omega$ è costante, sarà:

$$P^{(n)} - P_1^{(n)} = (\omega i)^n(P - P_1)$$
$$P^{(n)} = (\omega i)^n(P - O) \ ;$$

quindi:

1°) Se $n$ è pari le accelerazioni d'ordine $n - 1$ concorrono in un punto O, che ne è il centro, ed i punti della figura corrispondono agli estremi delle loro accelerazioni in una omotetia di centro O e di ragione $\frac{1}{1 + (i\omega)^n}$ .

2°) Se $n$ è dispari le accelerazioni d'ordine $n - 1$ sono normali alle congiungenti i loro punti d'applicazione col centro delle accelerazioni, come avviene per le velocità.

***

Molte ed interessanti proprietà di queste accelerazioni d'ordine qualunque sono state studiate [1]; accennerò ad alcune altre che per quanto ovvie, mi sembrano degne di nota.

Se da O (centro delle accelerazioni) conduco due rette ortogonali inclinate degli angoli $\varphi$ (angolo delle accelerazioni) e $\frac{\pi}{2} + \varphi$ su di

---

[1] Burmester, *Ueber den Bescleunigungszustand änlich veränderlicher und starrer ebener Systeme* (Hartig's Civilingenieur, Bd. XXIV, p. 153). — E. Novarese, *Sulle accelerazioni nel moto di una figura piana nel proprio piano* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XIX, 1884).

una retta $r$, che incontrino la $r$ in P ed H, sarà $P^{(n)}$ diretta secondo la $r$ ed $H^{(n)}$ normale alla $r$.

Chiamerò *polo* di una retta $r$ il punto di essa la cui accelerazione è diretta secondo la retta stessa, ed *ortopolo* il punto la cui accelerazione è normale alla retta.

Su di ogni retta esiste un polo ed un ortopolo, e questi due punti sono veduti sotto angolo retto dal centro delle accelerazioni.

Le rette che contengono le accelerazioni dei punti di una retta inviluppano una parabola [1] tangente alla retta, il cui fuoco è il centro delle accelerazioni. Il polo della retta è il punto di contatto della retta stessa colla parabola, e l'ortopolo è il punto d'incontro della retta colla direttrice della parabola.

I poli dei raggi di un fascio di centro $P_1$ stanno su di una circonferenza che dirò *polare* di $P_1$ che passa per $P_1$, per O, ed è tangente alla $P_1^{(n)}$.

Gli ortopoli dei raggi dello stesso fascio stanno su di una circonferenza che dirò *ortopolare* di $P_1$ che passa per $P_1$, per O, ed è normale alla $P_1^{(n)}$.

I punti diametralmente opposti a $P_1$ nelle due circonferenze corrispondenti sono allineati con O.

Ogni circonferenza passante per O è *polare* ed *ortopolare* degli estremi del diametro di essa che fa colla centrale condotta per O gli angoli $\pi - 2\varphi$ e $2\varphi$.

Ai punti del piano corrispondono come polari ed ortopolari le circonferenze passanti per O.

I cerchi polari (ed ortopolari) corrispondenti ai punti di una retta formano fascio intorno al punto O ed al polo (ovvero all'ortopolo) della retta. I due fasci hanno di comune il cerchio che ha per diametro la congiungente il polo coll'ortopolo della retta.

Siano $Q_1$ ed $H_1$ i punti diametralmente opposti di un punto $P_1$ nelle sue circonferenze polari ed ortopolari; mentre $P_1$ descrive una retta $r$, $Q_1$ ed $H_1$ descrivono le normali alla $r$ in P (polo) ed H (ortopolo) della $r$. Le due punteggiate descritte da $Q_1$ ed $H_1$ sono prospettive rispetto al centro O, ed i raggi del fascio che le proietta da O sono ortogonali ai raggi del fascio che proietta da O la punteggiata descritta da $P_1$.

Ai raggi di un fascio di centro S nel piano si possono far corrispondere univocamente le circonferenze polari (od ortopolari) dei punti in cui questi raggi incontrano una data retta $r$; le intersezioni di

---

[1] E. Novarese, l. c.



questi raggi colle circonferenze corrispondenti stanno sulla circonferenza polare (od ortopolare) di S.

Quindi il teorema di geometria: Dato un fascio di circonferenze ed una trasversale $r$ per uno dei punti base del fascio, ad ogni circonferenza si può far corrispondere il raggio che proietta da un punto S del piano il secondo punto d'incontro della circonferenza colla $r$. I punti d'incontro dei raggi del fascio di centro S colle circonferenze corrispondenti (che non stanno sulla $r$) stanno su di una circonferenza che passa per S e per il 2° punto base del fascio di cerchi.

*Torino, gennaio 1893.* F. Castellano.

---

## Intorno alle indicatrici sferiche delle linee dello spazio.

*Nota di* Geminiano Pirondini.

### 1.

Se $L_t$, $L_b$, $L_n$ sono le indicatrici sferiche delle tangenti, delle binormali e delle normali principali di una stessa linea L ($\rho$, $r$, $s$), è noto che $L_t$ e $L_b$ sono curve sferiche geodeticamente parallele, distanti fra loro di un quadrante ed aventi per evoluta sferica comune l'indicatrice delle tangenti dello spigolo di regresso L' della sviluppabile rettificatrice di L; e che la linea $L_n$ è il luogo degli estremi dei quadranti tangenti alle $L_t$, $L_b$.

Se dunque delle tre linee sferiche $L_t$, $L_b$, $L_n$ si conosce la prima o la seconda, è facile costruire le altre due.

Quando poi sia dato $L_n$, si osserverà che essa si può considerare come l'indicatrice delle binormali di L'; e perciò la $L_t$ sarà una sviluppante sferica della linea geodeticamente parallela ad $L_n$ e distante da essa di un quadrante. Costruita la $L_t$, sarà facile ricavare $L_b$.

Si deduce di qui che se due linee dello spazio L, $L_1$ hanno le normali principali parallele, le linee $L_n$, $L_{1n}$ coincidono e le due $L_t$, $L_{1t}$ sono geodeticamente parallele. Dunque:

*Se due linee dello spazio hanno le normali principali rispettivamente parallele, le tangenti in punti corrispondenti formano un angolo costante.*

Applichiamo queste considerazioni alla dimostrazione di un teorema di Bertrand.

Se L è una linea qualunque, $L_1$ il luogo degli estremi dei segmenti eguali a $k$ staccati sulle normali principali e $\theta$ l'angolo delle tangenti alle linee L, $L_1$ in punti corrispondenti, si ha la relazione

$$\frac{k\cot\theta}{r}-\frac{k}{\rho}=1\,. \tag{1}$$

Ciò posto, se le normali principali delle curve L, $L_1$ coincidono, $\theta$ è costante e la (1) mostra che fra la curvatura e la torsione di L ha luogo una relazione lineare a coefficienti costanti.

Reciprocamente fra la curvatura e la torsione di L si abbia la relazione

$$\frac{a}{r}+\frac{b}{\rho}=1\,,$$

con $a$ e $b$ costanti. Costrutta come dianzi la curva $L_1$, si avrà la relazione (1), la quale, confrontata colla relazione data, mostra che $\theta$ è costante.

Se A e $A_1$ sono due punti corrispondenti delle L, $L_1$, il piano che passa per la tangente in A alla L ed è parallelo alla tangente in $A_1$ alla $L_1$ (contenendo la tangente ed essendo perpendicolare alla normale principale di L) è il piano rettificante di L. Le immagini sferiche di punti corrispondenti delle linee L, $L_1$ sono dunque sopra archi di gran cerchio tangenti all'indicatrice dello spigolo di regresso della sviluppabile rettificatrice di L; e poichè le tangenti corrispondenti delle linee L, $L_1$ formano un angolo costante, le indicatrici delle tangenti delle L, $L_1$ sono geodeticamente parallele e conseguentemente le indicatrici delle normali principali coincidono.

Le curve L ed $L_1$ hanno così le normali principali parallele; e siccome queste normali principali, considerate a due a due, hanno un punto comune, coincidono.

La dimostrazione precedente è molto più semplice di tutte quelle che si dànno comunemente [1].

## 2.

Supposto ora che la sfera rappresentativa abbia il raggio = 1, l'arco elementare di $L_t$ misura l'angolo di contingenza di L e l'angolo di contingenza di $L_t$ è eguale all'angolo di due normali consecutive di L. Perciò

$$ds_t=\frac{ds}{\rho}\,,\qquad \frac{ds_t}{\rho_t}=\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}}\,.\,ds\,.$$

[1] V. per es. P. SERRET, *Théorie des lignes à double courbure.*



Il piano osculatore della $L_t$ è parallelo al piano che passa per la normale principale di L parallelamente alla consecutiva, cioè è parallelo al piano determinato dalla binormale e parallelo alla consecutiva nella curva L′ spigolo di regresso della sviluppabile rettificatrice di L. Ma essendo la curva L′ linea di stringimento della superficie rigata, luogo delle sue binormali, il piano precedente è il piano normale di L′.

Perciò: *Il piano osculatore dell'indicatrice* $L_t$ *è parallelo al piano normale dello spigolo di regresso* L′ *della sviluppabile rettificatrice di* L.

Essendo allora l'angolo di torsione di $L_t$ eguale all'angolo di contingenza di L′, si avrà

$$\frac{ds_t}{r_t}=\frac{d\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{r}{\rho}\right)}{ds}\,.\,ds\,;$$

e queste equazioni dànno immediatamente

$$\frac{1}{\rho_t}=\sqrt{1+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2}\,,\qquad \frac{1}{r_t}=\rho\,.\,\frac{d\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{r}{\rho}\right)}{ds}\,. \tag{2}$$

Indicando poi con $R_t$ il raggio di curvatura geodetica della linea sferica $L_t$, si ha

$$R_t=\frac{r}{\rho}\,.$$

Gli angoli di contingenza e di torsione di $L_b$ sono manifestamente eguali a quelli di $L_t$; essendo per di più l'angolo di torsione di L misurato dall'arco elementare di $L_b$, si ha

$$ds_b=\frac{ds}{r}\,,\qquad \frac{ds_b}{\rho_b}=\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}}\,.\,ds\,,\qquad \frac{ds_b}{r_b}=\frac{d\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{r}{\rho}\right)}{ds}\,.\,ds\,.$$

E da queste equazioni si ricava

$$\frac{1}{\rho_b}=\sqrt{1+\left(\frac{r}{\rho}\right)^2}\,,\qquad \frac{1}{r_b}=r\,\frac{d\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{r}{\rho}\right)}{ds}\,,\qquad R_b=\frac{\rho}{r}\,. \tag{3}$$

Poichè l'arco elementare di $L_n$ misura l'angolo di due normali principali consecutive di L, si ha

$$ds_n=\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}}\,.\,ds\,.$$

Determiniamo la direzione della tangente di $L_n$. La tangente nel punto $A_n$ di $L_n$ è perpendicolare al raggio $OA_n$ ed è situata nel piano dei due raggi consecutivi $OA_n$, $OA'_n$; essa è dunque parallela alla retta H condotta normalmente alla superficie gobba delle normali principali di L, nel punto centrale. Ma, essendo le normali principali di L parallele alle binormali di L', spigolo di regresso della sviluppabile rettificatrice di L, la minima distanza di due normali principali consecutive di L è parallela alla tangente di L'. La retta H è dunque parallela alla normale principale di L'.

Dunque: *La tangente in un punto qualunque di* $L_n$ *è parallela alla normale principale della linea* L', *spigolo di regresso della sviluppabile rettificatrice di* L.

In conseguenza di ciò l'angolo di contingenza di $L_n$ è eguale all'angolo di due normali principali consecutive di L'; perciò:

$$\frac{ds_n}{\rho_n}=\sqrt{\left(\frac{ds'}{\rho'}\right)^2+\left(\frac{ds'}{r'}\right)^2}.$$

Ora

$$\frac{ds'}{\rho'}=\frac{d\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{r}{\rho}\right)}{ds};$$

e d'altronde, essendo le binormali di L' parallele alle normali principali di L, l'angolo di torsione di L' è eguale all'angolo di due normali consecutive di L. Perciò

$$\frac{ds'}{r'}=\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}}\,.\,ds$$

e quindi

$$\frac{ds_n}{\rho_n}=\sqrt{\left\{\frac{d\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{r}{\rho}\right)}{ds}\right\}^2+\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)}\,.\,ds\,.$$

Determiniamo la direzione del piano osculatore di $L_n$. La tangente di $L_n$ è parallela alla normale principale di L', quindi è parallela alla binormale dello spigolo di regresso L'' della sviluppabile rettificatrice di L'. Dunque il piano osculatore di $L_n$ è parallelo al piano che passa per la binormale di L'' ed è parallelo alla binormale consecutiva, vale a dire: *Il piano osculatore di* $L_n$ *è parallelo al piano normale dello spigolo di regresso* L'' *della sviluppabile rettificatrice dello spigolo di regresso* L' *della sviluppabile rettificatrice di* L.

L'angolo di torsione di $L_n$ è dunque eguale all'angolo di contingenza di L''; quindi

$$\frac{ds_n}{\rho_n}=\frac{ds''}{\rho''}=d\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{r'}{\rho'}\right)=\frac{d}{ds}\,.\,\mathrm{arc\,tg}\left\{\frac{\rho r}{\sqrt{\rho^2+r^2}}\,\frac{d}{ds}\,.\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{r}{\rho}\right)\right\}ds\,.$$



Dalle formole precedenti si ricava

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{1}{\rho_n}&=\sqrt{1+\frac{\rho^2r^2}{\rho^2+r^2}\cdot\left\{\frac{d\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{r}{\rho}\right)}{ds}\right\}^2}\\ \frac{1}{r_n}&=\frac{\rho r}{\sqrt{\rho^2+r^2}}\cdot\frac{d\,\mathrm{arc\,tg}\left\{\frac{\rho r}{\sqrt{\rho^2+r^2}}\,\frac{d\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{r}{\rho}\right)}{ds}\right\}}{ds}\,.\end{aligned}\right.$$

## 3.

APPLICAZIONI. — 1ª). Sia A un punto qualunque dell'indicatrice $L_t$, A' il primo centro di curvatura sferica e A'' il secondo centro di curvatura. Il triangolo sferico rettangolo AA'A'' dà

$$\mathrm{tang}\,(A'\widehat{A}A'')=\frac{\mathrm{tang}\,(A'A'')}{\mathrm{sen}\,(AA')};$$

ma evidentemente

$$\mathrm{tang}\,(AA')=R_t=\frac{r}{\rho}\,,\qquad \text{d'onde}\qquad \mathrm{sen}\,(AA')=\frac{r}{\sqrt{\rho^2+r^2}}\,.$$

D'altronde tang (A'A'') è il raggio di curvatura geodetica $R'_t$ della indicatrice delle tangenti dello spigolo di regresso L' della sviluppabile rettificatrice di L e perciò:

$$\mathrm{tang}\,(A'A'')=R'_t=\frac{r'}{\rho'}=\frac{\frac{d}{ds}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{r}{\rho}\right)}{\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}}}\,.$$

Sarà quindi

$$\mathrm{tang}\,(A'AA'')=\rho\,\frac{d\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{r}{\rho}\right)}{ds}=\frac{1}{r_t}\,.$$

Perciò, se chiamiamo $i$ l'inclinazione dell'arco AA'' sulla linea sferica L, avremo

$$r_t=\cot\,(A'AA'')=\mathrm{tang}\,i\,,$$

e cioè: *Il raggio di torsione di una linea sferica qualunque è eguale alla tangente dell'angolo sotto il quale questa linea è segata dall'arco di cerchio massimo che congiunge il punto considerato della curva col secondo centro corrispondente di curvatura sferica.*

Osservando che il raggio della sfera che va in A è parallelo alla tangente di L, e che il raggio che va in A″ è parallelo alla retta rettificatrice di L′ (retta che chiameremo seconda retta rettificatrice di L) abbiamo:

*Le linee dello spazio aventi per indicatrice delle tangenti una curva a torsione costante sono caratterizzate dalla relazione analitica*

$$\frac{r}{\rho} = \operatorname{tang}\left(a + k\int\frac{ds}{\rho}\right), \tag{5}$$

*che lega i suoi due raggi di curvatura e dalla proprietà geometrica che è costante l'angolo formato dal piano osculatore col piano condotto per la tangente parallelamente alla seconda retta rettificatrice.*

2ª). Le geodetiche delle sviluppabili a cono direttore di rivoluzione sono caratterizzate dalla proprietà che le normali principali sono inclinate di un angolo costante sopra una retta fissa. In tale caso l'indicatrice delle normali principali è una circonferenza; e questo, in forza delle (4), avviene sempre e soltanto quando si abbia

$$\frac{d \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r}{\rho}\right)}{ds} = k\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}}\,. \tag{6}$$

Se L è una delle curve (6) ed $L_1$ una sua sviluppante, si può sempre supporre che $L_1$ sia una linea di curvatura di una certa superficie S; se $\omega$ è l'angolo sotto il quale il piano osculatore di $L_1$ sega S, si ha

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{r}{\rho}$$

e il primo membro di (6) diviene $\frac{d\omega}{ds}$. Se poi $d\varepsilon$ è l'angolo di due normali principali consecutive di L, si ha

$$\frac{d\varepsilon}{ds} = \sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}}\,;$$

ma siccome le normali principali di L sono parallele alle tangenti di $L_1$ si ha

$$d\varepsilon = \frac{ds_1}{\rho_1}\,.$$

Perciò la relazione (6) diviene

$$d\omega = k\frac{ds_1}{\rho_1}\,,$$



d'onde integrando

$$\omega = a + k\int\frac{ds_1}{\rho_1}\,.$$

Se invece noi supponiamo che L sia una curva (5) ed $L_1$ una sua evolvente e che inoltre sia tracciata una superficie S di cui $L_1$ è una linea di curvatura, avremo

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{r}{\rho}$$

e da questa, in causa della (5)

$$\omega = a + k\int\frac{ds}{\rho}\,:$$

Dunque: *Se* L *è una linea di curvatura di una superficie* S *ed* $L_1$ *la geodetica corrispondente dell'evoluta di* S, *la relazione*

$$\omega = a + k\int\frac{ds}{\rho}$$

*è caratteristica per le linee* L *che hanno per indicatrice sferica delle tangenti una linea a curvatura costante o a torsione costante, secondo che gli elementi* $s$, $\rho$ *si riferiscono alla* $L_1$ *o alla* L.

Nel primo caso la linea di curvatura è un'elica.

3ª) Dalle equazioni che dànno $\frac{1}{\rho_t}$ e $\frac{1}{\rho_b}$, eliminando il rapporto $\frac{r}{\rho}$, si deduce

$$\rho^2_t + \rho^2_b = 1\,.$$

Quindi: *La somma dei quadrati dei raggi di curvatura corrispondenti di due linee sferiche geodeticamente parallele e distanti fra loro di un quadrante, è costante ed eguale al quadrato del raggio della sfera.*

Dalle equazioni (2) e (3) si ricava

$$\frac{r}{\rho} = \frac{\rho_t}{\rho_b} = \frac{r_t}{r_b}\,,$$

cioè: *Il rapporto del raggio di torsione al raggio di curvatura di una linea qualunque è eguale al rapporto del raggio di curvatura o di torsione dell'indicatrice delle tangenti, al raggio di curvatura o di torsione dell'indicatrice delle binormali.*

Deriva di qui la proporzione

$$\frac{\rho_t}{r_t} = \frac{\rho_b}{r_b}\,,$$

cioè: *In due linee sferiche geodeticamente parallele e distanti fra loro di un quadrante il rapporto del raggio di curvatura al raggio di torsione è il medesimo.*

4.

Se L e $L_1$ sono due linee dello spazio aventi le normali principali parallele, le loro indicatrici delle normali principali coincidono.

Perciò le formole (4), relative alla linea L, coincidono colle altre che si deducono dalle (4) cambiando $\rho$, $r$, $s$ in $\rho_1$, $r_1$, $s_1$. Si riconosce allora facilmente che le equazioni che si ottengono si riducono alle altre

$$\frac{\rho r}{\sqrt{\rho^2+r^2}}=\frac{\rho_1 r_1}{\sqrt{\rho_1^{\,2}+r_1^{\,2}}}\frac{ds}{ds_1}\,,\qquad d\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{r}{\rho}\right)=d\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{r_1}{\rho_1}\right).$$

Si supponga che sulle linee L, $L_1$ i punti in cui le normali principali sono parallele, siano quelli per i quali $s=s_1$. L'ultima delle precedenti dà

$$\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{r_1}{\rho_1}\right)=\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{r}{\rho}\right)+\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{1}{a}\right)$$

con $a$ costante arbitraria. Di qui si ricava

$$\frac{r_1}{\rho_1}=\frac{\rho+ar}{a\rho-r}\,;$$

ed allora, considerando quest'equazione e la prima delle precedenti, si ottiene

$$\frac{1}{\rho_1}=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\left(\frac{1}{r}+\frac{a}{\rho}\right);\qquad \frac{1}{r_1}=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\left(\frac{a}{r}-\frac{1}{\rho}\right). \tag{7}$$

Perciò: *Se due linee a doppia curvatura si corrispondono punto per punto in modo, che in punti corrispondenti gli archi siano eguali e le normali principali siano parallele, la curvatura e la torsione di ciascuna di esse sono funzioni lineari della curvatura e della torsione dell'altra.*

Ne viene di conseguenza che se una delle linee è a curvatura costante, ovvero a torsione costante, ovvero è un'elica, ovvero una linea di Bertrand, l'altra è, in generale, una linea di Bertrand.

Sono nella condizione delle linee precedenti due geodetiche corrispondenti di due superficie ad area minima coniugate.

Però fra gli elementi di queste linee vi è un'altra relazione, che non si ha quando esse si considerino libere nello spazio.



Siano L ed $L_1$ due linee corrispondenti qualunque di due superficie ad area minima coniugate; rappresentando le due superficie sopra una sfera col metodo di Gauss, le immagini delle due curve L ed $L_1$ coincidono in una sola curva $l$.

Sia $p$ un punto qualunque di $l$ corrispondente ai punti P e $P_1$ di L e $L_1$. Sia poi $L_c$ una linea di curvatura di S passante per P e $L_a$ l'assintotica corrispondente di $S_1$ passante per $P_1$. Siccome le linee di curvatura di una superficie nella rappresentazione di Gauss non soffrono deviazioni, ed invece le assintotiche deviano di un angolo retto dalla direzione primitiva [1], la tangente in $p$ alla $l$ è parallela alla tangente di $L_c$ in P e ortogonale alla tangente di $L_a$ in $P_1$. Le tangenti di $L_c$ e $L_a$ in punti corrispondenti P e $P_1$ sono dunque perpendicolari.

Essendo quindi le normali alle due superficie in P e $P_1$ parallele ed inoltre l'inclinazione delle curve L, $L_c$ eguale a quella delle curve $L_1$, $L_a$, si conclude che sono pure ortogonali le tangenti delle L, $L_1$ in punti corrispondenti.

Dunque: *Se due superficie ad area minima coniugate in applicabilità sono orientate in modo che le normali in punti corrispondenti siano parallele, si ha che le tangenti a due linee corrispondenti in punti corrispondenti sono perpendicolari.*

Ora se L e $L_1$ sono due geodetiche corrispondenti delle superficie, l'indicatrice delle tangenti di L sarà l'indicatrice delle binormali di $L_1$ e conseguentemente il raggio di curvatura dell'indicatrice delle tangenti di L sarà eguale al raggio di curvatura dell'indicatrice delle binormali di $L_1$. Avremo dunque

$$\frac{r}{\rho}=\frac{\rho_1}{r_1}\,;$$

e questa relazione, unita alle (7), ci dà

$$\rho_1=r\,,\qquad r_1=-\rho\,.$$

Si ha così il seguente teorema dimostrato per altra via dal signor prof. Bianchi [2]: *Quando una superficie ad area minima* S *si è ridotta per flessione alla sua coniugata* $S_1$, *sopra di questa si trova che una geodetica qualunque ha acquistato per raggio di curvatura e di torsione il raggio di torsione e di curvatura che sopra* S *aveva la geodetica corrispondente.*

---

(1) Dini, *Sopra alcune formole generali della teoria delle superficie e loro applicazioni.* (*Annali di Matematica*, serie II, tomo IV).

(2) *Sopra una proprietà caratteristica delle superficie minime.* (*Giornale di Battaglini*, 1884).

## 5.

Sia

$$dS^2 = E du^2 + G dv^2$$

il quadrato dell'elemento lineare di una superficie S riferita alle sue linee di curvatura e

$$dS'^2 = E' du^2 + G' dv^2$$

il quadrato dell'elemento lineare corrispondente della sfera, sulla quale si rappresenta la superficie col metodo di GAUSS.

Essendo L una linea di curvatura del sistema $v =$ cost. e L' la sua immagine sferica, poichè le tangenti di queste due linee in punti corrispondenti sono parallele e così pure i piani osculatori, si avrà

$$\frac{ds}{\rho} = \frac{ds'}{\rho'}, \qquad \frac{ds}{r} = \frac{ds'}{r'}.$$

Ora, se R è il raggio di curvatura principale della superficie S relativo alle linee di curvatura $v =$ cost., si ha

$$R = \sqrt{\frac{E}{E'}}.$$

Perciò avremo

$$\rho' = \frac{\rho}{R}, \qquad r' = \frac{r}{R}. \tag{8}$$

Consideriamo due superficie ad area minima coniugate, nel senso stabilito da BONNET; sia $L_c$ una linea di curvatura sopra una di esse e $L_a$ la linea assintotica corrispondente sull'altra. Le normali alle due superficie in punti corrispondenti delle due linee $L_c$, $L_a$ sono parallele, e quindi, rappresentando le due superficie sopra una medesima sfera col metodo di GAUSS, si trova che le due immagini sferiche di $L_c$ e $L_a$ coincidono.

Fra i raggi di curvatura $\rho_c$, $r_c$ di $L_c$ e quelli $\rho'_c$, $r'_c$ della sua immagine L' sussistono le relazioni (8)

$$\rho'_c = \frac{\rho_c}{R}, \qquad r'_c = \frac{r_c}{R}.$$

essendo R il valore assoluto dei raggi di curvatura della superficie data.

In quanto ad $L_a$, essa ha per immagine sferica l'indicatrice delle sue binormali; e perciò, in causa delle equazioni (3), fra i raggi di curvatura $\rho_a$, $r_a$ di $L_a$ e quelli $\rho'_a$, $r'_a$ della sua immagine $L'_a$ sussistono le relazioni



$$\frac{1}{\rho'_a} = \sqrt{1 + \left(\frac{r_a}{\rho_a}\right)^2}, \qquad \frac{1}{r'_a} = r_a \frac{d \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r_a}{\rho_a}\right)}{ds_a}.$$

Osservando quindi che $\rho'_c = \rho'_a$ e $r'_c = r'_a$, avremo

$$\frac{R}{\rho_c} = \sqrt{1 + \left(\frac{r_a}{\rho_a}\right)^2}, \qquad \frac{R}{r_c} = \frac{d \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r_a}{\rho_a}\right)}{ds_a}.$$

Ora notiamo che le due superficie ad area minima coniugate sono applicabili e quindi, nella deformazione di una nell'altra, il valore del raggio di curvatura R rimane immutato. Ma quando $L_c$ si è trasformato in $L_a$, si verifica il noto teorema di ENNEPER sulla torsione delle assintotiche, teorema che è espresso dall'equazione

$$R = r_a.$$

Introducendo questa condizione nelle precedenti equazioni e risolvendo poi le equazioni ottenute anche rapporto a $\rho_a$ e $r_a$, si ha il teorema:

*Fra i raggi di curvatura $\rho_c$, $r_c$ di una linea di curvatura di una superficie ad area minima e i raggi di curvatura $\rho_a$, $r_a$ dell'assintotica corrispondente della superficie ad area minima coniugata alla prima, hanno luogo le relazioni*

$$\frac{1}{\rho_c} = \sqrt{\frac{1}{\rho_a^2} + \frac{1}{r_a^2}}, \qquad \frac{1}{r_c} = \frac{d \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r_a}{\rho_a}\right)}{ds_a}$$

$$\frac{1}{\rho_a} = \frac{\operatorname{sen}\left(k + \int \frac{ds_c}{r_c}\right)}{\rho_c}, \qquad \frac{1}{r_a} = \frac{\cos\left(k + \int \frac{ds_c}{r_c}\right)}{\rho_c},$$

*essendo k una costante arbitraria.*

Dalle relazioni precedenti si rileva immediatamente che l'angolo di contingenza di $L_c$ è eguale all'angolo di 2 normali principali consecutive di $L_a$; e che l'angolo di torsione di $L_c$ è eguale all'angolo di contingenza dello spigolo di regresso della sviluppabile rettificatrice di $L_a$.

La condizione che risulti $\frac{1}{r_c} = 0$ è equivalente all'altra che risulti $\frac{r_a}{\rho_a}$ costante.

Perciò: *Se la linea di curvatura* $L_c$ *è piana, la linea assintotica* $L_a$ *è un'elica, e reciprocamente.*

Quando $r_c$ sia una costante $h$, si ha

$$\frac{r_a}{\rho_a} = \text{tang}\left(\frac{s_a}{h} + k\right) \cdot$$

e reciprocamente. Notando quindi che $\frac{r_a}{\rho_a}$ rappresenta la tangente dell'angolo $i$ sotto il quale la linea $L_a$ sega le generatrici della sviluppabile rettificatrice, si ha:

*Se la linea di curvatura* $L_c$ *è a torsione costante, l'assintotica* $L_a$ *sega le rette rettificatrici sotto un angolo funzione lineare dell'arco; e reciprocamente.*

Si osservi che se L è una linea qualunque ed $L_1$ una sua sviluppante, si può sempre considerare $L_1$ come linea di curvatura di una certa superficie ed L come la geodetica corrispondente dell'evoluta.

Applicando allora le (2), (8), si ha

$$\rho_1 = R\rho_t = = R\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}, \qquad r_1 = Rr_t = R \cdot \rho \frac{d \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r}{\rho}\right)}{ds} \cdot$$

essendo R la distanza fra i punti corrispondenti delle linee L, $L_1$.

## 6.

Per mostrare, con un ulteriore esempio, quale utile partito si possa trarre dalla teoria delle indicatrici nello studio di molte questioni geometriche, applicheremo le formole del § 2 alla risoluzione di un problema inerente alle superficie rigate.

Si deformi per flessione e con continuità una superficie rigata $\Sigma$ in modo che le generatrici rimangano rettilinee e, per ciascuno stato che assume la $\Sigma$ si costruisca la superficie rigata coniugata $\Sigma_1$. Si vuol vedere se le infinite forme assunte da queste superficie $\Sigma_1$ si possono considerare ottenute deformando per flessione una stessa superficie rigata.

Incominciamo dal notare che le generatrici di $\Sigma$, quelle di $\Sigma_1$ e le normali comuni alle due superficie coniugate lungo la loro linea di stringimento comune $L_0$ sono parallele alle tangenti, alle binormali e alle normali principali di una stessa curva L $(\rho, r)$ *(direttrice)*. Se dunque chiamiamo $\varepsilon$ ed $\varepsilon_1$ gli angoli infinitesimi di due generatrici consecutive delle $\Sigma$ e $\Sigma_1$, avremo

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = \frac{r}{\rho} \cdot$$



Nella deformazione di $\Sigma$ la quantità $\varepsilon$ rimane invariata; se quindi anche la $\Sigma_1$ si deforma per flessione, la $\varepsilon_1$ deve pure essere invariabile. Quindi sarà invariabile il rapporto $\frac{r}{\rho}$, cioè (§ 1) il raggio di curvatura geodetica dell'indicatrice delle tangenti di L (*direttrice sferica della superficie rigata*).

Sia A la direttrice sferica della superficie $\Sigma$, considerata nella forma primitiva e B la direttrice di una deformata di $\Sigma$. Poichè l'arco elementare di queste curve misura l'angolo infinitesimo di due generatrici consecutive, il quale angolo rimane inalterato nelle predette deformazioni, avremo che le due linee sferiche A e B si corrispondono punto per punto in modo, che in punti corrispondenti gli archi sono eguali e i raggi di curvatura geodetica sono i medesimi. Dovendo allora le due curve sferiche A e B avere i loro raggi di curvatura geodetica esprimibili per una stessa funzione del loro arco, sono identiche di forma e solamente differiscono per la loro posizione sulla sfera.

L'indicatrice delle tangenti della linea di stringimento $L_0$ corrispondente alla forma primitiva di $\Sigma$ è una linea sferica $a$ che si ottiene dalla A staccando sugli archi di gran cerchio normali ad A degli archi misuranti le inclinazioni di $L_0$ sulle generatrici di $\Sigma$. Costruendo in egual modo l'indicatrice $b$ delle tangenti della linea di stringimento $L'_0$ corrispondente alla nuova forma di $\Sigma$, si ha che pure $a$ e $b$ sono identiche di forma.

E dando al sistema di linee B, $b$, invariabilmente connesse fra loro, un conveniente movimento sulla sfera, si può farle coincidere colle linee A, $a$.

Dando quindi alla superficie deformata di $\Sigma$ un conveniente movimento nello spazio, si può far sì, che le generatrici divengano parallele alle corrispondenti della superficie $\Sigma$ e che le tangenti alla linea $L'_0$ divengano parallele alle corrispondenti di $L_0$.

Allora in questa posizione le due curve $L_0$, $L'_0$ si corrispondono punto per punto in modo, che in punti corrispondenti gli archi sono eguali e le tangenti parallele; e quindi esse sono eguali. Ciò porta alla conseguenza che le due superficie $\Sigma$ e $\Sigma'$ sono identiche, il che non può essere, essendo avvenuta una deformazione per flessione della $\Sigma$ onde ridursi alla $\Sigma'$.

Abbiamo dunque il teorema: *Se una superficie rigata* $\Sigma$ *si deforma per flessione, conservando rettilinee le generatrici, e per ciascuna forma di* $\Sigma$ *si costruisce la superficie coniugata* $\Sigma_1$, *fra le infinite superficie* $\Sigma_1$ *non se ne possono mai trovare due che siano applicabili fra loro, colla condizione che le generatrici rettilinee siano corrispondenti.*

## RECENSIONE

*Elementi di Aritmetica e Algebra, esposti con metodo sintetico* da GIOVANNI BIASI (Sassari, Giovanni Gallizzi).

« Non ho potuto seguire il sig. Bettazzi, dal quale tolsi alcune denominazioni, nello studiare le grandezze indipendentemente dal concetto di numero intero, . . . . . Allo studio delle grandezze posi dunque innanzi una breve teorica dei numeri naturali; e siccome questi, nella loro origine, sono riguardati da taluni come indici d'ordine, da altri come quantità o somme di unità, tentai conciliare i due metodi . . . . . » (Prefazione, pag. III e IV).

Non risulta ben chiaro che cosa l'A. intenda dire con le parole « come indici di ordine » e « come quantità o somme di unità », ma se avesse voluto dire, come pare possa rilevarsi dal testo, che il concetto di numero può ottenersi da quello di ordine o da quello di successivo (insieme ad altri), allora avrebbe detto cosa non ancora provata, perchè non abbiamo una *teoria* del numero intero dedotta dal concetto di ordine, mentre abbiamo una completa teoria del numero intero dedotta dal concetto di successivo e della quale il concetto di ordine è conseguenza, dipendentemente anche dal concetto di corrispondenza univoca e reciproca. Nè l'A. tentando conciliare i due metodi, ha provato che il primo sia possibile, anzi, allo scopo di togliere l'inconveniente accennato nell'opera del prof. Bettazzi, cade nell'altro più grave di trattare con pochissimo rigore scientifico la teoria del numero intero — e in gran parte anche delle grandezze — teoria che può dirsi oggi completamente nota.

Ecco infatti su quali definizioni basa l'A. la teoria del numero intero.

N. 1, pag. 1. « Per *cosa* si intenderà qualunque oggetto del nostro pensiero ». E che cosa significa?

« Una cosa e un'altra insieme sono *due* cose . . . . . ; l'una si dirà *prima* . . . . . l'altra . . . . . ». È con questa definizione che l'A., come avverte nella prefazione, intende di introdurre il concetto d'ordine. È però evidente che la definizione si limita ad *assegnare un nome a cose già note o supposte note*, e non dà nessuna delle loro proprietà caratteristiche.

N. 3, pag. 1. « Le cose semplici sono *diverse* o sono la stessa cosa ». E quando è che sono diverse? E cose *che sono la stessa cosa che cosa significa?* Non pare che l'A. abbia voluto definire l'eguaglianza perchè di questa parla al N. 10. Allora?

N. 4, pag. 2. « Un sistema si dirà *infinito* se dopo aver pensato più cose del sistema sia possibile pensarne altre ancora o, brevemente, se si possa *continuare indefinitamente* a pensare nuove cose del sistema. In caso diverso si dirà finito ». In altri termini, e molto brevemente, — *un sistema è infinito quando è infinito, è finito quando non è infinito.* —



La definizione dell'A. non significa altro. E bisogna notare poi esplicitamente, che in questa definizione sta la chiave della possibile *conciliazione dei due metodi*, già accennati, non essendo possibile di parlare di corrispondenza univoca e reciproca di due classi se esse non sono costituite da un numero finito di individui.

N. 10, pag. 4. « Due cose semplici sono eguali se sono la stessa cosa; due cose composte si dicono eguali se per lo scopo che ci proponiamo, si può prendere indifferentemente l'una o l'altra, ossia, se l'una può essere sostituita all'altra ». La definizione di eguaglianza di cose semplici ha del metafisico ed è ben difficile assegnargli un senso qualunque. Per la definizione di eguaglianza di cose composte (che non ha nessuna relazione con la precedente ed è quindi strano che sieno unite in uno stesso periodo) la parte che precede l'*ossia* suona, *due cose composte sono eguali quando sono eguali*, la parte che segue l'*ossia* non è vera in generale, com'è già stato indicato in questa *Rivista* (pag. 191, vol. II) (1). L'A. una volta presa la seconda parte di questa definizione ne trae partito fino a dimostrare la proposizione (pag. 5) $a = b \,.\, \supset .\, a + c = b + c$, mentre vi sono classi per le quali definita l'eguaglianza con le sue tre proprietà caratteristiche e l'operazione $+$ definita convenientemente, per la quale la proposizione riportata non è vera. P. e. la classe dei razionali, quando l'eguaglianza sia intesa nel senso ordinario e l'operazione $+$ sia tale che se $a$ e $b$ sono razionali, $a + b$ indichi la somma, nel senso ordinario aritmetico, dei loro numeratori.

N. 14, pag. 6. « Se le cose di una pluralità si considerano soltanto come cose, senza pensare agli elementi che distinguono le une dalle altre, la pluralità prende il nome di numero naturale . . . . . » È questa la *definizione* di numero intero, il cui significato matematico non esiste, e il cui significato ordinario porterebbe a concludere che, p. e., la classe delle rette di un piano o dello spazio diviene la classe dei numeri quando si faccia astrazione dalla posizione degli individui della classe.

N. 15. « *Teorema*. Un numero non varia se si muta in qualsiasi modo l'ordine delle sue unità ». Questo teorema avrebbe senso quando fosse stata data una relazione caratteristica tra l'ordine delle unità componenti la pluralità numero (secondo l'A.) e il numero, e fosse definito il significato della parola ordine. L'A. non ha fatto nè l'una cosa nè l'altra e quindi il teorema non ha alcun significato. Di più nella dimostrazione si trova (pagina 7, riga 10 e 11) « il numero delle une sarà eguale al numero delle

(1) La classe *eguaglianza*, della quale sono gruppi, la *proiettività*, il *parallelismo* (convenientemente definito), la *similitudine*, l'*equivalenza*, ... è definita, come è noto, se $a$, $b$, $c$ sono individui della classe che si considera, dagli assiomi $a = a$; $a = b \,.=.\, b = a$; $a = b \,.\, b = c \,.\supset.\, a = c$. Il prof. De Amicis (*Rivista*, vol. II, pag. 113) dimostra (pag. 115, T. I) che la proposizione $a = a$ è conseguenza delle altre due, ammettendo come proprietà degli individui della classe G che si considera la seguente $a \,\varepsilon\, G \,.\supset: b \,\varepsilon\, G \,.\, a = b \,.-=_b \Lambda$, cioè *esistono* dei $b$ eguali ad $a$. Con ciò egli viene ad ammettere come primitiva una proposizione più complicata di quella che vuol dimostrare, proposizione che serve, senza che sia necessario, a giustificare ipotesi di questa specie $a,\, b \,\varepsilon\, G \,.\, a = b$ . . . . .

altre » e con ciò l'autore ammette, senza averlo definito, come noto il significato della frase, *numero degli individui di una classe*, cioè, una volta di più, ammette completamente noto il concetto di numero intero che vuol definire.

N. 16, pag. 7. Il teorema, $a$, $b$ sono numeri dei tre casi $a=b$, $a>b$, $a<b$ deve verificarsene uno ed uno solo, non è affatto dimostrato dall'A., nè può dedursi dalla definizione del N. 16, che contiene proprietà che precedentemente non sono state dimostrate.

N. 25, pag. 12. « Se essendo dati i numeri delle cose di più sistemi, astraendo dagli elementi distintivi di questi sistemi, le cose stesse si considerano come appartenenti ad un unico sistema, il numero delle cose di questo sistema si dice *somma* dei numeri dati . . . . . » L'*unico sistema* a cui i due sistemi appartengono non è detto dall'A. qual sia, perchè sarebbe stato costretto a dire che la somma è la somma, e quindi il suo teorema equivale al seguente:

$$a,\ b,\ c\,\varepsilon\,K\,.\,a\supset c\,.\,b\supset c:\supset:\mathrm{num}\,a+\mathrm{num}\,b=\mathrm{num}\,c$$

che è un teorema falso.

N. 49, pag. 24. Dopo aver parlato della divisione come operazione inversa della moltiplicazione — e ciò poco opportunamente non essendo introdotti i razionali — ed aver detto che la moltiplicazione ammette una sola operazione inversa perchè $ab=ba$, aggiunge: « Tuttavia questi due casi ($ab=ba$) differiscono l'uno dall'altro nei problemi cui si applica la divisione, ossia quando si tenga conto della natura delle unità dei numeri sui quali si opera ». Quale unità, quella astratta di cui si è finora parlato o quella concreta di cui si parlerà in seguito? Se di quella astratta allora la proposizione non ha senso, se di quella concreta non ha ancora senso, poichè l'A. stesso non ha definito il significato di *prodotto di due grandezze*.

E lasciamo la teoria dei numeri interi per passare a quella delle grandezze.

A pag. 31, n. 66, l'A. dice che le cose di un sistema si chiameranno *grandezze*, quando esse avranno la proprietà *aggregativa uniforme*, l'*associativa* e la *commutativa*. Al n. 67 poi dice che il sistema di grandezze si chiamerà *ordinario* e *completo* quando, oltre che alle precedenti condizioni, soddisfa a quella che dati due individui del sistema, uno almeno di cui sia la risultante dell'altro e di un terzo individuo del sistema. Indicando con G la parola grandezza e con $A \times B$ (come l'A.) la risultante (o somma) delle grandezze A e B, secondo l'A. un sistema è *ordinario* e *completo* quando gode delle proprietà

$\alpha$) $A,\ B\,\varepsilon\,G\,.\supset.\,A\times B\,\varepsilon\,G$,
$\beta$) $A,\ B,\ C\,\varepsilon\,G\,.\supset.\,A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$,
$\gamma$) $A,\ B\,\varepsilon\,G\,.\supset.\,A\times B=B\times A$,
$\delta$) $A,\ B\,\varepsilon\,G\,.\supset:A\,\varepsilon\,B\times G\,.\cup.\,B\,\varepsilon\,A\times G$.

Così p. e. la classe dei numeri interi, dei razionali, dei numeri reali, dai quali si escluda lo zero, non è un sistema completo anche quando la



risultante sia l'ordinaria somma, poichè la proprietà $\delta$ non è vera, potendo due numeri essere eguali.

A pag. 45, n. 97, l'A. dice che « Date due grandezze A, B di un sistema ordinario completo e a un senso, o esse sono eguali, o A è la risultante di A e di una terza grandezza, o B è la risultante di A e di una terza grandezza. Deve aver luogo uno e uno solo dei casi seguenti

$$A=B\ .\ A>B\ .\ A<B\text{ ».}$$

In altri termini l'A. dalle proposizioni $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ dice potersi dedurre le proposizioni

$\delta'$) $A,\ B\,\varepsilon\,G\,.\supset:A=B\,.\cup.\,A\,\varepsilon\,B\times G\,.\cup.\,B\,\varepsilon\,A\times G$
$\gamma$) $A\,\varepsilon\,G\,.\supset.\,A\,-\!\varepsilon\,A\times G$

(poichè è da $\gamma$ che può dedursi l'esistenza di *uno solo* dei tre casi citati).

Ora che $\delta'$ non è conseguenza delle $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ è già stato dimostrato, che $\gamma$ non è conseguenza delle stesse proposizioni si dimostra considerando i sistemi che contengono lo zero (o la grandezza indifferente).

Di più l'A. per la dimostrazione del teorema del n. 100 e altri, fa uso della proposizione $A,\ B\,\varepsilon\,G\,.\,A\geqq B\,.\supset.\,A\cup B\,\varepsilon\,G$ (1). E dove è stato dimostrato tale teorema? Non certo alla fine della pag. 45 ove dice solo che « Si noti poi che la divergenza $A\cup B$ è solo *possibile* se $A\geqq B$ ». E del resto, come potrebbe dimostrarlo senza ammettere che il sistema ordinario e completo godesse della proprietà

$\varepsilon$) $A,\ B,\ C\,\varepsilon\,G\,.\,A\times C=B\times C\,.\supset.\,A=B$

per non parlare della proprietà

$\eta$) $A,\ B,\ C\,\varepsilon\,G\,.\,A=B\,.\supset.\,A\times C=B\times C$ ?

Che poi la $\varepsilon$ non sia conseguenza delle proposizioni $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ si ha considerando p. e. la classe dei razionali, lo zero compreso, e dando ad $A\times B$ il significato dell'ordinario prodotto.

Non credo che ulteriori osservazioni sul *Trattato* del sig. Biasi possano destare alcun interesse nel lettore, essendo tutte basate nella deficienza di proprietà caratteristiche della classe di grandezze, e quindi sulla deficienza di accurata analisi per l'ordinamento del lavoro.

*Torino, Gennaio 1893.* BURALI-FORTI CESARE.

---

(1) Il segno $\dot{\cup}$ indica, secondo l'A., l'operazione inversa di quella già indicata con $\times$.

# Sui sistemi lineari di coni.

*Nota di* Mario Pieri.

Si tratta qui di coni algebrici, irreduttibili, d'ordine qualunque, dello spazio ordinario; e il problema che si risolve è quello di assegnare tutti i sistemi lineari, che hanno tali superficie (considerate come *luoghi di punti*) per elementi generici, senza aver per sostegno una stella.

**1.** Sia $(\varphi)$ un *fascio* di coni irreduttibili $\varphi^n$ d'ordine $n$. Poichè per un punto arbitrario dello spazio passa una e (generalmente) una sola superficie di questo sistema, la totalità delle generatrici di tali coni non potrà essere che una *congruenza Kummeriana* (o del 1° ordine) $\Gamma$ *di raggi*, vale a dire una stella di raggi, o il sistema delle corde di una cubica sghemba irreduttibile, o il sistema delle rette appoggiate simultaneamente ad una retta data $c$ e ad una curva data irreduttibile $\gamma^p$ d'ordine $p$, la quale incontri $p-1$ volte $c$ $(p \geqq 1)$. Nel primo caso sarà $(\varphi)$ un fascio di coni aventi per comun centro il centro della stella: viceversa è chiaro, che un fascio di coni $\varphi^n$ col vertice in comune non può dar luogo a nessuno degli altri due casi. Il secondo caso è evidentemente impossibile; attesochè ogni cono irreduttibile composto di corde della cubica è necessariamente un cono quadrico proiettante la medesima da un suo punto qualunque, e l'insieme di tali coni costituisce un sistema $\infty^1$ d'indice 2.

Nel terzo caso infine una delle due linee *focali* $c$ e $\gamma^p$ sarà il luogo dei centri di tutti i coni del sistema, poi che ognuno di tali centri è punto *singolare* per $\Gamma$; e l'altra linea dovrà esser comune a tutti quanti i coni del sistema, dal momento che per ogni suo punto passano $\infty^1$ rette di $\Gamma$ e quindi $\infty^1$ coni $\varphi^n$. Pertanto, se il luogo dei vertici è la curva $\gamma^p$, le superficie coniche $\varphi$ saranno fasci di raggi proiettanti la retta $c$ dai vari punti di $\gamma$ (onde $n=1$); e se il luogo dei vertici è la retta $c$, i coni $\varphi^n$ proietteranno la curva $\gamma^p$ dai vari punti di $c$ (onde $n=p$). Ed osservando che nell'un caso e nell'altro l'insieme di tutti i coni formati nel modo anzidetto è realmente un *fascio* di superficie (in quanto che per un punto qualunque dello spazio ne passa uno e generalmente uno solo), si deduce che:

« *Se $\gamma^n$ è una curva (razionale) dotata di una secante $(n-1)$-pla $c$,*
« *gli $\infty^1$ fasci di raggi che proiettano la retta $c$ dai punti di $\gamma$ formano il più generale possibile tra i* f a s c i *di coni del* 1° *ordine a centro variabile; e gli $\infty^1$ coni (razionali) proiettanti la curva $\gamma^n$ dai punti di $c$ (quindi contenenti questa retta come generatrice $(n-1)$-pla*



« *e osculati lungo tutta la medesima dagli $n-1$ piani passanti per* « *essa e per le tangenti a $\gamma^n$ negli $n-1$ punti comuni) formano il* « *più generale possibile tra i* f a s c i *di superficie coniche d'ordine* « *$n>1$ a centro variabile* ». — La *base* del fascio è nell'un caso la retta $c$; nell'altro è formata dalla curva $\gamma^n$ e dalla retta $c$ contata $(n-1)^2+(n-1)=n(n-1)$ volte.

Da ciò, e dalle più semplici proprietà dei sistemi lineari a due, tre, quattro, ..... dimensioni, si deducono tutti i sistemi lineari di dimensione qualunque, i cui elementi generici siano coni irreduttibili d'ordine $n$ a centro variabile.

**2.** E in primo luogo trattandosi di un sistema lineare di coni $\varphi^1$ del 1° ordine, è chiaro che i piani sostegno di tali coni dovranno formare un sistema lineare di egual dimensione (dal momento che ogni fascio di $\varphi^1$ ha per sostegno un ordinario fascio di piani): quindi, o una stella di piani, o uno spazio di piani.

Nel primo caso ogni piano della stella conterrà un cono $\varphi^1$ del sistema, e non potrà contenere il centro di nessun altro cono del sistema: perciocchè due coni qualunque della rete individuano un fascio di coni $\varphi^1$, e quindi (n. 1) il piano sostegno di uno qualunque di essi non può passare pel centro dell'altro. Dunque il luogo dei centri dei vari coni del sistema è allora necessariamente una *curva* $\gamma^p$ d'ordine $p$ dotata di un punto $(p-1)$-plo nel centro della stella; e ogni punto di questa linea sarà centro di $\infty^1$ coni $\varphi^1$ componenti un fascio del sistema. Pertanto:

« *La* r e t e *più generale di coni del* 1° *ordine a centro variabile* « *consta degli $\infty^2$ fasci di raggi, che proiettano un medesimo fascio* « *di rette dai vari punti d'una curva (piana razionale) $\gamma^p$ d'ordine $p$,* « *la quale abbia un punto $(p-1)$-plo nel centro del fascio $(p \geqq 1)$,* « *ma non giaccia nel piano di questo* ».

Se trattasi invece di un sistema lineare triplo di coni $\varphi^1$, la stessa argomentazione prova, che il luogo dei centri di tutti i coni del sistema è necessariamente una *retta*, ogni punto della quale è centro di $\infty^2$ coni del sistema formanti una rete. Laonde:

« *V'è un solo sistema lineare* t r i p l o *di coni del* 1° *ordine, ed è* « *quello formato dagli $\infty^3$ fasci di raggi proiettanti le rette di un* « *dato piano dai vari punti d'una retta data, non appartenente al* « *medesimo* ».

Non esistono sistemi lineari di coni $\varphi^1$, con dimensione maggiore di 3.

**3.** In secondo luogo supposto $n>1$, la condizione che due qualunque $\varphi^n$ di un medesimo sistema lineare $\infty^t$ debbano appartenere ad un medesimo fascio di coni, trae subito con sè, che il luogo dei centri di tutti i coni del sistema abbia ad essere una linea retta $c$, ecc.; d'onde segue facilmente che:

« *Ogni sistema lineare di coni $\varphi^n$ d'ordine $n > 1$ a centro variabile è formato di coni (razionali) aventi a comune una generatrice $(n-1)$-pla $c$ e gli $n-1$ piani osculatori lungo tutta la medesima: e questa generatrice è il luogo dei centri di tutti i coni del sistema. Se $i$ è la dimensione del sistema, questo sarà individuato da $i+1$ coni $\varphi^n$ linearmente indipendenti, i quali passino $n-1$ volte per una stessa retta arbitraria $c$ toccando lungo questa gli stessi $n-1$ piani arbitrari, senza per altro avere tutti quanti un medesimo vertice. Per conseguenza, la dimensione $i$ non potrà superare il numero $n+2$; e il sistema di massima dimensione si otterrà proiettando dagli $\infty^1$ punti d'una retta $c$ il sistema lineare $\infty^{n+1}$ formato da tutte le curve d'ordine $n$ d'un piano arbitrario che hanno, nella traccia di questo piano sulla retta $c$, un punto $(n-1)$-plo e le relative $n-1$ tangenti a comune* ». — E un sistema lineare di coni $\varphi^n$ a centro variabile (che non sia un fascio di coni) non potrà aver *linee basi* diverse dalla retta $c$, nè *punti base* altro che *semplici* e in numero non superiore ad $n$.

**4.** Merita di esser segnalato il caso di un sistema lineare di coni d'ordine $n$ a centro variabile con $n-1$ punti base (semplici); perciocchè esso è necessariamente un *sistema triplo omaloidico, anzi l'unico sistema omaloidico, o cremoniano, di coni.* Un cosiffatto sistema è individuato da quattro coni d'ordine $n$ linearmente indipendenti e non aventi un medesimo vertice, i quali, oltre a passare per $n-1$ punti P dati ad arbitrio, contengano una stessa retta $c$ come generatrice $(n-1)$-pla e siano toccati dagli stessi $n-1$ piani $\alpha$ lungo tutta questa retta; e si compone di tutti i coni soddisfacenti a tali condizioni.

Facendo corrispondere proiettivamente gli $\infty^3$ coni $\varphi^n$ di detto sistema ai piani d'uno spazio $\Sigma_1$ si otterrà, fra lo spazio punteggiato $\Sigma_1$ e lo spazio punteggiato $\Sigma$ generato da quei coni, *una trasformazione birazionale* T *d'ordine $n$ e genere zero,* la cui inversa $T^{-1}$ è ancora d'ordine $n$ e della stessa natura: alle rette di $\Sigma_1$ corrisponderanno in $\Sigma$ le curve d'ordine $n$, che incontrano $n-1$ volte la retta fondamentale $c$ toccando in questi punti d'appoggio gli $n-1$ piani fondamentali $\alpha$, e passano ancora per gli $n-1$ punti fondamentali P. Ma per $n=2$ questa corrispondenza è un caso particolare di quella descritta dal Cremona al n° 21 della memoria: *Sulle trasformazioni razionali dello spazio* (Ann. di Matem., serie 2ª, t. V, 1870); e per $n$



qualunque essa è una modificazione della corrispondenza birazionale, in cui entrambi i sistemi omaloidici constano di superficie rigate d'ordine $n$ (necessariamente dotate di una generatrice $(n-1)$-pla); trasformazione ben nota per i lavori dei signori Segre [1], Montesano [2] e Loria [3].

*Torino, Gennaio 1892.*

---

# Sviluppo del determinante

$$\begin{vmatrix} u & 1 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & u & 1 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u & 1 & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 1 & u & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 1 & u & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 1 & u \end{vmatrix}$$

# e relazioni notevoli che ne derivano.

*Nota di* **V. Mollame.**

**1.** Si ha:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ {\scriptstyle 2} \\ \\ . \\ \\ {\scriptstyle n-1} \\ {\scriptstyle n} \end{array} \begin{vmatrix} u & 1 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & u & 1 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u & 1 & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 1 & u & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 1 & u & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 1 & u \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2^n}\left[\binom{n+1}{1}u^n - \binom{n+1}{3}u^{n-2}(4-u^2) + \binom{n+1}{5}u^{n-4}(4-u^2)^2 - \text{ ecc.}\right]$$

$$= \frac{\text{coefficiente di } i \text{ in } (u+iv)^{n+1}}{2^n v}, \qquad (1)$$

dove $i = (-1)^{\frac{1}{2}}$, e la quantità $v$ dipende da $u$ mediante l'equazione

$$u^2 + v^2 = 4 ; \qquad (2)$$

---

[1] *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani* (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, t. XXI, 1885).

[2] *Sopra una classe di trasformazioni involutorie dello spazio,* nei Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie 2ª, v. XXI, 1888.

[3] *Sulla classificazione delle trasformazioni razionali dello spazio,* ecc., Ibidem, v. XXIII, 1890.

inoltre per coefficiente di $i$ nello sviluppo della potenza $(u+iv)^{n-1k}$ devesi intendere quello che proviene come effetto dell'unica unità immaginaria $i$ che comparisce attualmente nel binomio $u+iv$.

In fatto, nella serie

$$v\,,\ v_2\,,\ v_3\,,\ v_4\,,\ \ldots, \tag{3}$$

sia ogni termine legato ai due che lo precedono mediante la relazione

$$v_k = uv_{k-1} - v_{k-2}\,, \tag{4}$$

nella quale deve supporsi $v_1 = v$: e pongasi

$$(u+iv)^k = 2^{k-1}(b_k + ib'_k) \tag{5}$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \text{ecc.})\ ;$$

si avrà allora, $b'_k = v_k$. Giacchè dalla relazione (5) si deduce che

$$(u+iv)^k = 2^{k-2}(b_{k-1} + ib'_{k-1})(u+iv)$$

e dal confronto dei secondi membri della precedente relazione e della (5) nascono le due equazioni seguenti:

$$\begin{aligned} 2b_k &= ub_{k-1} - vb'_{k-1} \\ 2b'_k &= ub'_{-1} + vb_{k-1}\,, \end{aligned}$$

dalle quali si ricava facilmente l'altra

$$b'_k = ub'_{k-1} - \frac{u^2+v^2}{4}\,b'_{k-2}\ ;$$

e questa, a motivo dell'equazione (2), diviene

$$b'_k = ub'_{k-1} - b'_{k-2}\,. \tag{4'}$$

Or la precedente relazione ha la stessa forma della (4), ed inoltre si ha dalla (5) $b'_0 = 0$ e $b'_1 = v$: dunque i termini della serie $b'_1$, $b'_2$, $b'_3$, ecc., calcolati mediante la relazione (4') non differiscono dai loro corrispondenti nella serie (3). Nella (5) alle quantità $b'_k$ si possono quindi sostituire le $v_k$: allora mutando $b_k$ in $u_k$ la (5) si potrà scrivere

$$(u+iv)^k = 2^{k-1}(u_k + iv_k)\,. \tag{6}$$

Ciò posto, dall'equazione (4) per $k = n+1,\ n,\ \ldots,\ 3,\ 2$ scaturisce il seguente sistema di $n$ equazioni lineari fra le altrettante quantità $v_{n+1}$, $v_n$, ..., $v_3$, $v_2$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - uv_n + v_{n-1} \qquad\qquad &= 0 \\ v_n - v_{n-1} + v_{n-2} \qquad &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\cdots \\ v_4 - uv_3 + v_2 &= 0 \\ v_3 - uv_2 &= -v \\ v_2 &= uv\ ; \end{aligned}$$



dalle quali, risolvendo rispetto a $v_{n+1}$ ed indicando con $D_n(u)$ il determinante proposto, si ricava che

$$v_{n+1} = (-1)^n v D_n(-u)\,. \tag{7}$$

Dalla relazione (6) intanto, per $k = n+1$, si ha che

$$2^n v_{n+1} = \binom{n+1}{1}u^n v - \binom{n+1}{3}u^{n-2}v^3 + \binom{n+1}{5}u^{n-4}v^5 - \text{ecc.},$$

cioè, in virtù dell'equazione (2),

$$\frac{v_{n+1}}{v} =$$

$$= \frac{1}{2^n}\left[\binom{n+1}{1}u^n - \binom{n+1}{3}u^{n-2}(4-u^2) + \binom{n+1}{1}u^{n-4}(4-u^2)^2 - \ \text{ecc.}\right] \tag{7'}$$

e però sostituendo nella (7) al quoziente $\frac{v_{n+1}}{v}$ il suo precedente valore e poi mutando $u$ in $-u$ si ottengono le relazioni (1).

C. D. D.

**2.** Nella relazione (4) facciasi $k = n$ e sostituiscansi le quantità $v_n$, $v_{n-1}$, $v_{n-2}$ con i loro valori forniti dalla (7): indi si muti $u$ in $-u$; si avrà allora la relazione seguente fra tre qualunque consecutivi dei determinanti $D(u)$

$$D_n(u) = uD_{n-1}(u) - D_{n-2}(u):$$

la quale, sostituendo a $D_n(u)$, $D_{n-1}(u)$, $D_{n-2}(u)$ i loro sviluppi tratti dalla (1), dà luogo all'identità seguente:

$$\begin{aligned} &\binom{n+1}{1}u^n - \binom{n+1}{3}u^{n-2}(4-u^2) + \binom{n+1}{5}u^{n-4}(4-u^2)^2 - \ \text{ecc.} \\ &= 2u\left[\binom{n}{1}u^{n-1} - \binom{n}{3}u^{n-3}(4-u^2) + \binom{n}{5}u^{n-5}(4-u^2)^2 - \ \text{ecc.}\right] \\ &-4\left[\binom{n-1}{1}u^{n-2} - \binom{n-1}{3}u^{n-4}(4-u^2) - \binom{n-1}{5}u^{n-6}(4-u^2)^2 - \ \text{ecc.}\right] \end{aligned} \tag{8}$$

Il primo membro di tale identità può scriversi:

$$\Sigma_k (-1)^k \binom{n+1}{2k+1} u^{n-2k}(4-u^2)^k$$

$$(k = 0\ 1,\ 2,\ \text{ecc.})$$

e siccome il coefficiente di $(u^2)^{k-l}$ nello sviluppo della potenza $(4-u^2)^k$ è $(-1)^{k-l}\binom{k}{l}4^l$, così il coefficiente di $u^{n-2k}(u^2)^{k-l}$ cioè di $u^{n-2l}$ nel primo membro dell'identità (8) è

$$\Sigma_k(-1)^{2k-l}4^l\binom{n+1}{2k+1}\binom{k}{l}\ ; \tag{9}$$

se in questo coefficiente si muta $n$ in $n-1$ e poi si moltiplica per 2 il risultato si ottiene

$$2\Sigma_k(-1)^{2k-l}4^l\binom{n}{2k+1}\binom{k}{l} \tag{10}$$

come coefficiente di $u^{n-2l}$ nel primo polinomio che è nel secondo membro della (8): se invece nell'espressione (9) si muta $n$ in $n-2$, $l$ in $l-1$ e si moltiplica il risultato per $-4$ si ottiene il coefficiente di $u^{2n-l}$ nel secondo polinomio che è nel secondo membro della (8); tale coefficiente è quindi

$$-4\Sigma_k(-1)^{2k-l+1}4^{l-1}\binom{n-1}{2k+1}\binom{k}{l-1}\,. \tag{11}$$

Dall'uguaglianza (9)=(10)+(11), fatte le riduzioni, si ha

$$\Sigma_k\binom{n+1}{2k+1}\binom{k}{l}=2\Sigma_k\binom{n}{2k+1}\binom{k}{l}+\Sigma_k\binom{n-1}{2k+1}\binom{k}{l-1}$$
$$(k=l-1\ ,\ \ l\ ,\ \ l+1\ ,\ \ldots..)\ ;$$

questa identità può scriversi come segue:

$$\Sigma_k\binom{k}{l}\left[2\binom{n}{2k+1}-\binom{n+1}{2k+1}\right]+\Sigma_k\binom{n-1}{2k+1}\binom{k}{l-1}=0 \tag{12}$$

e siccome si ha

$$2\binom{n}{\nu}-\binom{n+1}{\nu}=\frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-\nu+2)}{\nu\,!}\,[2(n-\nu+1)-n-1]$$
$$=\frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-\nu+1)}{\nu\,!}\,\frac{n-2\nu+1}{n-\nu+1}=\binom{n}{\nu}\frac{n-2\nu+1}{n-\nu+1}$$

così, facendo $\nu=2k+1$ e sostituendo nella (12) a $2\binom{n}{2k+1}-\binom{n+1}{2k+1}$ il valore che se ne trae dalla precedente uguaglianza, si avrà

$$\Sigma_k\binom{k}{l}\binom{n}{2k+1}\frac{n-4k-1}{n-2k}+\Sigma_k\binom{n-1}{2k+1}\binom{k}{l-1}=0\,. \tag{13}$$
$$(k=l-1\ ,\ \ l\ ,\ \ l+1\ ,\ \ \ldots..)$$

In particolare, facendo $l=1$, e però $k=0,\ 1,\ 2$, ecc., la somma cui dà luogo il secondo dei due segni $\Sigma$ nella identità (13) diviene

$$\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{3}+\binom{n-1}{5}+\ \ldots..\ (=2^{n-2})$$

e però l'identità (13), dopo aver aggiunta la quantità $\frac{n-1}{n}\binom{n}{1}$ ad ambo i suoi membri, si riduce all'altra



$$\frac{n-1}{n}\binom{n}{1}+1\,.\,\frac{n-5}{n-2}\binom{n}{3}+2\,.\,\frac{n-9}{n-4}\binom{n}{5}+3\,.\,\frac{n-13}{n-6}\binom{n}{7}-\ \text{ecc.}$$
$$=n-2^{n-2}-1$$

nella quale deve supporsi $n$ dispari, altrimenti la quantità sottoposta al primo segno $\Sigma$ nella (13), per $2k=n$, diviene indeterminata.

**3.** L'equazione (4) scritta come segue

$$\frac{v_k}{v_{k-1}}=u-\cfrac{1}{\cfrac{v_{k-1}}{v_{k-2}}}\ ,$$

e la relazione $\frac{v_2}{v_1}=u$, tratta dalla stessa (4) mostrano che

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=u-\cfrac{1}{u-\cfrac{1}{u-\ddots-\cfrac{1}{u}}}\ , \tag{14}$$

dove la quantità $u$ devesi scrivere $n$ volte. Sostituendo nella precedente relazione al quoziente $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ il suo valore dato dalla (7'), si avrà che

$$u-\cfrac{1}{u-\cfrac{1}{u-\ddots-\cfrac{1}{u}}}$$
$$=\frac{1}{2}\,\frac{\binom{n+1}{1}u^n-\binom{n+1}{3}u^{n-2}(4-u^2)+\binom{n+1}{5}u^{n-4}(4-u^2)^2-\ \ldots}{\binom{n}{1}u^{n-1}-\binom{n}{3}u^{n-3}(4-u^2)+\binom{n}{5}u^{n-5}(4-u^2)^2-\ \ldots}$$
$$=\frac{1}{2}\,\frac{\text{coefficiente di } i \text{ in } (u+iv)^{n+1}}{\text{coefficiente di } i \text{ in } (u+iv)^{n}}\ ,\quad (u^2+v^2=4)\,.$$

**4.** L'equazione (4) mostra che se la quantità $v(=v_1)$ si suppone diversa da zero, allora due qualunque consecutive, $v_{k-1}$, $v_k$, delle quantità $v_l$ non possono contemporaneamente annullarsi; altrimenti tutte le altre precedenti quelle, e quindi anche $v_1$ dovrebbero essere nulle. Laonde, affinchè per $n>1$ risulti $v_n=0$ (e però $v_{n-1}$ non $=0$) è necessario e sufficiente che $u$ sia radice dell'equazione

$$0=x-\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x-\ddots-\cfrac{1}{x}}}\ , \tag{15}$$

dove $x$ devesi scrivere $n-1$ volte, come risulta dalla relazione (14) dopo avervi mutato $k$ in $k-1$. Le radici $u$ dell'equazione (15) sono (1) le parti reali, moltiplicate per 2, delle radici complesse dell'equazione binomia

$$z^{2n}=1\ : \qquad (16)$$

se dunque $a+a'i$ è una di tali radici della precedente equazione, se cioè

$$(a+a'i)^{2n}=1\ , \qquad (17)$$

sarà $u=2a$, ed allora dall'equazione (2) e dall'altra

$$a^2+a'^2=1 \qquad (18)$$

segue che $v=2a'$.

Intanto la parte reale $a$ di una radice complessa $a+a'i$ della (16) deve soddisfare l'equazione

$$\frac{1-a^{2n}+\binom{2n}{2}a'^2a^{2n-2}-\binom{2n}{4}a'^4a^{2n-4}+\ \dots\ \pm\binom{2n}{2n}a'^{2n}}{1-a^2}=0 \qquad (19)$$

che si ottiene uguagliando ad 1 la parte reale dello sviluppo del primo membro della (17) e sopprimendo dall'equazione che ne risulta le radici $+1$ e $-1$; giacchè $+1$ e $-1$ sono radici reali della (17). Sostituendo nell'equazione (19) in luogo di $a'^2$ il suo valore $1-a^2$ tratto dalla (18), il primo membro dell'equazione risultante, che è di grado $2n-2$, è la seconda potenza di una funzione razionale $F(a)$ di grado $n-1$, perchè ogni radice $a$ dell'equazione (19) è di questa una radice doppia, dovendo essa appartenere sia ad una radice complessa dell'equazione (17) che alla radice complessa coniugata. Adunque l'equazione

$$F(a)=0 \qquad (20)$$

è quella alla quale devono soddisfare le quantità $a$ come radici semplici, se vuolsi che sia $v_n=0$.

D'altra parte l'equazione (7), col mutarvi $n$ in $n-1$, mostra (essendo $v$ non $=0$) esser mestieri, per l'annullamento di $v_n$, che sia

$$D_{n-1}(-u)=0\ :$$

---

(1) Vedasi la Nota dal titolo *Soluzione algebrica dell'equazione*

$$0=x-\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x-\ddots-\cfrac{1}{x}}}\ ,$$

inserita nel fascicolo 12° di questa *Rivista*, anno 1892.



e però se in questa equazione si pone in luogo di $u$ il suo valore $2a$ si avrà l'altra equazione

$$D_{n-1}(-2a)=0$$

che è pur essa di grado $n-1$ e che perciò non deve esser diversa dall'equazione (20).

Pongasi $$\lambda D_{n-1}(-2a)=F(a)$$
dove $\lambda$ è un coefficiente numerico; sarà poi

$$\lambda^2[D_{n-1}(-2a)]^2=[F(a)]^2\ . \qquad (21)$$

Il coefficiente di $a^{n-1}$ nel determinante $D_{n-1}(-2a)$ è $(-2)^{n-1}$ e però il coefficiente di $a^{2n-2}$ nel primo membro della precedente identità è $2^{2n-2}\lambda^2$. Eseguendo poi la divisione nel primo membro dell'equazione (19), dopo aver posto in essa $1-a^2$ in luogo di $a'^2$, si trova che il coefficiente di $a^{2n-2}$ nel quoziente, che è uguale ad $[F(a)]^2$, è espresso dalla somma

$$1+\binom{2n}{2}+\binom{2n}{4}+\ \dots\ +\binom{2n}{2n}\ ,$$

la quale, come è noto, ha per valore $2^{2n-1}$, perciò deve essere

$$2^{2n-2}\lambda^2=2^{2n-1}$$

e quindi si ha $\lambda^2=2$. L'identità (21) diviene quindi la seguente:

$$F(a)=2^{\frac{1}{2}}D_{n-1}(-2a)\ ,$$

dalla quale, sostituendo ad $F(a)$ la radice quadrata del primo membro della (19), al determinante $D_{n-1}(-2a)$ il suo sviluppo, e poi moltiplicando per $\sqrt{1-a^2}$, cioè per $a'$ si deduce che

$$\left[1-\binom{2n}{0}a^{2n}+\binom{2n}{2}a^{2n-2}a'^2+\binom{2n}{4}a^{2n-4}a'^4-\ \dots\ \pm\binom{2n}{2n}a'^{2n}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=2^{\frac{1}{2}}a'\begin{array}{c}\left|\begin{array}{cccccccc} -2a & 1 & 0 & 0\ . & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & -2a & 1 & 0\ . & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & -2a & 1\ . & 0 & 0 & 0 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0\ . & 1 & -2a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\ . & 0 & 1 & -2a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0\ . & 0 & 0 & 1 & -2a \end{array}\right|\end{array}\begin{array}{l} {\scriptstyle 1} \\ {\scriptstyle 2} \\ \\ \cdot \\ \\ {\scriptstyle n-2} \\ {\scriptstyle n-1} \end{array}$$

$$=(-1)^{n-1}2^{\frac{1}{2}}a'\left[\binom{n}{1}a^{n-1}-\binom{n}{3}a^{n-3}a'^2+\binom{n}{5}a^{n-5}a'^4-\ \dots\right],$$

con la condizione che sia

$$a^2+a'^2=1\ .$$

*Catania, Novembre del 1892.*

# Considerazioni geometriche sul numero delle radici reali di un'equazione algebrica.

Sotto questo titolo il prof. KLEIN [1] ha pubblicato recentemente una nota, geniale come tutto ciò che esce dalla penna di quel maestro, in cui, dopo di avere ricordato un metodo applicato molti anni or sono dal SYLVESTER [2] e che consiste nel considerare i coefficienti di una equazione [3] come coordinate dei punti di uno spazio per distinguere, secondo la regione di quello spazio in cui si trova un punto, il numero delle radici reali dell'equazione corrispondente, egli passa a dare l'interpretazione geometrica dei varî criterî che si hanno per riconoscere il numero delle radici reali di un'equazione. Egli insiste particolarmente sull'equazione di secondo grado

$$z^2 + 2Az + B = 0 \ ,$$

in cui A e B sono le coordinate cartesiane di un punto in un piano, e su quella di terzo grado

$$z^3 + 3Az^2 + 3Bz + C = 0 \ ,$$

in cui A, B, C sono le coordinate cartesiane di un punto in uno spazio ordinario: per quest'ultima egli dà un'elegante interpretazione geometrica del criterio di SYLVESTER [4] fondata sulla considerazione del Bezoutiano.

Benchè assai ovvio ed elementarissimo, non mi sembra completamente del tutto ozioso al lavoro citato l'applicazione di quello stesso criterio del SYLVESTER all'equazione di terzo grado, ridotta alla forma

$$z^3 + 3\xi z + \eta = 0 \ , \tag{1}$$

di cui i coefficienti $\xi$, $\eta$ si possono riguardare come coordinate cartesiane ortogonali di un punto in un piano: anche perchè tale applicazione ci farà incontrare, per via indiretta, una curiosa proposizione di geometria.

---

[1] *Sonderabdruck aus dem Katalog der Mathematischen Ausstellung zu Nürnberg*, September 1892. München, 1892.

[2] *Philosophical transactions*, 1864.

[3] O quantità da essi dipendenti.

[4] *Philosophical transactions*, 1853. Cfr. SALMON, *Lessons on higher Algebra*, third edit., pag. 293. Dublin, 1866.



L'equazione (1) rappresenta un sistema $\infty^1$ di rette il cui inviluppo [1] è la cubica a cuspide

$$\eta^2 + 4\xi^3 = 0 \ ; \tag{2}$$

un punto $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ si dirà interno od esterno a questa cubica secondo che sarà

$$\bar{\eta}^2 + 4\bar{\xi}^3 < \text{ oppure } > 0 \ ;$$

l'equazione corrispondente (1) avrà tre radici reali nel primo caso, una nel secondo.

Si formi ora il Bezoutiano [2]: si deve perciò rendere la (1) omogenea; indicandone allora il primo membro con $f(z_1, z_2)$, il Bezoutiano è

$$B = \frac{1}{z_1 z'_2 - z_2 z'_1}\left[\frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_1}\frac{\partial f(z'_1, z'_2)}{\partial z'_2} - \frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_2}\frac{\partial f(z'_1, z'_2)}{\partial z'_1}\right] ;$$

eseguendo e sostituendo $\frac{z_1}{z_2}$ e $\frac{z'_1}{z'_2}$ con $\lambda$, viene

$$B = \xi\lambda^2 + \eta\lambda - \xi^2 \ .$$

Ora il criterio di SYLVESTER applicato all'equazione (1) consiste nell'osservare se l'equazione in $\lambda$ ottenuta uguagliando B a zero ha, o no, le sue radici complesse: corrispondentemente l'equazione (1) ha tre radici reali od una sola.

L'equazione

$$B = \xi\lambda^2 + \eta\lambda - \xi^2 = 0 \tag{3}$$

rappresenta un sistema $\infty^1$ di parabole, talchè il criterio ora enunciato viene ad esprimere che l'equazione (1) corrispondente al punto $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ ha una o tre radici reali, secondo che per il punto stesso passano due parabole reali del sistema o nessuna.

Le parabole del sistema (3) hanno le seguenti proprietà:

*a)* Esse hanno per inviluppo la cubica a cuspide (2).

*b)* Esse passano tutte per l'origine, ed hanno l'asse parallelo: vengono pertanto a passare per tre punti fissi. L'altro punto comune alle parabole corrispondenti ai valori $\lambda_1$ e $\lambda_2$ del parametro è

$$\xi = -\lambda_1\lambda_2 \ , \qquad \eta = \lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2) \ ,$$

da cui, per $\lambda_1$ e $\lambda_2$ reali,

$$\eta^2 + 4\xi^3 > 0 \ .$$

*c)* Da quest'ultima osservazione risulta che le parabole (3) ricoprono (due volte) tutta la regione del piano esterna alla cubica a cuspide, e quella soltanto.

---

[1] *Curva discriminatrice* secondo il SYLVESTER (*Phil. trans.*, 1864).

[2] KLEIN, loc. cit., pag. 5.

*d)* Il vertice della parabola corrispondente a $\lambda$ ha per coordinate

$$\xi = \frac{\lambda^2}{2}\ , \quad \eta = -\frac{\lambda^3}{4}\ ,$$

onde risulta che il luogo descritto dal vertice delle parabole (3) è una cubica a cuspide, di cui l'equazione è

$$\xi^3 - 2\eta^2 = 0\ .$$

Si viene così ad ottenere il seguente teorema:

« Se un sistema di parabole aventi gli assi paralleli e passanti per « un punto fisso è tale che il luogo dei loro vertici sia una cubica a « cuspide, queste parabole inviluppano una seconda cubica a cuspide « avente il cuspide nello stesso punto della prima e la medesima tan- « gente cuspidale ».

È facile di generalizzare questa proposizione. Si chiami, con vocabolo degli antichi geometri, *parabola d'ordine* $\frac{m}{n}$ la curva di cui l'equazione omogenea è

$$A\xi^n\zeta^{m-n} + B\eta^m = 0\ ;$$

si ha allora il seguente teorema:

« Abbiasi un sistema di coniche passanti per un punto A e tangenti « ad una retta BC nel punto B: dal punto C fisso su BC si conducono « le tangenti CM alle coniche, ed il luogo dei punti M sia una para- « bola d'ordine $\frac{m}{n}$. Questo sistema di coniche avrà per inviluppo una « seconda parabola d'ordine $\frac{m}{n}$,

$$A'\xi^n\zeta^{m-n} + B'\eta^m = 0\ ».$$

S. Pincherle.

---

## Sulla scoperta del potenziale.

*Nota storica dell'Ing.* Ottavio Zanotti Bianco.

Il sig. E. J. Routh ha di recente pubblicato un libro intitolato: *A Treatise on Analytical Statics* (Cambridge 1892). A pag. 17 del volume II di esso trovasi la nota che qui trascriviamo.

« The earliest use of the function now called the potential is due to Legendre in 1784, who refers to it when discussing the attraction of



a solid of revolution. Legendre however expressly ascribes the introduction of the function to Laplace, and quotes from him the theorem connecting the components of attraction with the differential coefficients of the function. The name, Potential, was first used by Green in his *Essay on the Application of Mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism*, published in 1828. Green also gave many of the theorems on this function now in continual use, but which have been since associated with the names of others who have discovered them a second time. Gauss also uses the name in art. 3 of his memoir on *Forces acting inversely as the square of the distance*, Leipsic 1840, translated in the third volume of Taylor's *Scientific Memoirs*. The reader may also consult Todhunter's History, art. 790, and Thomson and Tait's *Treatise on Natural Philosophy*, art. 483 ».

In questa nota del sig. Routh vien ripetuta la non esatta opinione che l'introduzione del potenziale nella scienza sia dovuta a Laplace: mentre essa è merito di Lagrange. Già Biot aveva ciò affermato nel passaggio seguente:

« M. Lagrange a démontré que les coefficients différentiels $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ pris négativement, expriment les attractions exercées par le sphéroïde sur ce même point, parallélement aux trois axes rectangulaires. M. Laplace a fait voir ensuite que la fonction V est assujettie à l'équation différentielle partielle $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ » (*Recherches sur le calcul aux différences partielles et sur les attractions des sphéroïdes*, contenuta nel vol. VI dei *Mémoires de l'Institut*. Parigi 1806).

Quest'affermazione non essendo accompagnata da indicazione alcuna sullo scritto di Lagrange cui si accenna in essa, indusse Todhunter (1) a porre in dubbio l'asserto di Biot. Affermazione concordante con quella di Biot trovasi in una nota intorno a lavori di Poisson ed Ostrogradsky pubblicata nel vol. XIV del *Bulletin de Ferrusac..... Sciences Mathématiques*, 1830; nota firmata S, iniziale che Todhunter crede corrispondere al nome di Sturm (2). A sostegno però dell'asserto di Biot, che attribuisce, come è infatti, a Lagrange la priorità dell'introduzione nella scienza, del potenziale, sta ora un passo di una memoria di Lagrange, richiamato all'attenzione dei dotti da un lavoro di Baltzer.

---

(1) *History of the theories of attraction and the Figure of the Earth.* Vol. II, pag. 221. Londra 1873.

(2) Op. cit. Vol. II, p. 281.

Questo scritto è intitolato *Zur Geschicte des Potentials:* fu pubblicato nel 1878, nel volume 86, pag. 213 del *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* Baltzer trovò rammentato il passo di Lagrange che serve di base al suo lavoro a pag. 9 delle *Vorlesungen über Dynamik* di Jacobi.

Il passo di Lagrange, del quale si tratta, leggesi nella sua Memoria intitolata: *Remarques générales sur le mouvement de plusieurs corps qui s'attirent mutuellement en raison inverse des carrés des distances;* Memoria che fu letta all'Accademia di Berlino il 2 ottobre 1777. Essa è riprodotta nel vol. IV, 1869, pag. 401 e seguenti, delle opere di Lagrange, edite da Serret. Crediamo non inutile il riportare qui il brano accennato.

« Soient M, M', M''... les masses des corps qui composent le système donné; $x$, $y$, $z$ les coordonnées rectangles de l'orbite du corps M dans l'espace; $x'$, $y'$, $z'$ celles de l'orbite du corps M'; $x''$, $y''$, $z''$ celles de l'orbite du corps M''... Qu'on fasse pour abréger

$$\Omega = \frac{MM'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} + \frac{MM'}{\sqrt{(x-x'')^2+(y-y'')^2+(z-z'')^2}} + \dots$$
$$+ \frac{M'M''}{\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2}} + \dots,$$

et qu'on dénote à l'ordinaire par

$$\frac{d\Omega}{dx},\ \frac{d\Omega}{dy},\ \frac{d\Omega}{dz},\ \frac{d\Omega}{dx'},\ \dots$$

les coefficients de $dx$, $dy$, $dz$, $dx'$, ... dans la différentielle de $\Omega$ regardée comme fonction des variables $x$, $y$, $z$, $x'$, ... on aura $\frac{1}{M}\frac{d\Omega}{dx}$, $\frac{1}{M}\frac{d\Omega}{dy}$, $\frac{1}{M}\frac{d\Omega}{dz}$, pour les forces avec lesquelles le corps M est attiré par les autres M', M'', ... suivant les directions des coordonnées $x$, $y$, $z$, de même $\frac{1}{M'}\frac{d\Omega}{dx'}$, $\frac{1}{M'}\frac{d\Omega}{dy'}$, $\frac{1}{M'}\frac{d\Omega}{dz'}$ seront les forces par lesquelles le corps M' est attiré par les corps M, M'', ... suivant les directions des coordonnées $x'$, $y'$, $z'$; et pareillement $\frac{1}{M''}\frac{d\Omega}{dx''}$, $\frac{1}{M''}\frac{d\Omega}{dy''}$, $\frac{1}{M''}\frac{d\Omega}{dz'''}$ seront les forces par lesquelles le corps M'' sera attiré par les autres suivant la direction de $x''$, $y''$, $z''$ et ainsi de suite; c'est de quoi il est aisé de se convaincre en cherchant par la différentiation les valeurs des quantités dont il s'agit; car on trouvera les mêmes expressions qu'on aurait par la décomposition des forces qui agissent sur chaque corps, en vertu



de l'attraction des autres corps supposée proportionnelle à la masse divisée par le carré de la distance.

« Cette manière de représenter les forces est, comme l'on voit, extrêmement commode par sa simplicité et par sa généralité: et elle a de plus l'avantage qu'on y distingue clairement les termes dus aux différentes attractions des corps, car chacune des attractions donne dans la quantité $\Omega$, un terme multiplié par le produit des masses des deux corps qui s'attirent, et divisé par leur distance ».

Alla fine della sua Memoria Lagrange scrive quanto segue:

« Ces théorèmes sur le mouvement des centres de gravité ont déjà étés donnés en partie par M. D'Alembert dans ses *Recherches sur le système du monde* et dans ses *Opuscules;* mais la manière dont je viens de les démontrer est nouvelle et me paraît mériter surtout l'attention des Géomètres pour l'utilité dont elle peut être dans d'autres occasions. On prouverait par les mêmes principes que ces théorèmes seraient également vrais si les corps agissaient les uns sur les autres par une force d'attraction mutuelle proportionnelle à une fonction quelconque de la distance, car, nommant $f(x)$ la force d'attraction qui agit à la distance $x$, et faisant $F(x) = \int f(x)dx$, il n'y aura qu'à changer la valeur de $\Omega$ du N. 1 dans la suivante

$$\Omega = -MM'F\left\{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\right\}$$
$$-MM''F\left\{\sqrt{(x-x'')^2+(y-y'')^2+(z-z'')^2}\right\} - \dots$$
$$\dots - M'M''F\left\{\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2}\right\} - \dots$$

et l'on parviendra aux mêmes résultats ».

I brani che abbiamo riprodotti sono così espliciti da non lasciar più dubbio di sorta sulla priorità di Lagrange nella scoperta del potenziale, esteso anche ad una qualunque legge di attrazione.

Dopo però i citati passi di Biot e l'affermazione dello scrittore S del *Bulletin de Ferrusac* la seguente dichiarazione di Baltzer: « Lagranges priorität, ist wie es scheint, weder damals noch in unserer Zeit, erwähnt worden » non è più rigorosamente esatta.

Ecco ora il teorema delle *Vorlesungen über Dynamik* di Jacobi che ha messo Baltzer sulla giusta via.

« Quando un punto di massa $m_i$ e di coordinate $x_i$, $y_i$, $z_i$ è attratto dalla massa $m_j$ che ne dista di $r_{ij}$, secondo la legge $\frac{m_i m_j}{r_{ij}^2}$ nella direzione da $m_i$ verso $m_j$; alla determinazione della forza con cui $m_i$ è attratta dalle rimanenti masse, serve il potenziale formato da Lagrange nel problema degli $n$ corpi

$$\Omega = \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \dots + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \dots;$$

questa forza quando le posizioni corrispondano al tempo $t$, ha per componenti parallele agli assi

$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{d\Omega}{dx_i}\,; \quad m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{d\Omega}{dy_i}\,; \quad m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{d\Omega}{dz_i}\,».$$

Stabilita ben nettamente così la priorità di Lagrange nella scoperta del *potenziale,* il rimanente dell'istoria di questa importantissima funzione quale è data dal sig. Routh e generalmente nei trattati è esatta (¹).

Il sig. Hothaway ha di recente pubblicato uno scritto intitolato: *Early history of the potentials;* nel Bollettino della Società Matematica di New-York (vol. I, 1891, pag. 66 e seg.), ma non ci fu possibile consultare questa pubblicazione.

*Torino, marzo 1893.*

## CORRISPONDENZA

*Chiarissimo Collega,*

. . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Al quesito proposto dal mio egregio amico ing. F. Crotti (²) io rispondo che, se la formola di Simpson applicata al trapezio curvilineo compreso fra le ordinate $y_1$ e $y_{21}$ dà 9600, e 9720 applicata al trapezio compreso fra le ordinate $y_2$ e $y_{20}$, questo non è alcun assurdo che possa intaccare la bontà di quella formola. A seconda del caso, si sostituisce alla curva del trapezio una successione di 10 o di 9 archi di parabola coll'asse perpendicolare all'asse delle $x$, tutti eguali, convessi i primi e concavi i secondi verso questo asse. E quel risultato significa puramente che la somma delle aree delle figure limitate dalla seconda successione e dalla parte della prima avente gli estremi comuni con essa, cioè 18 volte l'area della figura chiusa fra mezzo arco parabolico concavo e mezzo arco parabolico convesso, supera di 120 la somma delle aree dei due trapezii le cui curve sono le parti rimanenti della prima, pari all'area del trapezio la cui curva è un arco parabolico

(¹) Per notizie storiche a questo riguardo vedasi ZANOTTI BIANCO O.: *Il problema meccanico della figura della terra.* Parte I, 1880. Torino.

(²) *Rivista di Matematica,* vol. II, pag. 176.



convesso. Che se qualcuno coi dati del quesito applica la formola di Simpson ad un determinato trapezio compreso fra le ordinate $y_1$ e $y_{21}$ e alla sua parte compresa fra le ordinate $y_2$ e $y_{20}$, vuol dire che nella valutazione del tutto e della parte s'accontenta d'un'approssimazione che implica errori la cui differenza supera 120. Non vi è certamente limite all'errore che si può commettere applicando la formola di Simpson senza preoccuparsi che la successione degli archi parabolici non si scosti fuor di certi termini dalla curva del trapezio considerato. Piuttosto si può osservare che, coi dati del quesito, la curva e la parte di essa compresa fra le ordinate $y_2$ e $y_{20}$ non potranno adattarsi egualmente bene alla relativa successione d'archi parabolici.

Ma l'ing. Crotti, come apparisce dalla sua Memoria *Sopra alcune formole di planimetria e stereometria* (¹) move dall'idea che la curva del trapezio considerato sia incognita, o non si voglia conoscere: e discorre come se il valore fornito dalla formola di Simpson fosse un valore più plausibile dell'area cercata. Io non vedo veramente come un tal problema si possa porre; ad ogni modo non è quello che si propone di risolvere la formola di Simpson.

Questa essendo la mia opinione, conforme a quella esposta nella *Rivista* (²) dai professori Jadanza e Bardelli, e suppongo anche alla sua, quantunque Ella si limiti a rispondere ad alcune osservazioni del prof. Bardelli, nè mai avendo potuto discorrere in senso diverso, ho ben ragione di meravigliarmi nel trovarmi citato nella Memoria ora uscita dell'ing. Crotti, *Alcune considerazioni sulla recente edizione* (14ª) *del Manuale del prof. Colombo* (³) come venuto alla conclusione che alla formola di Simpson manca ogni fondamento teorico e logico, o qualcosa d'analogo. Son posto, è vero, in ottima compagnia, tale da farmi vivamente desiderare, se quelli sono realmente di diverso parere (è nominato anche Lei) (*), di conoscere le loro ragioni. Ma *amicus Plato sed magis amica veritas;* e perciò non mi si farà appunto di tenerci che chi notasse il mio nome non mi attribuisca un giudizio al mio assolutamente opposto.

. . . . . . . . . . . . . . .

*Messina, 6 marzo 1893.*

*Devot. suo*
GIAN ANTONIO MAGGI.

(¹) *Atti del Collegio degli Ingegneri ed Architetti di Milano,* anno XVIII.

(²) Volume in corso, pag. 15.

(³) *Atti del Collegio degli Ingegneri ecc.,* vol. XXV.

(*) A scanso di equivoci, la mia opinione su questo soggetto è pubblicata nelle mie *Lezioni di Analisi infinitesimale,* 1893, vol. I, pag. 235 e segg. (Nota di G. PEANO).

# RECENSIONI

A. Nagy — *Principî di logica esposti secondo le teorie moderne.* — Torino, Loescher, 1891, p. 219.

Il dott. Nagy, libero docente nell'Università di Roma e professore di filosofia al Liceo di Velletri, è già noto per i suoi lavori sulla logica pubblicati in periodici di matematica. Nel libro ora uscito si trovano esposte le idee fondamentali e sviluppate le principali applicazioni delle teorie moderne sulla logica, sotto una forma ordinata e succinta, tale da rendere il libro, secondo l'intenzione dell'autore, adatto a servire di testo per le scuole secondarie in conformità ai programmi ministeriali vigenti.

Ci è grato segnalare questa pubblicazione come un primo tentativo in Italia verso una riforma nell'insegnamento di questo importante ramo della filosofia, nella quale si tenga conto dei progressi fatti in quest'ultimo trentennio, per opera specialmente dei logici inglesi. Tali progressi che (almeno per ciò che riguarda quella parte della logica che nella filosofia contemporanea è distinta col nome di logica formale o deduttiva) trovano solo riscontro in quelli, di natura del resto intimamente analoga (1), che resero possibile la sua costituzione come scienza indipendente all'epoca aurea della filosofia greca per opera d'Aristotele e della sua scuola, cominciano, si può dire, solo ora a richiamare sopra di sè, anche nel campo dei cultori di studi filosofici, l'attenzione che compete alla loro importanza.

I risultati delle recenti esperienze del Venn sopra due classi parallele di giovani, delle quali una soltanto era addestrata all'uso dei metodi e delle notazioni della logica simbolica, non possono che incoraggiare quelli che si accingono a propagare fra gli insegnanti di filosofia la conoscenza di queste nuove teorie. Si può prevedere, del resto, come non lontano il tempo in cui l'affermare la convenienza di famigliarizzare per tempo i giovani coi concetti e coi processi della logica matematica, diventerà un'asserzione non abbisognante di prova e in cui parrà superfluo il far rilevare l'addizionale importanza che questo genere di disciplina mentale acquista per quei giovani che nel loro corso ulteriore di studi saranno tratti ad occuparsi di scienze in cui predomini il metodo deduttivo, quali sono preeminentemente i vari rami della matematica e la parte teorica dell'economia politica e delle scienze giuridiche.

Al lavoro del Nagy viene aggiunto singolare pregio dalla copia di citazioni e riferenze atte ad invogliare il lettore a proseguire nello studio delle questioni che maggiormente lo interessassero, ricorrendo direttamente alle fonti.

G. Vailati.

(1) *The canonical forms of the Aristotelian syllogism are really symbolical; only the symbols are less perfect of their kind than those of mathematics.* Boole, Math. Analysis of Logic, P. 11.



X. Antomary — *Leçons de Cinématique et de Dynamique.* — Paris, Nony et C., 1892.

È un trattato di piccola mole, facile, chiaro, che le teorie esposte illustra con graziose applicazioni e fa seguire da numerosi ed opportuni quesiti proposti al lettore.

In esso l'A. premesse alcune nozioni sui vettori, definiti come segmenti di retta, astrazione fatta dalla loro posizione nello spazio, tratta successivamente la Cinematica del punto, la Dinamica del punto materiale e parte della Statica dei sistemi rigidi. Seguono tre note: la 1ª su due teoremi di geometria circa l'equivalenza di aree piane simmetriche obliquamente rispetto ad un diametro, e di volumi obliquamente simmetrici rispetto ad un piano diametrale, le altre due sui principî delle velocità virtuali e di D'Alembert per un punto materiale.

Obbligato a seguire un programma scolastico, quello di ammissione alla Scuola Politecnica francese, ed anzi a svolgere quei soli punti di tale programma che altro autore in altro volume non aveva svolto (1), l'A. non può offrire un trattato in sè completo. Così in Cinematica, studiando la composizione dei movimenti, si limita al caso semplice in cui i sistemi mobili di riferimento hanno moto progressivo; in Dinamica, considerando il moto di un punto materiale non libero, si occupa solo del caso in cui il punto è ritenuto da una linea ed appena accenna al caso in cui il punto deve rimanere su di una superficie; di Statica poi non espone che la parte riflettente la determinazione dei baricentri di figure omogenee.

Con programma sì ristretto l'A. non ebbe campo di applicare le nozioni esposte sui vettori alla composizione dei moti elementari simultanei dei sistemi invariabili, nè a quella delle forze agenti insieme su d'un sistema rigido. Per altro se, invece di limitarsi ad utilizzare le nozioni sui vettori nella dimostrazione dell'analogia fra la composizione delle velocità simultanee di un punto e quella delle forze insieme agenti su di un punto materiale, l'A., definito il vettore come somma di punti avente massa nulla, avesse introdotto il concetto di punto funzione del tempo ed adottate le notazioni algebriche del calcolo geometrico, pur restando nei limiti prestabiliti, avrebbe potuto studiare in modo assai più semplice molte questioni, indipendentemente dalla scelta degli assi di riferimento, come già in qualche nostra scuola si fa con vantaggio e senza rendere perciò più pesante la trattazione. La prefazione ci aveva fatto sperare tale applicazione del calcolo geometrico alla Cinematica ed alla Dinamica del punto, applicazione che avrebbe reso il trattato distinto per originalità di metodo dagli altri molti pubblicati.

Poche e lievi inesattezze ci fu dato notare; forse era preferibile che la proposizione a numero 135 invece che come teorema fosse data come de-

(1) M. E. Carvallo, *Leçons de Statique.* — Paris, Nony et C., 1884.

finizione di forza, semplificandosi così tutto quanto è esposto per precisare il concetto di forza e quello di risultante di più forze. Siamo lieti però di far notare che il lavoro dell'Antomary è composto con marcato senso pratico, è perciò adatto all'indole dei lettori cui è specialmente destinato; i frequenti esempi e le opportune osservazioni, massime quelle riguardanti l'omogeneità delle formule della meccanica, i sistemi di unità di misura, le dimensioni delle grandezze diverse considerate in meccanica rendono appunto il libro pregevole per chi si avvia agli studi tecnici superiori.

*Torino, Febbraio 1893.* E. OVAZZA.

---

## A proposito del postulato dell'equivalenza e di altre questioni geometriche.

Risposta ad una recensione del prof. G. Lazzeri.

Nel fascicolo 11° (Novembre 1892) di questa *Rivista di Matematica*, il prof. G. Lazzeri pubblica della nuova edizione, da me curata, degli *Elementi d'Euclide*, libro I, una recensione; alla quale è mio dovere ed insieme mio interesse di rispondere. Tratterò successivamente la questione relativa al postulato dell'equivalenza, e quella riguardante il postulato del diedro e la fusione della geometria piana colla solida; poi dei postulati fondamentali della geometria ed infine delle modificazioni da me apportate al testo euclideo.

Parlando del postulato dell'equivalenza, che io ho detto e sostengo di aver dimostrato, il Lazzeri scrive: « La dimostrazione della prop. E: *se due poligoni sono eguali ed hanno una parte comune, la rimanente parte dell'uno è equivalente alla rimanente parte dell'altro;* è presso a poco una riproduzione di quella che il prof. Faifofer credè di dare dell'altra proposizione più generale: *sottraendo da due poligoni equivalenti due loro parti che siano eguali ad un terzo poligono si ottengono resti equivalenti.* Il De-Paolis provò che questa dimostrazione è errata in una sua lettera al Direttore del *Periodico* pubblicata nel I volume del *Periodico* stesso. Siccome ciò che scrisse il De-Paolis può applicarsi senza nessuna variazione alla dimostrazione del Gremigni, non esclusa la seconda parte che manca in quella del Faifofer, rimando senz'altro il lettore allo scritto del De-Paolis ».

Abbia dunque il cortese lettore la compiacenza di venir meco a vedere che cosa dice il De-Paolis della dimostrazione del Faifofer. Il De-Paolis, nella lettera citata, solleva dapprima il dubbio che le successive operazioni di suddivisione da farsi nei poligoni H e K, i quali sono uguali al terzo poligono da togliersi dai poligoni equivalenti A e B, non abbiano termine. E poi, molto opportunamente, aggiunge: « è dopo avere ammesso questo postulato (quello dell'equivalenza) e non prima, che si può stabilire il concetto di



poligoni maggiori e minori; e per dimostrare che sono equivalenti i resti che si ottengono sottraendo poligoni eguali da poligoni equivalenti, *pare* necessario aver dimostrato che due poligoni o sono equivalenti o uno è maggiore dell'altro ». Or bene io ho proprio seguito, nel mio libro, il processo sopra indicato dall'illustre prof. De-Paolis: perocchè ho in primo luogo dimostrato il postulato dell'equivalenza colle proposizioni E ed F, ho poi definiti, a pag. 71, i poligoni maggiori e minori, e di più (e questo non è stato nemmeno indicato dal De-Paolis) ho stabilito la condizione necessaria e sufficiente affinchè un poligono sia maggiore d'un altro; infine, dato il concetto di somma e di differenza di due poligoni, ho dedotto i corollari della pag. 72, e fra questi il 3°, rispetto al quale il prof. Lazzeri dice di « essere curioso di sapere come lo deduco dalle cose precedenti ». Ed io rispondo che il 3° corollario è vero, perchè è una conseguenza immediata del 2°, la cui verità è assiomatica; e del concetto precedentemente dato di poligono maggiore e minore.

In seguito la recensione continua così: « a tutti coloro che si occupano sul serio di geometria parrà per lo meno ingenua la pretesa dell'autore di avere compendiato in tre proposizioni tutta la teoria dell'equivalenza, che è una delle più difficili della geometria elementare ». Con tale asserzione il sig. Lazzeri tende a falsare l'opinione del pubblico circa il mio libro: perchè non è in tre proposizioni solamente che riassumo l'equivalenza dei poligoni, ma bensì in quelle tre proposizioni con tutto ciò che segue. Ed i corollari delle pag. 71 e 72, colle definizioni e le altre considerazioni che seguono, non fanno forse parte della teoria dell'equivalenza? Avrei potuto, è vero, di questi corollari farne altrettanti teoremi, ma ciò non ho voluto per più ragioni: prima, per non allungare troppo il lavoro, tanto più che non si trattava d'un libro mio originale; poi perchè quei corollari, nel modo come gli ho enunciati, sono in perfetta armonia cogli assiomi d'Euclide; e fanno vedere come le proprietà dell'eguaglianza si estendono in modo assai facile all'equivalenza delle grandezze; infine perchè, dovendo lo stesso libro andar per le scuole, ho voluto lasciare i chiarimenti più facili e le dimostrazioni più ovvie all'opera dell'insegnante. Quello che è certo si è che tutta quanta la teoria dell'equivalenza si svolge, concisamente sì, ma sempre col massimo rigore; e invito il sig. Lazzeri a sapermi indicare dove esista la più piccola lacuna.

Rimane ora, perchè io abbia esaurito l'argomento dell'equivalenza, che faccia vedere, come la dimostrazione della prop. E, già enunciata, e da cui ho preso le mosse, non ha alcun bisogno di essere completata, nè corretta; contrariamente alle affermazioni della recensione. È appunto rispetto ad essa che si può muovere l'obiezione fatta dal prof. De-Paolis alla dimostrazione del Faifofer (la quale del resto non ha nulla a che fare colla mia, checchè ne dica il sig. Lazzeri) perchè occorrendo, come ho descritto nel libro, di dividere uno dei poligoni nello stesso modo con cui è diviso il suo eguale dal contorno della parte comune, e potendo per tale operazione questa parte comune venir divisa e suddivisa successivamente più volte; può ragionevolmente dubitarsi che tali suddivisioni non abbiano termine. Ma a ciò io rispondo che le suddivisioni della parte comune cessano, ogni volta che i lati delle parti risultanti sono ridotti minori dei lati corrispondenti della parte non comune appartenente all'uno o all'altro dei poligoni eguali. Ora per lati corrispondenti intendo quelli, le cui rette si sovrappongono, quando i due poligoni eguali sono sovrapposti. E che a tale risultato si venga lo conferma chiaramente l'esempio dei due trapezi eguali aventi un triangolo in comune, che ho posto alla fine della prop. E; al quale altri ne potrei aggiungere di poliedri e di poligoni eguali.

Da questi esempi si vede che, tanto nel caso in cui la parte comune non viene suddivisa (caso che si dà appunto quando i lati di detta parte sono rispettivamente eguali o minori dei lati corrispondenti della parte non comune di ciascuno dei poligoni dati) come nei casi in cui la parte comune è divisa una volta sola, due volte sole, tre o più volte, sempre però in numero finito; si osserva costantemente questo fatto: che le operazioni di suddivisione cessano, quando le parti risultanti, in cui la parte comune viene a spezzarsi, hanno, come ho detto avanti, i lati rispettivamente eguali o minori dei lati corrispondenti della parte non comune appartenente all'uno e all'altro dei poligoni che si considerano. Ci si convince poi che la cosa non può avere eccezioni, pensando che due segmenti eguali, come anche due poligoni eguali, sono sempre divisibili nello stesso numero di parti rispettivamente eguali e disposte nello stesso modo. Possiamo inoltre osservare che le suddivisioni della parte comune seguono sempre questa legge: fra le medesime ve ne può essere una che corrisponde a sè stessa, e questo accade quando i due poligoni si sovrappongono mediante una rotazione intorno ad un punto della parte comune; v'è poi una parte, che non corrispondendo a sè stessa, ha le sue corrispondenti eguali fuori della parte comune; vi sono poi due parti eguali che anch'esse, non corrispondendosi fra loro, hanno di necessità le loro corrispondenti fuori della parte comune. Vi possono essere inoltre tre parti eguali, quattro parti eguali, ecc., che si trovano tutte nelle condizioni di quelle precedenti.

Ora io desidererei sapere perchè il prof. Lazzeri non ha fatto menzione dell'esempio sopra ricordato, mentre è da esso che avrebbe dovuto cominciare la sua critica, se invece di affermare semplicemente le cose, le avesse anche dimostrate, com'era suo dovere. Limitarsi a sollevare dei dubbî non vuol dire discutere; e non è sicuramente coi dubbî che si fa la scienza. Cerchi piuttosto, se pure gli sarà possibile, il sig. Lazzeri degli esempi da contrapporre al mio, dai quali risulti che vi sono casi in cui le divisioni successive da farsi nei due poligoni non hanno termine, e nemmeno allora potrà dire che la mia dimostrazione non è corretta, perchè essa vale sempre. Allora ciò che si renderà necessario di fare sarà semplicemente questo, cioè: estendere il concetto di poligoni equivalenti al caso in cui il numero delle parti eguali, nelle quali essi possono decomporsi, cresce indefinitamente.

M'interessa poi fare un'altra osservazione: cioè che l'esempio da me arrecato dei due trapezî, ha pure un'altra importanza, la quale sembra sia sfuggita all'autore della recensione. E l'importanza è questa: che con esso



dimostro in modo nuovo, più semplice di quello indicato dal prof. De-Paolis, l'equivalenza di due parallelogrammi aventi basi eguali ed altezze eguali; e ciò senza bisogno di premettere il caso dei parallelogrammi che hanno la stessa base o sono collocati in un determinato modo l'uno rispetto all'altro. Aggiungerò anche che seguendo un processo analogo dimostro pure (e di ciò farò argomento d'un prossimo articolo) che due parallelepipedi, i quali hanno basi eguali ed altezze eguali, sono equivalenti.

Quanto alla dimostrazione della prop. F, colla quale, in ultima analisi, si rende manifesto che, se due poligoni equivalenti sono sovrapposti, ciascun d'essi deve avere una parte esterna rispetto all'altra; essa non ha bisogno di divisioni successive, e però i dubbî sollevati nella recensione non hanno, neppure rispetto ad essa, l'ombra del fondamento.

E qui finisco la parte della mia autodifesa relativa alla questione dell'equivalenza, sicuro che tutto quanto ho detto è più che sufficiente a completamente annullare la critica del prof. Lazzeri. Onde, se come egli stesso dice, la dimostrazione del postulato dell'equivalenza deve segnare un progresso nel campo degli studi geometrici, tale progresso può dirsi raggiunto.

Mi occuperò ora del postulato del diedro, il quale si connette coll'altra questione riguardante la fusione della geometria piana colla solida.

L'autore della recensione conviene meco che la proprietà del diedro di essere rovesciabile non è un postulato, e mi fa sapere che le proprietà analoghe dell'angolo e del segmento sono l'una conseguenza dell'altra; talchè, ammessa la proprietà p. es. per il segmento, si deduce *facilmente* quella analoga dall'angolo e del diedro. E poi aggiunge « che molti autori, pur riconoscendo perfettamente questo fatto, hanno creduto di poter ammettere come postulato la possibilità di rovesciare un segmento, un angolo o un diedro, perchè consideravano come un *solo postulato* l'ammettere un medesimo fatto per enti della stessa natura. Riconosco che quest'opinione può essere discussa, ma per conto mio mi contento di vederla professata anche da valenti geometri, come Sannia, D'Ovidio e De-Paolis ». Ed io alla mia volta dirò che questo non è completamente vero: perchè il De-Paolis non segue sempre tale criterio. Difatti, mentre egli comprende in un solo postulato il segmento, l'angolo e il diedro, quando si tratta della loro comune proprietà di essere rovesciabili; ammette invece per il solo segmento il postulato d'Archimede, del quale poi fa un teorema per l'angolo, il diedro e le altre grandezze in generale. E i prof. Sannia e D'Ovidio enunciano separatamente il postulato del segmento, quello dell'angolo e quello del diedro. Comunque sia, e senza che in me venga meno la stima che ho sempre avuta per i professori sopra nominati, mi sarà lecito esprimere in proposito la mia opinione; la quale non è certo in armonia con quella manifestata dal sig. Lazzeri. Io mi domando: a che scopo devono attribuirsi ad alcuni enti geometrici, come postulati, delle proprietà, le quali costituiscono altrettanti teoremi? L'autore della recensione dice che molti autori hanno creduto di poter far ciò, perchè si trattava di enti della stessa natura. Sarà questa una ragione plausibile, ma a me non sembra tale; e poi non vedo nel segmento, nell'angolo e nel diedro questa stessa natura.

Invece, per me tali enti non costituiscono altro che tre specie di grandezze; le quali, avendo delle analogie fra loro, sono classificabili sotto un medesimo genere.

Se poi considero la cosa nel rispetto scientifico, allora la trovo anche meno commendevole. Difatti è da tutti convenuto che i postulati d'una scienza, e in particolare quelli della geometria, debbono essere ridotti al minor numero possibile: debbono cioè costituirsi di tutte e sole quelle proposizioni, distinte fra loro, le quali si rendono indispensabili per dedurne le altre verità della medesima scienza. E tutto ciò, s'intende, allo scopo di rendere tale scienza completamente rigorosa ed esatta. Se dunque si classifica fra i postulati la proprietà sopra ricordata del diedro, essendo noto ch'essa appartiene ai teoremi, non si potrà dire, a rigor di termini, d'aver fatto una scienza logicamente e rigorosamente esatta. E quando ciò non sia sufficiente a persuadere il sig. Lazzeri, riporterò qui l'opinione d'un comune amico, il prof. Bettazzi, il quale in un articolo intitolato « I postulati e gli enti geometrici » scriveva: « i postulati d'una scienza devono essere scelti in modo da risultare indipendenti e non contradditori. Se stabiliti che siano in modo da conoscere che soddisfino a tali condizioni, si giungesse in seguito a provare che qualcuno di essi è conseguenza logica degli altri, esso deve essere tolto dalla categoria dei postulati e posto in quella dei teoremi, il conservarlo fra i postulati sarebbe non già inutile, ma bensì *erroneo*, apparendo esso una verità arbitraria, mentre è verità necessaria ». È inutile adunque che il sig. Lazzeri si sforzi a negar fondamento alle mie affermazioni, quando esse sono avvalorate e confortate dall'opinione di valenti colleghi, onde avrò sempre ragione d'insistere che se la fusione della geometria piana colla solida, nel senso specialmente di comprendere in un solo enunciato le proprietà dell'angolo e quelle analoghe del diedro, deve farsi ammettendo un teorema fra i postulati, ciò è scientificamente un errore.

Ho inoltre affermato che tale fusione non è raccomandabile nemmeno dal lato didattico, e il prof. Lazzeri desidera che avvalori la mia asserzione con ragioni positive. Onde io risponderò che ciò è soprattutto questione d'esperienza, ma in ogni modo è chiaro che sarà cosa molto più facile dare ad intendere ad un giovanetto delle nostre scuole liceali successivamente le proprietà del diedro, dopo che egli avrà ben capite e fatte cognizioni proprie quelle dell'angolo, anzichè procedere allo studio di questi due enti contemporaneamente. Son sicuro poi che moltissimi miei colleghi pensano in proposito come me; e non è passato molto tempo che uno dei professori dell'Università di Pisa, amicissimo del De-Paolis, mi riferiva che nella circostanza di certi esami d'abilitazione all'insegnamento, il De-Paolis stesso si era dichiarato didatticamente contrario alla fusione in discorso. La qual cosa farà certamente meraviglia all'autore della recensione, tanto più se osserverà che io, per ribattere le sue argomentazioni, mi giovo del nome stesso del quale egli si è servito per la sua critica. Ma contro i fatti non c'è parole che bastino, ed io ho voluto ricordare la circostanza precedente, onde far capire al sig. Lazzeri che, dichiarandomi pubblicamente contrario



alla fusione della geometria piana colla solida, ero sicuro di non offendere, come egli ha temuto, sebbene fuor di luogo, la memoria del compianto prof. De-Paolis, del quale ho anch'io sempre ammirato la sapienza e l'ingegno.

Non si creda però che combattendo la fusione delle due Geometrie, io voglia tenerle nettamente separate, perocchè penso che sarebbe molto utile l'alternarne convenientemente le parti. E vedrei anzi di buon grado cangiati i programmi ministeriali dei Licei in modo che, dopo i primi quattro libri d'Euclide, si potessero esporre le proprietà di posizione delle rette e dei piani nello spazio; di guisa che i giovani, avanti di accingersi allo studio delle proporzioni, avessero ad un tempo e maggiore cultura matematica e più familiarità colle questioni geometriche.

Vengo ora a parlare dei postulati che ho intercalati fra le prime definizioni del testo Euclideo, e a proposito dei quali la recensione contiene l'unico elogio del mio libro, affermando che per questo rispetto la seconda edizione è migliore della prima. A tanta generosità, è proprio il caso di esclamare: troppa grazia!... Il sig. Lazzeri però dice che tali postulati sono quelli già adottati dal De-Paolis e da altri, ed io invece rispondo che, nella massima parte, sono proprio quelli tacitamente ammessi da Euclide, e che ho fedelmente ricercati. S'intende bene che essi non potranno differire gran che da quelli già conosciuti di altri autori; tuttavia sia per l'ordine diverso col quale si succedono, sia per il modo col quale sono enunciati, si può dire che quasi tutti presentano la loro nota caratteristica.

Difatti il post. I, che chiamo *del punto*, è ammesso da Euclide nella prop. IV; ed io nell'enunciarlo a parte, ho voluto dare alla proprietà caratteristica di questo ente, la quale consiste in ciò che un punto può sempre pigliare la posizione di qualsivoglia altro punto dello spazio, quell'importanza che in generale non gli viene attribuita. Ho fatto ciò sembrandomi che tale proprietà dia un'idea giusta di quella che ordinariamente chiamasi *omogeneità* dello spazio; la quale è da molti autori ammessa come postulato, senza prima dichiararne bene il significato; e poi senza alcun vantaggio, perchè tale parola non viene da essi mai invocata.

Il post. III, che si riferisce alla linea in genere, è implicitamente ammesso in quasi tutte le proposizioni del secondo libro d'Euclide. La prima parte del suo enunciato dice: « *in ogni linea, terminata o no, esistono infiniti punti che la dividono in parti* »; ove l'inciso è stato messo a posta onde escludere dall'idea di linea ch'essa possa avere *interruzioni* o *discontinuità*, e ciò senza far uso di queste parole, le quali non essendo facilmente definibili, devono, come la parola *omogenea*, essere bandite dai postulati.

Il post. IV è dedicato alla linea retta. Il De-Paolis dice che la retta è una linea *indefinita;* ed io, come già hanno fatto altri, ommetto questa parola; la quale, a somiglianza delle altre precedentemente ricordate, non ha ragione di trovarsi fra i postulati. Nella terza parte poi io m'allontano dal testo Euclideo, dove esso dice che *due rette non possono racchiudere uno spazio*, e preferisco invece quest'altra dizione: *La posizione di una retta è individuata dalle posizioni di due qualunque dei suoi punti;*

donde si deduce facilmente che due rette, le quali hanno due punti in comune, avendo la stessa posizione, coincidono. In tal modo viene ad essere evitata la contraddizione, la quale, sebbene apparente, non si può dire che non si faccia; allorchè si afferma che per due punti non può passare che una linea retta, e poi ce ne facciamo passare più d'una.

Il post. V è quello del segmento, ed è ammesso tacitamente da Euclide nella prop. VI.

Il post. VI si riferisce alla superficie in generale ed è specialmente usato in quasi tutte le proposizioni del secondo libro. Rispetto ad esso valgono le stesse considerazioni già fatte a proposito del postulato della linea in genere.

Il post. VII contiene le proprietà primordiali del piano. Nella prima parte esso non è conforme al testo Euclideo, ammettendo la proprietà che *se una retta ha due punti comuni con un piano è tutta situata in esso*; mentre Euclide nel libro XI ha il teorema: « *una retta non può essere in parte in un piano ed in parte fuori di esso* ». La ragione di ciò sta nel fatto che la dimostrazione di questo teorema non è rigorosa: difatti mentre in esso si suppone che il prolungamento d'una retta, situata in un piano, sia fuori del piano stesso; poi, durante il ragionamento, si ammette che la medesima retta abbia, dalla stessa parte, un altro prolungamento tutto situato in quel piano.

Il post. VIII è quello dell'angolo, che Euclide ammette tacitamente nella prop. V. A proposito di esso il prof. Lazzeri mi domanda, se mi sono accorto che esso può dedursi da quello del segmento. Onde io dirò che, sebbene avessi veduto che una certa dipendenza esiste fra questi due postulati, osservando che quando si rovescia l'angolo al vertice d'un triangolo isoscele, si rovescia anche la sua base, credo non troppo facile, se non impossibile, dedurre il postulato dell'angolo da quello del segmento. In ogni modo non avrei potuto tener conto dell'osservazione precedente, altro che alterando in gran parte l'ordine del testo Euclideo; la qual cosa non volevo nè dovevo fare, tanto più che, preferendo il metodo da me seguito, interpretavo più fedelmente il testo medesimo. Si badi però, che queste parole non debbono mettermi in contraddizione con ciò che ho precedentemente sostenuto a proposito del postulato del diedro; e dichiaro anzi che qualora il sig. Lazzeri volesse indicarmi quel modo facile a cui egli allude di ottenere il postulato dell'angolo da quello del segmento, senza ch'io fossi costretto ad alterare di troppo l'ordine del testo Euclideo, sarei lietissimo di poter introdurre questo miglioramento nel mio libro. Allora starei sicuro che almeno una cosa buona ci si troverebbe!...

Il post. IX si riferisce al movimento delle figure, ed è usato da Euclide nelle prop. IV ed VIII. Il De-Paolis enunciò il postulato del movimento dicendo: *in tutto lo spazio è possibile il movimento delle figure, e senza deformazione*. Il Bettazzi, nell'articolo citato, criticò la frase « senza deformazione » ritenendola inutile ed inesatta; per la ragione che se una figura si deforma, vuol dire che perde alcune delle sue proprietà, onde non è più la figura primitiva. A me invece quella frase, che non approvo sola-



mente perchè non è ben definita, fa pensare ad un'altra cosa: cioè alla possibilità che una figura possa muoversi, se non deformandosi, certo variando e soddisfacendo a date condizioni. Per esempio: una circonferenza si può muovere mantenendo costante il suo raggio, oppure facendolo variare; ed in questo secondo caso, non si può dire propriamente che essa si deformi, e tanto meno che perda le sue proprietà. Ne viene per conseguenza che il postulato del movimento, specialmente se esso deve servire a stabilire il concetto dell'eguaglianza di due figure, non è ben determinato, quando ci si limiti a dire, come vuole il Bettazzi, che « una figura geometrica può muoversi nello spazio geometrico ». Ond'è che io, avendo fatto precedere i postulati del segmento e dell'angolo e però avendo già stabilita l'eguaglianza di due segmenti e di due angoli, ho potuto enunciare il postulato del movimento diversamente dagli altri autori, dicendo: « Una figura può muoversi in modo che rimangano uguali i segmenti, i quali uniscono, due a due, i suoi punti; e rimangano pure uguali gli angoli che le sue rette, due a due, fanno fra loro ». Ciò non esclude il caso che una figura possa muoversi per modo che i suoi segmenti, oppure i suoi angoli soddisfino a condizioni diverse. Si deduce poi facilmente da tal postulato, che se tre punti della figura sono fissi, essa è immobile.

Resta ora che io parli, seguendo la recensione, delle dimostrazioni cambiate e dei teoremi aggiunti o soppressi. A leggere la recensione stessa sembra che questi cambiamenti ed aggiunte siano tali e tante da non più riconoscere il testo Euclideo. La verità però è questa: che sopra quarantotto proposizioni, di cui si compone il primo libro d'Euclide, mi son permesso di cambiare due sole dimostrazioni: quelle delle proposizioni V ed VIII; e di togliere due soli teoremi: il VII ed il XXI. Chiunque abbia insegnato gli elementi d'Euclide, avrà certamente osservato che le dimostrazioni più difficili a impararsi e a ritenersi dai giovani alunni sono appunto quelle dei teoremi V e VII. Questa sola considerazione però non sarebbe stata sufficiente a farmi cambiare la prima delle dimostrazioni riferite e a togliere la seconda; tanto era in me il proposito di non apportare sensibili modificazioni al testo Euclideo. Ma avendo osservato che la dimostrazione V contiene tacitamente il postulato dell'angolo, e che una volta ammesso questo postulato, il farla dipendere dalla prop. IV, come fa Euclide, diventava un vero artifizio; era naturale ch'io la cangiassi, e ad un ragionamento che prima stancava la mente dei giovani, ne sostituissi un altro, di cui la brevità e l'evidenza sono ammirevoli. Ho cambiato anche la dimostrazione del teorema VIII, e ciò per sostituire un ragionamento diretto ad uno all'assurdo, e per aver modo di togliere il teorema VII; il quale, come dicevo poco fa, oltre a non essere di facile intelligenza, non ha alcun uso nel seguito dell'opera. Le dimostrazioni all'assurdo sono troppo frequenti in Euclide, ed è già stato notato come ciò costituisce uno dei suoi difetti; non avrò dunque avuto un gran torto a diminuirne il numero. Ho poi tolto il teorema XXI, perchè, avendolo incluso in un corollario della proposizione precedente, si rendeva inutile.

Ora tutto questo il sig. Lazzeri lo chiama riveder le bucce ad Euclide.

Son sicuro però che chi mi giudicherà con più imparzialità e benevolenza di lui, capirà benissimo che l'unico mio pensiero è stato quello di rendere sempre più adatto all'insegnamento un libro, che dal 1867 in poi aveva già recato molti vantaggi all'istruzione secondaria classica. È singolare poi che il sig. Lazzeri esca fuori con simili frasi, dopo avere scritto in principio della sua recensione, che gli elementi d'Euclide « hanno continuato a dominare invariati nelle nostre scuole con gli stessi difetti, colle stesse figure brutte e spesso sbagliate, senza migliorarsi mai, non tenendo alcun conto dei progressi fatti in questo tempo dagli studi geometrici elementari ». Adunque se traendo occasione dai progressi fatti e profittando della mia esperienza nell'insegnamento, cerco appunto di raggiungere questi miglioramenti del testo euclideo tanto desiderati ed invocati, si dovrà dire che ho la pretensione di riveder le bucce ad Euclide? In che cosa avrebbero dovuto consistere i miglioramenti se non avevano per scopo di porre colla maggiore esattezza e precisione i concetti della geometria elementare, e se non fossero stati tali che tutte le verità di questa scienza si svolgessero le une dalle altre col massimo rigore logico? Secondo il sig. Lazzeri il mio libro non ha che difetti, ma intanto nella sua recensione non c'è la prova di un solo. Eppure egli non dovrebbe ignorare che quando si biasima, molto più di quando si loda, abbiamo il dovere di dimostrare le cose affermate. Egli parla di figure brutte e spesso sbagliate, ma in realtà di sbagliate io non ne trovo alcuna. Se son brutte è questione soprattutto tipografica, e poi se son sempre state a quel modo, che c'è da farci? Del resto alla figura materiale non credo che si debba dare una grande importanza: perchè se qualche volta è utile allo studioso, qualche altra può essere nociva; e chi ha esperienza dell'insegnamento avrà veduto, che questo secondo caso si dà assai di frequente. Per mio conto voglio che gli alunni si abituino a farle a modo loro le figure, e soprattutto che le abbiano chiare nell'immaginazione. Alcuni difetti poi di cui parla la recensione sono addirittura immaginari; come quello di cui l'esistenza si può dedurre dalla seguente domanda: « si è mai accorto il dott. Gremigni che le prop. I, XII, XXII non si possono dire dimostrate rigorosamente senza i teoremi relativi alle intersezioni d'un circolo con una retta, e di due circoli fra loro, teoremi che Euclide mette nel III libro? » Ed io alla mia volta domanderò al sig. Lazzeri: ha mai letta l'osservazione che è posta alla fine della prop. XXII? Se l'avesse letta ci avrebbe trovato la dimostrazione rigorosa, che egli desidera: poichè in essa si dimostra appunto che le circonferenze, le quali servono per la costruzione del triangolo, una volta che siano soddisfatte le condizioni poste nell'enunciato del problema, si segheranno necessariamente; epperò il problema, date quelle condizioni, sarà sempre possibile e la sua costruzione sarà esatta e rigorosamente dimostrata. Che cosa vuol dunque significare il sig. Lazzeri colla sua domanda? Avrebbe forse voluto che portassi le proposizioni del III nel I libro? E se anche tale spostamento avesse servito a rendere rigorose quelle proposizioni (cosa del resto che non è possibile: perchè Euclide nel III libro non dimostra altro che se due circonferenze si segano non avranno lo stesso centro, e i punti d'intersezione non saranno più di due) avrei dovuto mettere le proposizioni del terzo libro avanti la prop. I del primo libro? Allora sì che poteva dirsi con ragione che l'Euclide non si sarebbe più riconosciuto. Eh via, sig. Lazzeri, sta tutta qui la sua critica?



Quanto alle proposizioni da me aggiunte, le ho distinte colle lettere dell'alfabeto, e si riferiscono tutte all'eguaglianza e all'equivalenza dei poligoni. Se si tratta invece delle definizioni e dei corollari aggiunti, essi sono tutti scritti con carattere diverso; talchè può sempre distinguersi ciò che riguarda il testo euclideo, da quello che è mia opera. Qual ragione dunque ha il sig. Lazzeri di chiudere la sua recensione colle seguenti parole? « Tutto ciò sarà utile, ma è il caso di domandarsi, se con tante note, aggiunte e modificazioni gli *Elementi d'Euclide* sono ancora gli *Elementi d'Euclide*, e se per caso il nome del grandissimo geometra greco è utilizzato soltanto per dare accesso privilegiato nelle nostre scuole all'opera di un minor geometra italiano ». Io non starò qui a rilevare la malignità, che è contenuta in queste frasi; ma farò osservare all'autore della recensione, che se il nome d'Euclide fosse bastato perchè i suoi *Elementi* avessero libero accesso nelle nostre scuole, non si sarebbe sentito il bisogno d'una nuova edizione; tanto più che la prima portava i nomi di Enrico Betti e Francesco Brioschi. Di più egli dovrebbe sapere che i libri non s'impongono altro che per la loro bontà e il valore didattico e scientifico che hanno; e sarebbe un far torto ai professori delle scuole secondarie classiche, qualora si pensasse diversamente. E poi se il mio libro è pieno di difetti, come crede il sig. Lazzeri, perchè dovrebbe avere accesso privilegiato nelle scuole? È un fatto che i programmi ministeriali prescrivono il metodo euclideo per l'insegnamento della Geometria nei Licei e Ginnasi, ma non indicano nè questo o quel libro speciale. A che cosa mirano dunque le parole della recensione? A nient'altro che a colpire il *minor geometra*, il quale non ha altro torto che di combattere contro coloro, i quali sostengono potersi fondere, fin dagli elementi, la geometria piana colla solida. Meno male che, quantunque piccolo, egli conosce il fatto suo, e sa bene difendersi; ciò che capirà anche il sig. Lazzeri, se vorrà provarsi a replicare.

Quanto poi all'utile che potrò ricavare dalla mia opera, è bene che si sappia, come in simili faccende non sono mai gli autori che fanno interesse, bensì gli editori; e, nel mio caso speciale dirò che, se mi sono dato a curare una nuova edizione degli Elementi d'Euclide, l'ho fatto principalmente per aderire ad un desiderio espressomi dal compianto prof. Betti.

*Firenze, 14 febbraio 1893.* Prof. M. Gremigni.

*Illustrissimo Signor Direttore,*

Non ho l'intenzione di discutere gli apprezzamenti fatti dal sig. Burali-Forti su alcuni punti dei miei « Elementi di Aritmetica e Algebra » nell'ultimo fascicolo della *Rivista di Matematica;* tuttavia non posso lasciar correre la pretesa *insufficienza delle proprietà caratteristiche,* da me date per le grandezze, che egli deduce da un errore di stampa o, se si vuole, di penna, e da asserzioni, certamente involontarie, di cose non vere o inesatte.

L'errore è questo: nella definizione di *sistema ordinario e completo di grandezze* (n. 67, pag. 31), è stampato: « Se date due grandezze » invece che « se date due grandezze disuguali », come doveva essere. Dietro questo errore, egli mi fa stabilire la proposizione $\delta$, in luogo dell'altra contrassegnata $\delta'$; ossia, nella sua interpretazione, ammette che io abbia voluto escludere la possibilità di grandezze eguali. Senza tener conto dell'esempio da me addotto poche linee più avanti, nel quale si parla di « coppie di numeri disuguali », e che dovrebbe, a mio avviso, eliminare qualunque equivoco, mi sembra legittima l'osservazione che, dopo una simile interpretazione, egli avrebbe dovuto dichiarare il mio libro, nel quale s'incontrano ad ogni passo eguaglianze di grandezze, nulla più che una completa contraddizione.

Egli invece continua le sue censure, affermando, o almeno lasciando credere al lettore, che io non abbia stabilito le proposizioni da lui contrassegnate $\gamma'$ (suppongo, in luogo di $\gamma$, come è stampato) ed $\varepsilon$; mentre la tesi della $\gamma'$ ($A - \varepsilon\, A \times G$), valevole solo per le grandezze non *indifferenti,* è espressa nella definizione di *risultante* (n. 58), colle parole « formando una cosa diversa dalla prima », e la $\varepsilon$ non è altro che l'uniformità della *divergenza,* da me dimostrata nel n. 69. La prova, in fine, da lui data, che la $\varepsilon$ non possa discendere dalle mie proposizioni, coll'esempio dei *razionali, lo zero compreso, dando ad* $A \times B$ *il significato dell'ordinario prodotto,* è di fatto erronea; poichè, secondo i miei Elementi (n. 245, pag. 125), lo zero è, in questo caso, l'*assoluto* (*inferiore*), il quale è introdotto solo più tardi al n. 104 (pag. 48), dove è stabilita, per esso, l'insussistenza della proposizione $\varepsilon$, origine dei casi di indeterminazione.

La ringrazio per la cortesia che, spero, Ella vorrà usarmi, pubblicando la mia rettifica nella *Rivista,* e mi affermo

*Sassari, 25 marzo 1893.*

*Suo devotissimo*
GIOVANNI BIASI.

---



## Sulla raccolta di formule.

III.

La parte III della raccolta contiene le principali formule di aritmetica. Nel §6 sono contenute le più semplici proposizioni della *teoria dei numeri,* ma sarebbe desiderabile che tale teoria, già così estesa, fosse raccolta in una parte speciale del formulario.

C. BURALI-FORTI, *Accademia Militare, Torino.*

### *Indice.*



### Spiegazione dei segni.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Il segno | quot | significa | *quoto* o *quoziente* [§2P1]. |
| » | rest | » | *resto* [§2P5]. |
| » | D | » | *massimo divisore* [§3P1, 1']. |
| » | m | » | *minimo multiplo* [§4P1, 1']. |
| » | Np | » | *numero primo* [§5P1]. |
| » | mp$(b, a)$ | | ove $a$ e $b$ sono numeri interi diversi da zero, indica la *massima potenza di* $b$ *che è divisore di* $a$ [§5P19]. |
| » | $\min_n u$ | | ove $n$ è un' N e $u$ una classe di numeri, indica l'$n$-esimo numero della classe $u$, quando questi sieno disposti in ordine crescente [§5P35, 36]. |
| » | $u_n$ | | ove $n$ è un numero intero e $u$ una classe di numeri interi equivale al segno $\min_n u$ [§5P37]. |
| » | $\pi a$ | | ove $a$ è un numero intero, indica la classe dei numeri non maggiori di $a$ e primi con $a$ [§6P11]. |
| » | $\varphi a$ | | ove $a$ è un numero intero, indica il numero degli individui della classe $\pi a$ [§6P12]. |

# Sulla teoria delle grandezze.

## Nota I.

Questa nota e le seguenti contengono una serie di osservazioni alla parte IV del formulario riguardante la teoria delle grandezze.

Il § 1 di questa parte del formulario contiene le definizioni, le proposizioni primitive e i gruppi di proposizioni primitive indipendenti. Il contenuto di questo primo paragrafo, sarà distribuito in queste note secondo il bisogno.

Ho ammessa nota la teoria dei numeri reali per la trattazione di quella delle grandezze, riducendosi a poche le proprietà di queste indipendenti dal concetto e dalla teoria, almeno, del numero intero. Nè ho creduto conveniente, ammessa nota la sola teoria dei numeri interi, ottenere i razionali e gli irrazionali come classi speciali di grandezze, per ragioni che indicherò nell'ultima di queste note, la quale conterrà, in gran parte, osservazioni di ordine puramente didattico.

Ho posto a destra dell'enunciato di ogni proposizione i numeri indicanti le proposizioni primitive dalle quali la proposizione stessa dipende. Con ciò ho potuto risparmiarmi l'introduzione di simboli per indicare classi speciali di grandezze, mentre ho fornito il mezzo, a chi debba servirsi di un numero limitato di proposizioni, di riconoscere immediatamente quali proprietà deve ammettere sieno verificate per la classe speciale che considera.

Non ho introdotto la grandezza *zero* e la grandezza *infinito;* nè ho considerato le classi a *due sensi* e quelle ad *n dimensioni.*

Le note storiche riguardanti l'argomento che tratto, saranno pubblicate insieme al formulario completo.

### NOTAZIONI

Oltre le notazioni già introdotte nelle parti precedenti del formulario, farò uso delle seguenti:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Il segno | G | indica | *grandezza.* |
| » | Tn | » | *teoria dei numeri interi.* |
| » | Tr | » | *teoria dei razionali.* |
| » | Tq | » | *teoria dei numeri reali.* |
| » | Pi | » | *principio d'induzione.* |



### § 1.

**1.** Ammetteremo che per gli individui di una classe di grandezze, sieno verificate, per ciò che riguarda *l'eguaglianza,* le condizioni già date per l'eguaglianza di due individui di una classe qualunque (Formulario I§4P7-9).

Ammetteremo cioè che

$$\begin{aligned} &A,\ B,\ C \varepsilon G . \supset :\\ &A = A\\ &A = B . = . B = A\\ &A = B . B = C . \supset . A = C . \end{aligned}$$

**2.** Se G è una classe di grandezze e A, B sono due qualunque dei suoi individui, con $A + B$ indicheremo una qualche cosa, che si ottiene eseguendo su A l'operazione $+ B$.

Tale operazione ($+$) è completamente arbitraria. Essendo p. e. G la classe dei piani, con $A + B$ possiamo indicare la retta comune ai due piani A e B. In tal caso $A + B$ è indeterminato se A e B coincidono o anche se A e B sono paralleli quando non si introduca la nozione della retta all'infinito. Se invece G è ancora la classe dei piani, ogni piano è considerato come classe di punti, e l'operazione $+$ è l'operazione logica $\frown$, allora $A + B$ indica la retta comune ai piani A e B se questi sono distinti, il piano A se A e B coincidono, il *nulla* o una retta all'infinito, secondo le convenzioni, se i piani A e B sono paralleli. Se G è p. e. la classe dei numeri come operazione $+$ può prendersi *l'addizione,* la *sottrazione,* la *moltiplicazione,* ecc. Essendo G una classe di grandezze come operazione $+$ può prendersi l'ordinaria *misura,* si può cioè convenire di indicare con $A + B$ la misura di A mediante B, e in tal caso $A + B$ è un individuo appartenente alla classe dei numeri reali.....

Definendo l'operazione $+$ in modo che $A + B$ sia un individuo appartenente ad una classe diversa dalla classe G, allora l'espressione $(A + B) + C$ o $A + (B + C)$, essendo anche C un individuo di G, se non si fanno altre convenzioni, non ha più alcun significato.

Ammetteremo quindi che l'operazione $+$ sia definita in modo tale che $A + B$ sia un individuo della classe G. In simboli

**0.** $A,\ B \varepsilon G . \supset . A + B \varepsilon G$ Pp.

Se G è la classe dei numeri interi positivi, soddisfano alla Pp 0 le operazioni *addizione* e *moltiplicazione,* non vi soddisfano le operazioni *sottrazione* e *divisione.* Se G è la classe dei razionali positivi o negativi, lo zero compreso, soddisfano alla Pp 0 le operazioni *addizione, moltiplicazione, sottrazione,* e non si soddisfa l'operazione *divisione.* Se G è la classe dei razionali positivi, lo zero escluso, soddisfano alla Pp 0 le operazioni *addizione, moltiplicazione, divisione* e non vi soddisfa l'operazione *sottrazione.*

La Pp 0 non è stata indicata nella dipendenza delle varie proposizioni dalle proposizioni primitive, essendo pochissime quelle proposizioni che da essa sono indipendenti.

**3.** Potremo stabilire l'operazione $+$ in modo che soddisfi a tutte o a parte delle proposizioni primitive seguenti:

$$\mathrm{A, B, C} \,\varepsilon\, \mathrm{G} \,.\supset:$$

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{1}. & \mathrm{A = B} \,.\supset.\, \mathrm{A + C = B + C} \\ \mathbf{1}_1. & \mathrm{A = B} \,.\supset.\, \mathrm{C + A = C + B} \\ \mathbf{2}. & \mathrm{A + C = B + C} \,.\supset.\, \mathrm{A = B} \\ \mathbf{2}_1. & \mathrm{C + A = C + B} \,.\supset.\, \mathrm{A = B} \\ \mathbf{3}. & \mathrm{A + B = B + A} \\ \mathbf{4}. & \mathrm{(A + B) + C = A + (B + C)} \end{array}\right\} \text{Pp.}$$

I gruppi di Pp indipendenti che si possono formare con le Pp precedenti, stabiliscono le condizioni caratteristiche per altrettante classi di operazioni $+$. Se p. e. G è la classe dei numeri reali, lo zero escluso, soddisfano a tutte le Pp precedenti le operazioni *addizione* e *moltiplicazione,* mentre la *divisione* soddisfa solo alle Pp$1 \,.\, 1_1 \,.\, 2 \,.\, 2_1$. Soddisfa alle Pp precedenti l'operazione *addizione* come si definisce ordinariamente per le grandezze geometriche ecc. .....

La Pp1 esprime che: « Se A, B, C sono grandezze e A e B sono eguali, allora eseguendo su A e B l'operazione $+$C, i risultati che si ottengono sono eguali ». Esistono classi G e operazioni $+$ per le quali la Pp1 non è vera. Se p. e. G è la classe dei razionali e $\mathrm{A + B}$ indica la somma nel senso aritmetico dei numeratori, allora la Pp1 non è vera. La Pp1 è dunque necessaria per certe classi G e per certe classi di operazioni $+$, potendo esistere alcune di queste, per le quali la Pp1 non è vera.

La Pp$1_1$ esprime che: « Se A, B, C sono grandezze e A e B sono eguali, allora il risultato che si ottiene eseguendo su C l'operazione $+$A è eguale al risultato che si ottiene eseguendo su C l'operazione $+$B. Anche questa, come la precedente, è necessaria.

Le Pp2 e $2_1$ sono, rispettivamente, le inverse delle Pp1 e $1_1$. Se G è la classe dei numeri interi, lo zero compreso, e l'operazione $+$ è l'ordinaria *moltiplicazione,* allora le Pp2 e $2_1$ non sono vere. Dunque le Pp2 e $2_1$ sono necessarie.



La Pp3 esprime, in un caso particolare, la proprietà *commutativa* o *permutativa* dei termini della somma. La Pp3 è necessaria, poichè se G è p. e. la classe dei numeri reali, lo zero escluso, e l'operazione $+$ è l'ordinaria *divisione,* allora la Pp3 è falsa.

La Pp4 esprime, in un caso particolare, la proprietà *associativa* della somma. La Pp4 è necessaria, poichè se la classe G è la classe dei numeri reali positivi o negativi, lo zero compreso, e l'operazione $+$ è la *sottrazione,* allora la Pp4 non è vera.

**4.** Le Pp date al numero precedente non sono tutte indipendenti. Le seguenti proposizioni $(a)$, $(b)$, $(a')$, $(b')$, equivalgono, ordinatamente, alle P1, 2, 1′, 2′ del § 2 del formulario.

$$\begin{array}{ll} (a) & \mathrm{Pp1 \,.\, Pp3} \,.\supset.\, \mathrm{Pp1_1} \\ (b) & \mathrm{Pp2 \,.\, Pp3} \,.\supset.\, \mathrm{Pp2_1} \\ (a') & \mathrm{Pp1_1 \,.\, Pp3} \,.\supset.\, \mathrm{Pp1} \\ (b') & \mathrm{Pp2_1 \,.\, Pp3} \,.\supset.\, \mathrm{Pp2.} \end{array}$$

Dalle proposizioni $(a)$ e $(a')$ si deduce (Formulario I§2P24)

$$\mathrm{Pp1 \,.\, -Pp1_1} \,.\supset.\, \mathrm{-Pp3}$$
$$\mathrm{Pp1_1 \,.\, -Pp1} \,.\supset.\, \mathrm{-Pp3} \;;$$

da queste si deduce (I§2P17, 10)

$$\mathrm{(Pp1 \,.\, -Pp1_1) \cup (Pp1_1 \,.\, -Pp1)} \,.\supset.\, \mathrm{-Pp3} \;;$$

ovvero facendo uso del segno $\circ$, *aut* dei latini (I §3P24)

$$(c) \quad \mathrm{Pp1 \circ Pp1_1} \,.\supset.\, \mathrm{-Pp3} \;,$$

e analogamente, dalle P $(b)$, $(b')$

$$(c') \quad \mathrm{Pp2 \circ Pp2_1} \,.\supset.\, \mathrm{-Pp3} \;.$$

La $(c)$ esprime che « Se è vera la Pp1 e non è vera la Pp$1_1$ oppure non è vera la Pp1 ed è vera la Pp$1_1$, allora la Pp3 non è vera ». La $(c')$ ha analogo significato.

Le P $(c)$ e $(c')$ possono trasformarsi nelle seguenti (I§2P4.§3P29):

$$\mathrm{Pp3} \,.\supset.\, \mathrm{(-Pp1 \,.\, -Pp1_1) \cup (Pp1 \,.\, Pp1_1)}$$
$$\mathrm{Pp3} \,.\supset.\, \mathrm{(-Pp2 \,.\, -Pp2_1) \cup (Pp2 \,.\, Pp2_1)} \,.$$

La prima di queste esprime che « Se la Pp3 è vera, le Pp1 e $1_1$ devono esser vere insieme o false insieme ». Analogo significato ha la seconda.

Se G è p. e. la classe dei razionali, lo zero escluso, e l'operazione $+$ è l'ordinaria divisione, allora le Pp1, $1_1$, 2, $2_1$ sono vere e la Pp3 è falsa. Ciò dimostra che la Pp3 non è conseguenza delle Pp1, $1_1$, 2, $2_1$. In simboli

$$\mathrm{Pp1}\,.\,\mathrm{Pp1_1}\,.\,\mathrm{Pp2}\,.\,\mathrm{Pp2_1}\,.-\mathrm{Pp3}\,.-=\Lambda\,.$$

Possiamo dedurre da questo che se in un gruppo di Pp indipendenti comparisce la Pp1 o $1_1$ si può a questa sostituire le due Pp$1_1$ e 3 o 1 e 3. Lo stesso dicasi per le Pp2 e $2_1$. Il gruppo in generale $1\,.\,1_1\,.\,2\,.\,2_1\,.\,3$, può ridursi al gruppo $1\,.\,2\,.\,3$, oppure ad uno dei gruppi $1_1\,.\,2_1\,.\,3$; $1\,.\,2_1\,.\,3$; $1_1\,.\,2\,.\,3$. Ad un gruppo però che contenga p. e. 1 e 3 non si può sostituire al gruppo $1\,.\,3$ il gruppo $1\,.\,1_1$. Nel formulario abbiamo soppresse le Pp$1_1$ e $2_1$, quando comparisce la Pp3, sostituendo quindi alle $1_1$ e $2_1$ le Pp1 e 2; o in altri termini ai gruppi $1_1\,.\,2_1\,.\,3$; $1\,.\,2_1\,.\,3$; $1_1\,.\,2\,.\,3$, abbiamo sempre sostituito il gruppo $1\,.\,2\,.\,3$, ma è chiaro che a questo si può sostituire uno qualunque di quelli.

**5.** Esaminiamo ora quali gruppi di Pp indipendenti si possono formare con le Pp date al n. 3.

Gruppo $1\,.\,1_1\,.\,2\,.\,2_1$.

Se G è la classe dei numeri interi, lo zero escluso, (G=N) e l'operazione + è tale che A+B indica la potenza che ha A per base e B per esponente, allora le Pp$1\,.\,1_1\,.\,2$ sono vere ed è falsa la Pp$2_1$ (poichè qualunque potenza di 1 è uno. Dunque la Pp $2_1$ non è conseguenza delle Pp$1\,.\,1_1\,.\,2$. In simboli

$$(\alpha)\quad \mathrm{Pp1}\,.\,\mathrm{Pp1_1}\,.\,\mathrm{Pp2}\,.-\mathrm{Pp2_1}\,.-=\Lambda\,.$$

Se G = N e A + B è la potenza che ha B per base e A per esponente, allora come nel caso precedente si ha

$$(\beta)\quad \mathrm{Pp1}\,.\,\mathrm{Pp1_1}\,.\,\mathrm{Pp2_1}\,.-\mathrm{Pp2}\,.-=\Lambda\,.$$

Se G = N e A + B indica una delle radici algebriche di indice B di A, allora le Pp2 e $2_1$ sono vere, e sono false le Pp1 e $1_1$. Dunque la Pp1 e la Pp$1_1$ non sono conseguenze delle Pp$2\,.\,2_1$. In simboli

$$\mathrm{Pp2}\,.\,\mathrm{Pp2_1}\,.-\mathrm{Pp1}\,.-=\Lambda\,;\quad \mathrm{Pp2}\,.\,\mathrm{Pp2_1}\,.-\mathrm{Pp1_1}\,.-=\Lambda$$

oppure

$$(\gamma)\quad \mathrm{Pp2}\,.\,\mathrm{Pp2_1}\,.-\mathrm{Pp1}\,.-\mathrm{Pp1_1}\,.-=\Lambda\,.$$

Se G è la classe dei numeri interi, lo zero compreso, e l'operazione + è l'ordinaria moltiplicazione, allora si ha

$$(\delta)\quad \mathrm{Pp1}\,.\,\mathrm{Pp1_1}\,.-\mathrm{Pp2}\,.-\mathrm{Pp2_1}\,.-=\Lambda\,.$$

Pare manchino esempi di classi per le quali essendo vere le Pp$1\,.\,2\,.\,2_1$ sia falsa la Pp1. L'impossibilità materiale di ottenere la Pp1 o la Pp$1_1$ dalle rimanenti, può ritenersi come dimostrazione delle proposizioni



$$\mathrm{Pp1}\,.\,\mathrm{Pp2}\,.\,\mathrm{Pp2_1}\,.-\mathrm{Pp1_1}\,.-=\Lambda$$
$$\mathrm{Pp1_1}\,.\,\mathrm{Pp2}\,.\,\mathrm{Pp2_1}\,.-\mathrm{Pp1}\,.-=\Lambda$$

e di altre della medesima specie che si presenteranno per altri gruppi, riducendosi, probabilmente, qualunque discussione priva di esempi ad una inconcludente dissertazione filosofica.

Gruppo $1\,.\,2\,.\,3\,.\,4$.

Se G è la classe dei punti e A+B è il punto medio del segmento che ha A e B per estremi, allora le Pp$1\,.\,2\,.\,3$ sono vere ed è falsa la Pp4; e quindi questa non è conseguenza delle altre. In simboli

$$\mathrm{Pp1}\,.\,\mathrm{Pp2}\,.\,\mathrm{Pp3}\,.-\mathrm{Pp4}\,.-=\Lambda\,.$$

Se G è la classe dei *quaternioni* (lo zero escluso) e l'operazione + è il prodotto, secondo Hamilton, allora le Pp$1\,.\,2\,.\,4$ sono vere ed è falsa la Pp3. Dunque

$$\mathrm{Pp1}\,.\,\mathrm{Pp2}\,.\,\mathrm{Pp4}\,.-\mathrm{Pp3}\,.-=\Lambda\,.$$

Se G è la classe dei numeri reali, lo zero compreso, e l'operazione + è la moltiplicazione, allora le Pp$1\,.\,3\,.\,4$ sono vere ed è falsa la Pp2. Dunque

$$\mathrm{Pp1}\,.\,\mathrm{Pp3}\,.\,\mathrm{Pp4}\,.-\mathrm{Pp2}\,.-=\Lambda\,.$$

Come si è già osservato, può ritenersi come evidente la proposizione

$$\mathrm{Pp2}\,.\,\mathrm{Pp3}\,.\,\mathrm{Pp4}\,.-\mathrm{Pp1}\,.-=\Lambda\,.$$

Gruppi $1_1\,.\,2_1\,.\,3\,.\,4$; $1\,.\,2_1\,.\,3\,.\,4$; $1_1\,.\,2\,.\,3\,.\,4$.

Servendosi delle medesime classi e delle medesime operazioni + considerate per il gruppo $1\,.\,2\,.\,3\,.\,4$, si dimostra che le Pp dei gruppi ora citati sono indipendenti.

Gruppo $1\,.\,1_1\,.\,2\,.\,2_1\,.\,4$.

Se G è la classe dei punti e A+B indica il punto medio del segmento che ha A e B per estremi, allora la Pp4 non è vera e sono vere le Pp $1\,.\,1_1\,.\,2\,.\,2_1$. Dunque

$$\mathrm{Pp1}\,.\,\mathrm{Pp1_1}\,.\,\mathrm{Pp2}\,.\,\mathrm{Pp2_1}\,.-\mathrm{Pp4}\,.-=\Lambda\,.$$

Facendo uso delle classi G e delle operazioni + adoperate per dimostrare le proposizioni ($\alpha$), ($\beta$), ($\gamma$), ($\delta$) di questo numero, si ottengono, ordinatamente, le proposizioni

$$\mathrm{Pp1}\,.\,\mathrm{Pp1_1}\,.\,\mathrm{Pp2}\,.-\mathrm{Pp2_1}\,.-\mathrm{Pp4}\,.-=\Lambda$$
$$\mathrm{Pp1}\,.\,\mathrm{Pp1_1}\,.\,\mathrm{Pp2_1}\,.-\mathrm{Pp2}\,.-\mathrm{Pp4}\,.-=\Lambda$$
$$\mathrm{Pp2}\,.\,\mathrm{Pp2_1}\,.-\mathrm{Pp1}\,.-\mathrm{Pp1_1}\,.-\mathrm{Pp4}\,.-=\Lambda$$
$$\mathrm{Pp1}\,.\,\mathrm{Pp1_1}\,.\,\mathrm{Pp4}\,.-\mathrm{Pp2}\,.-\mathrm{Pp2_1}\,.-=\Lambda\,.$$

Pare che, anche in questo caso, manchino esempi di classi G e di operazioni + per le quali essendo vere quattro delle Pp del gruppo che si considera, fra le quali sia compresa la Pp4, non sia vera la Pp rimanente.

## § 2. — *La somma.*

**6.** Il § 2 del formulario contiene le principali proprietà che si deducono dalle Pp1-4. Le P1-5 di questo paragrafo sono indipendenti dal concetto di numero intero, le altre no.

La P 6 esprime che « Se $n$ è un numero intero maggiore di 1 e $f$ è una successione di $n$ individui della classe G, allora la somma di queste grandezze è pure un individuo di G ». In altri termini « La somma di un *numero finito* di grandezze è una grandezza ». Questa proposizione dipende solamente dalla Pp0.

La P7 dimostra che la proprietà *associativa,* ammessa in un caso particolare con la Pp4, è vera in generale, quando per la classe G e l'operazione + sia vera non solo la Pp4, ma anche la $\mathrm{Pp1}_1$. Non è dunque necessario che la classe G e l'operazione + godano della proprietà *commutativa,* affinchè sia vera in generale la proprietà *associativa.*

Dalle Pp1, 3 e dalla P11 si deduce facilmente la Pp4. Dunque Pp1 . Pp3 . - Pp4 . ɔ . - P11 e quindi la proprietà *commutativa* per $n>2$ è conseguenza necessaria della proprietà *associativa.*

**7.** Faremo per le formule contenute in questo paragrafo, alcune osservazioni, che valgono anche per le formule dei paragrafi seguenti e che ci risparmieremo di ripetere in seguito.

La definizione di eguaglianza « due cose sono eguali, quando l'una può esser sostituita all'altra » che è usata da molti, permette — interpretata che sia largamente, poichè è priva di un significato preciso, rimanendo a sapere *quando è che la sostituzione può farsi* — permette, diciamo, di dimostrare le Pp1 e $1_1$ da noi date come indimostrabili. Esistendo classi G e operazioni + per le quali le Pp1 e $1_1$ non sono vere, si può concludere che l'ordinaria definizione di uguaglianza o è falsa, o l'interpretazione che si fa di essa, a causa della mancanza di precisione del suo significato, è erronea. Una discussione in proposito può facilmente acquistare carattere filosofico e quindi divenire inintelligibile a chi la scrive e a chi la legge. Noi ci limiteremo ad osservare che, definita la classe eguaglianza mediante le sue proprietà caratteristiche (n. 1), per ogni operazione che si voglia introdurre, potremo dimostrare essere vera o falsa la proposizione « Se due grandezze sono eguali, l'una può essere sostituita all'altra ». Nello stato



attuale della scienza pare questa la via che deve essere seguita; ne seguiremo un'altra quando una definizione della classe eguaglianza, diversa da quella riportata al n. 1, sarà data in modo che soddisfi alle esigenze del rigore scientifico.

Esaminando le dimostrazioni delle P del § 2, che dipendono dalla Pp1 o dalla $\mathrm{Pp1}_1$ scorgiamo facilmente che la Pp1 o la $\mathrm{P1}_1$ comparisce solo perchè non abbiamo fatto uso del principio di sostituzione.

## § 3. — *Maggiori e minori.*

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & \mathrm{A,\ B}\,\varepsilon\,\mathrm{G}\,.\,\supset : \mathrm{A}>\mathrm{B}\,.=.\,\mathrm{A}\,\varepsilon\,\mathrm{B}+\mathrm{G} \\ 2. & \quad\text{»}\qquad .\,\supset : \mathrm{A}<\mathrm{B}\,.=.\,\mathrm{B}>\mathrm{A} \end{array}\right\} \qquad \text{[Def.]}$$

**8.** Il segno > lo leggeremo *è maggiore di* e il segno < lo leggeremo *è minore di.* La Def 1 esprime che « Se A, B sono grandezze, allora, dire che A è maggiore di B equivale a dire che A è la somma di B con una grandezza ». Segue immediatamente da ciò che la classe delle grandezze che sono maggiori della grandezza A è rappresentata da A + G; in simboli

$$\mathrm{A}\,\varepsilon\,\mathrm{G}\,.\,\supset .\,\mathrm{G}\cap\overline{\mathrm{X}\,\varepsilon}\,(\mathrm{X}>\mathrm{A})=\mathrm{A}+\mathrm{G}$$

e per questa proposizione bisogna ammettere che per la classe G e l'operazione + sia verificata la Pp 0.

La Def 2 esprime che « Se A e B sono grandezze, allora, dire che A è minore di B equivale a dire che B è maggiore di A ».

Le proposizioni del formulario da 1 a 13 sono conseguenze delle precedenti definizioni e proposizioni primitive.

Possiamo osservare che, essendo le P da 2 a 13, *tutte* dipendenti dalla Pp4, la quale non ha significato quando la Pp0 non è vera, il definire i segni > e < prendendo come loro proprietà caratteristiche le P1, 2, 3, e la Def 2 è poco opportuno, dovendosi poi ammettere la Pp0 e quindi, con l'aggiunta di altre proposizioni primitive, ritornare alla Def 1 che in tal caso diviene un teorema.

**9.** Se G è la classe dei numeri interi non minori p. e. di 10, e l'operazione + è l'ordinaria somma, allora restando per i segni > e < il significato già stabilito nel n. precedente, il numero 73 non è nè eguale, nè maggiore, nè minore del numero 80, mentre è p. e. minore di 95 e maggiore di 20. Volendo escludere che per la classe G si verifichi questo fatto, dovremo ammettere che « essendo A e B degli individui di G, A sia o eguale, o maggiore, o minore di B ». In simboli

$$5.\ \mathrm{A,\ B}\,\varepsilon\,\mathrm{G}\,.\,\supset .\,\mathrm{A}=\mathrm{B}\cup\mathrm{A}>\mathrm{B}\cup\mathrm{A}<\mathrm{B}\ , \qquad \mathrm{Pp}$$

oppure, non volendo far uso dei segni $>$ e $<$

$$A, B \varepsilon G . \supset . A = B \cup A \varepsilon B + G \cup B \varepsilon A + G \,.$$

Che questa nuova proposizione primitiva sia necessaria, è dimostrato dalla classe, ora considerata, dei numeri interi non minori di 10, essendo l'operazione $+$ l'ordinaria somma. Per questa classe le Pp che precedono la Pp5 sono vere e quindi

$$\mathrm{Pp1} . \mathrm{Pp1}_1 . \mathrm{Pp2} . \mathrm{Pp2}_1 . \mathrm{Pp3} . \mathrm{Pp4} . - \mathrm{Pp5} . - = \Lambda \,.$$

Anche se G è la classe dei numeri interi positivi (N) e l'operazione $+$ è il prodotto, la Pp5 non è vera, mentre sono vere tutte le Pp precedenti.

Osservazioni analoghe a quelle fatte nei numeri precedenti valgono per ciò che riguarda l'indipendenza delle Pp dei gruppi $1 . 1_1 . 2 . 2_1 . 4 . 5$; $1 . 2 . 3 . 4 . 5$; $1 . 2_1 . 3 . 4 . 5$; $1_1 . 2 . 3 . 4 . 5$; $1_1 . 2_1 . 3 . 4 . 5$.

Conseguenze immediate della Pp 5 sono le P 21-23, le quali si ottengono dalla Pp 5 con una semplice trasformazione logica. La P21, p. e., esprime che « Se A, B sono grandezze e A è non eguale a B, allora, A o è maggiore, o è minore di B ». Da questa proposizione si ottiene (formulario I§2P3, 4, 7)

$$A, B \varepsilon G . A -> B . A -< B . \supset . A = B \,,$$

cioè « Se A, B sono grandezze e A è non maggiore e non minore di B, allora A è eguale a B ». Analoghe osservazioni valgono per le Pp22, 23.

**10.** Se G è la classe dei punti, $A + B$ indica il punto medio del segmento che ha A e B per estremi, e consideriamo anche i segmenti nulli, allora, essendo A e B due individui della classe G se A non coincide con B ($A - = B$), A è maggiore e, nello stesso tempo, è minore di B; come pure se A coincide con B si verificano, contemporaneamente, i tre casi $A = B$, $A > B$, $A < B$.

Ciò avviene perchè se A, B sono individui della classe G, possono verificarsi contemporaneamente i tre casi « A è la somma di A con una grandezza ($A \varepsilon A + G$) », « A è la somma di B con una grandezza ($A \varepsilon B + G$) », « B è la somma di A con una grandezza ($B \varepsilon A + G$) ». Vedremo tra poco che escluso possa verificarsi il primo caso ($A \varepsilon A + G$), i due rimanenti non possono verificarsi insieme quando per la classe G e l'operazione $+$ sieno vere le Pp1 . 4.

Ammetteremo dunque che per gli individui della classe G sia verificata la seguente proposizione primitiva, che è già stata dimostrata necessaria:

**6.** $A \varepsilon G . \supset . A - \varepsilon A + G \,,$ Pp



cioè « Se A è una grandezza, allora A non è la somma di se stessa con una grandezza ». Tutte le classi G che contengono la grandezza *zero* (grandezze indifferente) non soddisfano alla Pp6.

Se G è la classe dei numeri reali, lo zero compreso, e l'operazione $+$ è l'ordinaria somma, allora si ha

$$\mathrm{Pp1} . \mathrm{Pp2} . \mathrm{Pp3} . \mathrm{Pp4} . \mathrm{Pp5} . - \mathrm{Pp6} . - = \Lambda \,.$$

Se G è la classe dei numeri reali, lo zero escluso, e l'operazione $+$ è l'ordinario prodotto, allora si ha

$$\mathrm{Pp1} . \mathrm{Pp2} . \mathrm{Pp3} . \mathrm{Pp4} . - \mathrm{Pp5} . - \mathrm{Pp6} . - = \Lambda \,.$$

Se G è la classe dei numeri interi non minori di 10 e l'operazione $+$ è l'ordinaria somma, allora si ha

$$\mathrm{Pp1} . \mathrm{Pp2} . \mathrm{Pp3} . \mathrm{Pp4} . \mathrm{Pp6} . - \mathrm{Pp5} . - = \Lambda$$

e quindi le Pp 5 e 6 sono indipendenti tra loro e non sono conseguenze delle 1, 2, 3, 4.

La P24 esprime che ammesso essere $A = B$, non può essere $A > B$ o $A < B$ quando per la classe G e l'operazione $+$ sia verificata la Pp6. Le proposizioni $A > B . \supset . A - < B$; $A < B . \supset . A - > B$ oltre che dalla Pp6 dipendono anche dalle Pp1.4 e quindi le P25.26 dipendono dalle Pp del gruppo 1.4.6, come le P28.29. Infatti per la classe considerata al principio di questo numero esclusi i segmenti nulli, la Pp6 è vera ma non è vera la Pp4 e si ha contemporaneamente $A > B$ e $A < B$.

Quando, come si fa ordinariamente, si dice « Se A, B sono grandezze, dei tre casi $A = B . A > B . A < B$, deve verificarsene uno ed uno solo », si riuniscono in una le Pp21-26, e si ammettono per gli individui di G e per l'operazione $+$, implicitamente, le due Pp5 e 6, insieme alle 1 e 4, le quali esprimono due cose ben distinte.

La P27, p. e., esprime che « Se A, B sono grandezze, allora, dire che A non è eguale a B, equivale a dire che A o è maggiore o è minore di B ». Si noti però che questa proposizione, della quale si fa spesso uso anche nel linguaggio comune, dipende dalle Pp5 e 6; quindi le frasi « non è eguale », o « è maggiore o è minore », sono equivalenti solo quando per la classe G che si considera sono vere le Pp5 e 6. Ammettendo la sola Pp5 dal dire « non è eguale » si deduce, « o è maggiore o è minore »; ammettendo la sola Pp6, dal dire, « o è maggiore o è minore », si deduce « non è eguale », ecc.

La P31 esprime che « Se la classe G contiene individui e per la classe G e l'operazione $+$ è vera la Pp6, allora, il numero degli individui di G è infinito ». Che tale proposizione sia conseguenza della Pp6 è evidente osservando che se G è costituita da individui tutti eguali fra loro, il numero degli individui di G è *uno*.

La P32 è conseguenza della P31 ed esprime che « è infinito il numero degli individui di G maggiori di uno qualunque dei suoi individui ».

**11.** La Pp2, e quindi anche la $2_1$, è conseguenza delle Pp del gruppo 1 . 3 . 4 . 5 . 6. Infatti

$$A, B, C \varepsilon G . A + C = B + C . \supset . A = B \qquad [1 . 3 . 4 . 5 . 6]$$

$$[(\alpha)\ A, B \varepsilon G . A -\!= B . \S 3P21 : \supset : A > B \cup A < B$$

$$(\beta)\ A, B, C \varepsilon G . A > B . \S 3P3 : \supset : A + C > B + C$$

$$(\gamma)\ \text{»} \quad A < B \ \text{»} \quad : \supset : A + C < B + C$$

$$(\delta)\ \text{»} \quad A -\!= B . (\alpha) . (\beta) . (\gamma) : \supset : A + C > B + C \cup A + C < B + C . \S 3P24 : \supset : A + C -\!= B + C$$

$$(\delta) : \supset .\therefore A, B, C \varepsilon G . A -\!= B . \supset . A + C -\!= B + C : I \S 1\, P1 .\therefore \supset .\therefore P]$$

Che la Pp2 sia conseguenza necessaria della Pp6 si dimostra osservando che essendo G la classe dei razionali positivi, lo zero compreso, e l'operazione + l'ordinario prodotto, le Pp1.3.4.5 sono vere ed è falsa la Pp2. Pare che manchino degli esempi di classi per le quali essendo vere quattro delle Pp1.3.4.5.6, non sia vera la Pp2, e non possiamo quindi asserire che per dedurre la Pp2 sieno necessarie tutte le Pp1. 3 . 4 . 5 . 6.

Nel formulario cominciando dal §2 è stata soppressa la Pp2 quando nel gruppo delle Pp primitive dalle quali dipende una proposizione è compreso il gruppo 1.3.4.5.6.

La Pp2 può esser soppressa nella tesi delle P10 e 12 del §1.

Le P del §1 da 15 a 20, non sono state dimostrate vere in generale, quand'anche si sopprimesse la Pp2 e $2_1$. Il lettore può quindi immaginarle soppresse.

Noi crediamo che le P da 15 a 20, soppressa che sia la Pp2 e $2_1$ per certi gruppi, sieno vere in generale, ma però non abbiamo potuto trovare i più di 100 esempi di classi e operazioni + che occorrerebbero per dimostrarle.

L'aver conservato la Pp2 come formante parte del gruppo 1.2.3.4. 5.6.7.8, che dimostreremo in seguito essere il fondamentale, è giustificato dal fatto che molte P della teoria delle grandezze dipendono dalla Pp2 o $2_1$, senza dipendere da tutte le Pp del gruppo 1.3.4.5.6.



## § 4. — *Differenza.*

$A, B, C \varepsilon G . \supset :$

1. $A - B = G \cap \overline{X \varepsilon} (A = B + X)$
2. $A - B + C = (A - B) + C$
3. $A + B - C = (A + B) - C$
4. $A - B - C = (A - B) - C$ .

**12.** Il segno — leggeremo *meno*, ed essendo A e B grandezze, chiameremo A — B la *differenza* fra A e B.

Con la Def 1 si stabilisce di chiamare *differenza* fra le grandezze A e B, uno qualunque degli individui della classe di grandezze X tali, che A sia la somma di B con X. La differenza è così definita in generale senza stabilire, per ora, se, e sotto quali condizioni, la classe $G \cap \overline{X \varepsilon} (A = B + X)$ contiene individui e quanti.

La P1 dimostra che « Se per gli individui della classe G e per l'operazione + è vera la $Pp2_1$, oppure le Pp2 e 3, e la grandezza A è maggiore della grandezza B, allora la differenza fra A e B è una ed una sola grandezza, cioè (Def 1) esiste una sola grandezza X tale che $A = B + X$ ».

La P2 è l'inversa della P1 e questa dipende dalla sola Pp0.

Se in luogo della P3 si scrivesse la proposizione

$$A - B -\varepsilon G . \supset . A -\!> B$$

questa sarebbe l'inversa della contraria della P1 e quindi dipenderebbe dalla sola $Pp2_1$. La P3 dipende invece anche dalla Pp5 poichè in luogo di $A -\!> B$ si è sostituito $A \overset{=}{<} B$.

La P31 esprime che « Se A è una grandezza, allora la classe delle grandezze X, che sono minori di A, è costituita dalle grandezze che sono differenze fra A e una grandezza ». Questa proposizione è vera per le classi G e le operazioni +, per le quali sono vere le Pp2 e 3.

In ciò che segue, scrivendo p. e. $B \varepsilon G . A \varepsilon G \cap (B - G)$ intenderemo scrivere $A, B \varepsilon G . A < B$, e non terremo conto se l'equivalenza delle due proposizioni ora indicate porta, come necessaria conseguenza, che per la classe G e l'operazione + debbano esser vere le Pp2, 3. In altri termini, assumeremo come definizione formale, al solo scopo di abbreviare la scrittura, la proposizione

$$B \varepsilon G . A \varepsilon G \cap (B - G) . = : A, B \varepsilon G . A < B \qquad \text{(Def)}$$

Di tale definizione non faremo però mai uso negli enunciati dei teoremi, e l'adoperemo solo qualche volta nelle dimostrazioni quando ciò possa portare ad una notevole semplificazione di scrittura.

## NOTA II.

### § 5. — *Classe* NG.

1. $A \varepsilon G . \supset . 1A = A$
2. $A \varepsilon G . n \varepsilon N . \supset . (n+1)A = nA + A$

**13.** La Def 2 dà, per induzione, il significato del segno $nA$, ove $n$ è un numero intero e A è una grandezza. Ammesso (Def 1) essere 1A eguale ad A, il segno 2A, indica 1A + A, il segno 3A, indica 2A + A, ecc. ...

La P1 dimostra che se per la classe G e per l'operazione + è vera la Pp0, allora la classe NG è contenuta nella classe G (cioè ogni NG è un G). Dalla Def 1 si deduce che anche ogni G è un NG. Dunque (P1') le classi G ed NG sono eguali.

La P2 esprime che « La somma di un numero intero $n$, finito, di grandezze eguali alla grandezza A, è la grandezza $nA$ ». È da notarsi che questa proposizione — allo scopo forse di evitare apparentemente l'uso del principio d'induzione — si suol prendere come definizione del segno $nA$.

Le P24, 25 esprimono che « Se A, B sono grandezze e A o è eguale o è maggiore di B, allora, la classe dei numeri $m$ tali che $mA$ è maggiore di B contiene individui; o, in altri termini, che vi sono grandezze, multiple di A e maggiori di B ». Se però la grandezza A è minore di B, allora per certe classi G e operazioni +, la classe delle multiple di A maggiori di B, può non contenere individui; il che si esprime ordinariamente dicendo che la grandezza A è *infinitesima* rispetto a B.

**14.** Essendo M un punto di un piano $\alpha$, chiameremo *angolo*, di cui M è il vertice, una coppia di linee che passano per M e giacciono nel piano $\alpha$ (o ciò che si può ottenere astraendo dalla coppia, p. e., la parte di piano limitata dalle due linee). Le linee della coppia sono i *lati* dell'angolo individuato dalla coppia.

Diremo che due angoli sono *eguali* quando sono eguali gli archi di circonferenza dello stesso raggio, compresi fra i lati dei due angoli e aventi i centri nei vertici dei due angoli. Tale specie di eguaglianza appartiene alla classe definita al numero 1 della nota I.

Se A, B sono angoli, con A + B indicheremo uno degli angoli tali che gli archi di circonferenze dello stesso raggio compresi fra i lati



dell'angolo A + B, e aventi il centro nel vertice, sieno la somma (nel senso ordinario) degli archi compresi fra i lati degli angoli A e B.

Indichiamo con $G_1$ la classe costituita da tutti gli angoli che hanno per un lato una retta e per altro lato una curva essendo il vertice un punto tale che la retta non abbia contatto con la curva.

Indichiamo in generale, essendo $n$ un numero intero maggiore di 1, con $Gn$, la classe costituita da tutti gli angoli che hanno per un lato una retta e per altro lato una curva, avendo la retta a comune con la curva nel vertice, $n$ punti infinitamente vicini (contatto $n$—1-plo o di ordine $n$—1).

Se $n$ è un numero maggiore di 1, allora ogni individuo A della classe $Gn$ è infinitesimo rispetto a tutti gli individui delle classi $G_{n-1}, \ldots G_1$, cioè non esiste un numero finito $m$ tale che $mA$ sia maggiore di un dato individuo di $G_{n-1} \ldots G_1$.

È dunque necessaria la Pp seguente:

$$8_1 . \ A, B \varepsilon G . A < B . \supset : m \varepsilon N . mA \overset{=}{>} B . - =_m \Lambda \qquad \text{Pp.}$$

cioè « Se A, B sono grandezze e A è minore di B, allora, la classe dei numeri $m$ tali che $mA$ è o eguale o maggiore di B, contiene individui ».

Questa Pp è nota sotto il nome di *Postulato di Archimede.*

**15.** Per la classe degli angoli — coppie di linee distinte — considerati nel numero precedente, e per l'operazione + come l'abbiamo definita, le Pp1-6 sono vere e la Pp$8_1$ non è vera. Dunque la Pp$8_1$ non è conseguenza delle precedenti. In simboli

$$Pp1 . Pp1_1 . Pp2 . Pp2_1 . Pp3 . Pp4 . Pp5 . Pp6 . - Pp8_1 . - = \Lambda .$$

Se G è la classe dei numeri interi, lo zero escluso, e l'operazione + è la moltiplicazione (in tal caso $nA$ è la potenza $n$-esima del numero intero A) allora le Pp1-5 . $8_1$ sono vere e non è vera la Pp6. Dunque

$$Pp1 . Pp2 . Pp3 . Pp4 . Pp5 . Pp8_1 . - Pp6 . - = \Lambda .$$

Se G è la classe dei numeri non maggiori, p. e. di 10, e l'operazione + è l'ordinaria somma, allora le Pp1.2.3.4.6.$8_1$ sono vere ed è falsa la Pp6. Dunque

$$Pp1 . Pp2 . Pp3 . Pp4 . Pp6 . Pp8_1 . - Pp5 . - = \Lambda .$$

**16.** La P31 non è che la Pp$8_1$ nella quale è soppressa l'ipotesi $A < B$; essa perciò dipende oltre che dalle Pp1 . $1_1$ . 4 come le P23, 24, anche dalla Pp5.

La P32 esprime che « Se A, B sono grandezze e A è o eguale o maggiore di B, esistono due multipli consecutivi di B tra i quali A è compresa ». Da questa proposizione potrebbe dedursi l'ordinaria operazione *divisione* — analoga a quella sui numeri interi. Abbiamo ritenuto inutile introdurre gli elementi *quoto* e *resto* e l'algoritmo relativo.

La P33 è, come vedremo, un'importante conseguenza del postulato di Archimede per la teoria della misura. Essa esprime che « Se A, B, U sono grandezze e A è minore di B, allora qualunque sia U, esiste una multipla di U compresa tra equimultiple di A e B ».

La P34 esprime che la classe G è eguale alla classe costituita dalle multiple della grandezza A, quando A sia il *minimo* di G, cioè quando non esistono grandezze minori di A.

Che questa P debba dipendere, insieme alle altre, dalle Pp6 . $8_1$, si rende evidente considerando la classe dei numeri interi, lo zero compreso, quando l'operazione + sia la somma, poichè per tale classe le Pp6 . $8_1$ non sono vere e non è vera neanche la P34.

La P35 esprime che grandezze minori di una grandezza A sono contenute in G quando nella classe G vi sia almeno una grandezza non multipla di A.

**17.** Se G è la classe dei numeri interi, lo zero escluso, e l'operazione + è la *somma*, allora la classe dei numeri interi che sono minori di 1 non contiene individui. È dunque necessaria la seguente proposizione primitiva:

7. $A \varepsilon G . \supset . G \frown (A - G) - = \Lambda$ Pp

Per la classe ora considerata le Pp1-6, $8_1$ sono vere e non vera la Pp7. Dunque

$$Pp1.Pp2.Pp3.Pp4.Pp5.Pp6.Pp8_1 . - Pp7 . - = \Lambda .$$

Se G è la classe degli angoli — coppie di linee — considerata al n. 14, si ha, p. e.,

$$Pp1 . Pp2 . Pp3 . Pp4 . Pp5 . Pp6 . Pp7 . - Pp8_1 . - = \Lambda .$$

**18.** La P42 esprime che esistono grandezze comprese tra due grandezze non eguali. La P43 che esistono grandezze X minori di A tali che A — X sia minore di una grandezza qualunque.

Le P43', 43'', 43''' non differiscono dalla P43 che per l'ipotesi che stabilisce una determinata relazione tra le grandezze A e B, e perciò esse sono indipendenti dalla Pp5.

La P44 esprime che « Se $n$ è un numero intero finito e A è una grandezza, si può trovare una successione di $n$ grandezze tali che la loro somma sia o eguale o minore di A ». Conseguenza immediata di questa P è la P45.



## § 6. — *Classe* RG.

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ A, B \varepsilon G . m, n \varepsilon N . \supset : A = \frac{m}{n} B . = . nA = mB \\ 2.\ A \varepsilon G . m, n \varepsilon N . a \varepsilon R . D(m, n) = 1 . a = \frac{m}{n} . \supset : aA = \frac{m}{n} A \end{array}\right\} \text{(Def.)}$$

**19.** La Def 1 significa « Se A, B sono grandezze e $m$, $n$ sono numeri interi, allora, dire che A è eguale ad $\frac{m}{n}$B equivale a dire che $n$A è eguale ad $m$B ».

Dalla teoria dei razionali è noto rappresentarsi col segno $\frac{m}{n}$ un ente che si chiama *razionale* e che si ottiene astraendo dalla coppia ($m$, $n$). Nella Def 1 non può però farsi astrazione dalla coppia ($m$, $n$) poichè mentre in A $= \frac{m}{n}$ B la coppia può considerarsi comparire come per forma, in $n$A=$m$B, segno equivalente ad A $= \frac{m}{n}$ B, la coppia comparisce esplicitamente.

Con la Def 1 non resta quindi indicato il significato dell'espressione $a$A ove $a$ è un razionale (astrazione della coppia) e A è una grandezza. È solo con la Def 2 che indichiamo il significato dell'espressione $a$A. Se $a$ è un razionale, sappiamo dalla teoria dei razionali che esiste una sola coppia di numeri interi $m$, $n$ tali che il loro massimo divisore sia 1 e che $a$ sia eguale al razionale $\frac{m}{n}$. Sostituita così al razionale $a$ una sola coppia di numeri interi, in luogo di una classe di coppie, stabiliamo che $a$A abbia lo stesso significato di $\frac{m}{n}$A. Nella P10, ad $a$ è sostituita una delle infinite coppie ad essa eguali e la proprietà espressa dalla Def2 in un caso particolare diviene vera in generale, quando però per la classe G sieno vere le Pp1 . 3 . 4 . $8_2$.

Non volendo introdurre la Def2 bisogna in tutte le P del §6 sostituire al razionale, una coppia di numeri interi e quindi considerare sempre la classe R come classe di classi di coppie di numeri interi.

Tutto ciò si evita ordinariamente facendo uso del solito principio della *sostituzione*, ammesso nella pretesa definizione di eguaglianza.

**20.** Se $n$ è un numero intero diverso da zero e finito, e A è una grandezza, dalla Def1 si deduce che « dire che $\frac{1}{n}$A è una grandezza equivale a dire che la classe G contiene un individuo B tale che il multiplo di B secondo $n$ è eguale ad A ». Se G è la classe dei numeri interi lo zero escluso e l'operazione + è la somma, allora la seguente proposizione primitiva

$$8_2.\ A \varepsilon G . n \varepsilon N . \supset . \frac{1}{n} A \varepsilon G \qquad \text{Pp.}$$

non è vera. La Pp $8_2$ è dunque necessaria.

La P2 dimostra che la Pp7 è conseguenza delle $\text{Pp}1 . 1_1 . 4 . 8_2$. In simboli

$$\text{Pp}1 . \text{Pp}1_1 . \text{Pp}4 . \text{Pp}8_2 . \supset . \text{Pp}7 .$$

La $\text{Pp}8_2$ non è però conseguenza della Pp7 poichè se G è, p. e., la classe dei numeri interi positivi o negativi, la Pp7 è vera e non è vera la $\text{Pp}8_2$. In simboli

$$\text{Pp}7 . - \text{Pp}8_2 . -= \Lambda .$$

**21.** Se G è la classe dei numeri interi positivi lo zero escluso (N) allora le $\text{Pp}1\text{-}6 . 8_1$ sono vere e non è vera la $\text{Pp}8_2$. Dunque

$$\text{Pp}1 . \text{Pp}2 . \text{Pp}3 . \text{Pp}4 . \text{Pp}5 . \text{Pp}6 . \text{Pp}8_1 . - \text{Pp}8_2 . -= \Lambda .$$

Se G è la classe degli angoli — coppie di linee — considerata al n° 14, allora le $\text{Pp}1\text{-}6 . 8_2$ sono vere ed è falsa la $\text{Pp}8_1$. Dunque

$$\text{Pp}1 . \text{Pp}2 . \text{Pp}3 . \text{Pp}4 . \text{Pp}5 . \text{Pp}6 . \text{Pp}8_2 . - \text{Pp}8_1 . -= \Lambda .$$

**22.** Le P1-10, 15 . 15', la P2 eccettuata, danno le proprietà fondamentali dei nuovi enti $a$A, ove $a$ è un razionale coppia di numeri interi, e servono per dedurre le proprietà degli individui $a$A quando $a$ è ciò che si ottiene astraendo dalla coppia di numeri interi.

Si può notare che le P3, 4 si prendono ordinariamente insieme alla P1 come definizione dei segni $\frac{1}{n}$A, $\frac{m}{n}$A. Facendo ciò si ammette implicitamente che per la classe G e l'operazione + sia vera la $\text{Pp}8_2$ insieme ad altre per le P1 e 3.

## § 7. — *Limiti superiori.*

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ A \varepsilon KG . X \varepsilon G . \supset : X < \text{l'}A . = . A \cap (X + G) -= \Lambda \\ 2.\ A \varepsilon KG . B \varepsilon G . \supset :: \text{l'}A = B . = .\cdot. X \varepsilon G . \supset_X : X < \text{l'}A . = . X < B \end{array}\right\} \text{(Def.)}$$

**23.** Il segno l' lo leggeremo *limite superiore.*

Def 1. Se A è una classe di grandezze e X è una grandezza, allora dire che X è minore del limite superiore della classe A, cioè minore



di un ente che otteniamo astraendo dalla classe A, equivale a dire che la classe A contiene individui maggiori di X.

Def 2. Se A è una classe di grandezze e B è una grandezza, allora dire che B è eguale al limite superiore della classe A, cioè dire che questo ente, l'A, che si ottiene astraendo dalla classe A, è un individuo della classe G, equivale a dire che, qualunque sia la grandezza X minore di l'A è X minore di B e viceversa.

Definizione analoga alla Def 2 si potrebbe dare per definire l'eguaglianza dei limiti superiori di due classi e in tal caso alcune delle P di questo § sarebbero indipendenti dal postulato della continuità. Non abbiamo creduto conveniente di far questo per evitare complicazioni inutili, essendo il postulato della continuità necessario, come ora vedremo.

Le P1-4 sono conseguenze immediate delle Def 1, 2 e dipendono dalle Pp del gruppo 1 . 4 . 5 .

**24.** La Pp, nota sotto il nome di *postulato della continuità*, la porremo sotto la forma seguente:

$$8.\ H \varepsilon KG . H -= \Lambda : A \varepsilon G . H \cap (A + G) = \Lambda : \supset .\cdot. \text{l'}H \varepsilon G .$$

« Se H è una classe di grandezze contenente individui, e H non contiene individui maggiori di una certa grandezza A, allora il limite superiore della classe H è un individuo della classe G, cioè esiste un individuo B di G, tale che (Def 2) qualunque grandezza X minore di B è minore di l'H e viceversa ».

Che questa Pp sia necessaria si dimostra osservando che se G è la classe dei razionali, il limite superiore di una classe di razionali può non essere un razionale.

Se G è la classe dei razionali positivi, lo zero escluso, allora le Pp1-7 sono vere e la Pp8 non è vera. Dunque

$$\text{Pp}1 . \text{Pp}2 . \text{Pp}3 . \text{Pp}4 . \text{Pp}5 . \text{Pp}6 . \text{Pp}7 . - \text{Pp}8 . -= \Lambda .$$

Se G è la classe dei numeri interi positivi, lo zero escluso, e poniamo per definizione, $\text{l'}1 = 1$, allora le Pp1-6.8 sono vere ed è falsa la Pp7. Dunque

$$\text{Pp}1 . \text{Pp}2 . \text{Pp}3 . \text{Pp}4 . \text{Pp}5 . \text{Pp}6 . \text{Pp}8 . - \text{Pp}7 . -= \Lambda .$$

**25.** La P5, quando A < B, non è altro che il postulato d'Archimede ($\text{Pp}8_1$). Ciò dimostra che la $\text{Pp}8_1$ è conseguenza delle Pp del gruppo 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 8 , cioè che la $\text{Pp}8_1$ è conseguenza, insieme ad altre Pp, del postulato della continuità. In simboli

$$\text{Pp}1 . \text{Pp}2 . \text{Pp}3 . \text{Pp}4 . \text{Pp}5 . \text{Pp}6 . \text{Pp}8 . \supset . \text{Pp}8_1 .$$

La Pp8 non è però conseguenza della $Pp8_1$, come risulta considerando la classe dei razionali per la quale la $Pp8_1$ è vera ed è falsa la Pp8. In simboli

$$Pp8_1 . - Pp8 . -= \Lambda .$$

**26.** Le Pp6, 7 servono per dimostrare la P8. La P7 dipende dalla P45 del §5, dalla quale si deduce non esser nulla la classe delle multiple secondo $n$, non maggiori della grandezza A.

La P8 è identica alla $Pp8_2$ e quindi questa è conseguenza, insieme ad altre Pp, del postulato della continuità. Dalla P8 si deduce

$$Pp1 . Pp2 . Pp3 . Pp4 . Pp5 . Pp6 . Pp7 . Pp8 . \supset . Pp8_2 .$$

La Pp8 non è però conseguenza della $Pp8_2$, come risulta considerando la classe dei razionali per la quale la $Pp8_2$ è vera ed è falsa la Pp8. In simboli

$$Pp8_2 . - Pp8 . -= \Lambda .$$

**27.** Da quanto si è detto in questa nota risulta che dalle Pp del gruppo 1.2.3.4.5.6.7.8, possono dedursi tutte le Pp del gruppo $1_1.2_1.8_1.8_2$, mentre dalle Pp di questo gruppo pare non possano dedursi le Pp del primo gruppo, fatta tutt'al più eccezione per la Pp7. Ciò serve a spiegare per qual ragione per le Pp del gruppo $1_1.2_1.8_1.8_2$ si sono adoperati gli indici per i numeri che le indicano, non comprendendo la 2 che ha importanza speciale per quanto dipendente dalle Pp1.3.4.5.6.

Possono qui ripetersi le osservazioni fatte alla fine del n° 4 della nota I, per la sostituzione delle Pp7, 8 alle $Pp8_1$, $8_2$ nella dipendenza delle varie P dalle Pp.

## § 8. — *Classe* QG.

1. $A \varepsilon G . a \varepsilon KR . l'a \varepsilon Q . \supset . (l'a)A = l'(aA)$
2. $A \varepsilon G . m \varepsilon Q . \supset : mA = \{ l'(R \cap \overline{x \varepsilon} (x \overline{\overline{<}} m)) \} A$

**28.** Def 1. Se A è una grandezza e $a$ una classe di razionali che ha per limite superiore un numero reale e positivo diverso da zero e da infinito, allora il segno $(l'a)A$ equivale al segno $l'(aA)$ il cui significato è già noto. La proprietà espressa dalla Def 1 è già stata dimostrata vera (§7P14) quando il limite superiore della classe $a$ è un razionale, nel qual caso il segno $(l'a)A$ ha un significato già noto.

La Def 1 stabilisce il significato dell'espressione $m$A ove $m$ è un numero reale e A una grandezza, quando però per $m$ si consideri anche una determinata classe $a$ di razionali che ha $m$ per limite superiore. La Def 1 non dà dunque ancora il significato dell'espressione $m$A quando al posto di $m$ si metta il numero reale che si ottiene astraendo dalla classe $a$ di razionali che lo ha per limite superiore. Essendo noto dalla teoria dei numeri reali che se $m$ è un numero reale, esso è il limite superiore della classe dei razionali non maggiori di $m$, la Def 2 dà in generale il significato del segno $m$A quando si consideri $m$ astraendo dalle classi che lo hanno come limite superiore.



Ciò che è stato detto ora per i numeri reali corrisponde a quanto si è già detto per i razionali (questa nota n° 22).

Le formule del §8 non hanno bisogno di spiegazioni. Si può solo notare che le proprietà espresse da esse dipendono da tutte le Pp del gruppo generale 1.2.3.4.5.6.7.8.

## Nota III.

## § 9. — *La misura.*

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ A, U \varepsilon G . \supset . A/U = l' \{ R \cap \overline{x \varepsilon} (n, nx \varepsilon N . (nx)U \overline{\overline{<}} A . -=_n \Lambda) \} \\ 2.\ A, U \varepsilon G . \supset . \overline{l'}(A/U) = R \cap \overline{x \varepsilon} (n, nx \varepsilon N . (nx)U \overline{\overline{<}} A . -=_n \Lambda) \end{array}\right\} \text{(Def)}$$

**29.** Se A ed U sono grandezze, il segno A/U lo leggeremo *misura di* A *mediante* U, o *rapporto di* A *ad* U, o A *diviso* U.

Con la Def 1 stabiliamo di eguagliare l'ente A/U al limite superiore di quella classe di razionali $x$ tali, che essendo $n$ ed $nx$ numeri interi, la multipla di U secondo $nx$ sia non maggiore di A.

Nella Def 2 consideriamo il segno l' come segno di funzione invertibile, che applicato ad una determinata classe di razionali, produce A/U. Quindi il segno $\overline{l'}$(A/U) — ove $\overline{l'}$ indica, secondo le ordinarie notazioni, la funzione inversa di quella già indicata con l' — indica la classe dei razionali il cui limite superiore è eguale all'ente A/U. Questa Def non è necessaria. Noi l'abbiamo introdotta solo per brevità di scrittura.

**30.** La P1 dimostra che quando per la classe G e l'operazione $+$ sono vere le $Pp1.3.4.5.8_1$; allora la classe $\overline{l'}$(A/U) contiene individui, qualunque sieno le grandezze A ed U. La P2 dimostra che se per la classe G è vera, oltre alle precedenti, anche la Pp6, allora l'ente indicato con A/U è un numero reale positivo e diverso da zero e da infinito.

La P3 dimostra che la classe $\overline{l'}$(A/U) è la classe di quei razionali $x$ tali che gli individui della classe $x$U sono non maggiori della grandezza A. La P è dimostrata indipendentemente dall'esistenza o no degli individui delle classi $\Gamma(A/U)$ e $R \cap \overline{x\varepsilon}(xU \mathrel{\overline{\overline{<}}} A)$ e quindi essa non dipende dalla $Pp8_1$ (postulato d'Archimede). Non abbiamo presa la classe $R \cap \overline{x\varepsilon}(xU \mathrel{\overline{\overline{<}}} A)$ per definire l'ente A/U, poichè si sarebbe inutilmente ammesso dovere per la classe G esser vera la $Pp8_2$, che stabilisce la esistenza di summultipli di ogni individuo di G.

**31.** Le P5-14 danno le proprietà fondamentali della misura ed è a notarsi che esse dipendono dalle Pp del gruppo $1.3.4.5.6.7.8_1$; sono cioè indipendenti dal postulato della continuità in generale, e in particolare dall'esistenza della summultipla di un indice qualunque di una grandezza.

Le P15-21 danno pure proprietà fondamentali della misura. Anche qui le $Pp8_2$ e 8 entrano solo quando $a$ è un razionale o è un numero reale qualunque. È da notarsi che nella P18 non ci siamo valsi della P1 che stabilisce in generale l'esistenza della classe $\Gamma(A/U)$, e dimostrata l'esistenza della classe nel caso speciale considerato la P18 è risultata indipendente dal postulato d'Archimede.

La P19 che indica essere *uno* la misura di una grandezza mediante se stessa sarebbe pure indipendente dal postulato d'Archimede se per l'eguaglianza si ammettesse il principio ordinario della sostituzione.

Le P22-24 si prendono ordinariamente per definire la misura.

Le P31-36 potrebbero facilmente dedursi dalla P37 e dalle P15.16.17.

**32.** La P37 che enuncia la proprietà della misura che permette di passare da un'unità di misura ad un'altra, è da notarsi che è indipendente dal postulato della continuità e dall'esistenza delle summultiple.

Quando per le grandezze A, B, C, U è vera la proprietà indicata dalla P39, si dice qualche volta che « A *è il prodotto* delle grandezze B e C » e si dovrebbe aggiungere « essendo U il modulo di tale operazione », perchè la grandezza A — prodotto delle grandezze B e C — varia col variare di U. Volendo, come si fa, indicare il prodotto col segno $\times$ come per i numeri, si avrà per definizione

$$A, B, C, U \varepsilon G . \supset : A = (B \times C) \bmod U . = . A/C = B/U .$$

Teoricamente l'inutilità dell'introduzione di questa operazione modulare sulle grandezze, introdotta che sia la misura o anche solo il rapporto tra due grandezze indipendentemente — se è possibile — dal concetto di numero, risulta evidente dalla definizione ora indicata.

Le P41-46 enunciano le principali proprietà delle ordinarie *proporzioni*, l'introduzione delle quali con le parole *sta, come,* si riduce,



introdotta che sia la misura, ad esprimere sotto nuova forma proprietà note dei numeri reali.

Ordinariamente si dice che la grandezza A è *commensurabile* con la grandezza U, quando la misura di A mediante U è un numero razionale. La P47 dimostra che se gli individui di una classe di grandezze sono commensurabili con un individuo della classe, essi sono commensurabili con tutti gli altri.

**33.** Al concetto di misura è collegata l'importante questione della corrispondenza (modulare) tra le classi G e Q, cioè tra una classe di grandezze e la classe dei numeri reali.

Scelto, come modulo, nella classe G un individuo U, possiamo far corrispondere ad un individuo A di G, la classe di razionali che abbiamo indicata col segno $\Gamma(A/U)$. La P1 dimostra che tale corrispondenza ha luogo quando per la classe G e per l'operazione + sono vere le $Pp1.3.4.5.8_1$.

Se, essendo ancora U il modulo, alla grandezza A facciamo invece corrispondere l'ente A/U, allora si è stabilita una corrispondenza tra le classi G e Q. Osserviamo che per la corrispondenza così definita si ha che

1° Ad ogni individuo di G corrisponde uno ed un solo individuo della classe Q, e ad individui eguali o non eguali di G corrispondono individui eguali o non eguali di Q, se (P2.5.7) per la classe G e l'operazione + sono vere le $Pp1.3.4.5.6.8_1$. La corrispondenza è quindi *univoca*.

2° Ad ogni individuo di G corrisponde un solo individuo di Q e a questo quello di G a cui corrispondeva, cioè la corrispondenza è univoca e reciproca (simile) se (P2.4) per gli individui di G e per l'operazione + sono vere le Pp1.3.4.5.6.7.8.

## § 10. — *La proporzionalità.*

**34.** Se V, V' sono classi di grandezze, i segni pd.VV', pi.VV', p.VV' li leggeremo rispettivamente *proporzionalità diretta tra* V *e* V', *proporzionalità inversa tra* V *e* V', *proporzionalità tra* V *e* V'.

Il concetto di proporzionalità è intuitivo. Esso comparisce sotto varie forme, talvolta non completamente precisate, anche nel linguaggio comune. Tale concetto non è però indipendente da quello di corrispondenza, e in particolare da quello di corrispondenza *simile* (univoca e reciproca).

Il concetto ordinario di *proporzionalità diretta,* è espresso, dipendentemente dal concetto di *corrispondenza* e di *misura,* dalla P1.

« Se V, V' sono classi di grandezze, diremo che $\omega$ è una proporzionalità diretta tra V e V', quando $\omega$ è una corrispondenza simile tra V e V', e il rapporto tra due individui qualunque di V è eguale al rapporto degli individui di V' corrispondenti ». Dicendo che $\omega$ è una corrispondenza simile tra V e V' sappiamo già che si intende essere $\omega$ un segno che posto innanzi ad un individuo di V produce un V', che a due individui eguali di V fa corrispondere due individui pure eguali di V' e che a due individui non eguali di V fa corrispondere due individui non eguali di V'. In tal modo ogni individuo di V' viene ad esser funzione (determinata, $\omega$) dell'individuo di V al quale corrisponde.

La Def contenuta nella P2 ha analogo significato.

Con la Def data nella P13 conveniamo di chiamare *proporzionalità* tra V e V', o una proporzionalità diretta o una proporzionalità inversa tra V e V'.

**35.** Conviene notare che nella definizione da noi data per la proporzionalità, non è contenuta alcuna ipotesi riguardo alle proprietà che devono esser verificate per gli individui delle classi V e V', all'infuori di quella della possibilità di poter considerare il rapporto di due individui di V e di V' come ente appartenente ad una classe per i cui individui il segno = abbia significato. Dipendentemente dalle convenzioni precedentemente fatte per il segno A/B, la Def di proporzionalità da noi data ammette implicitamente che la classe G in cui è contenuta la classe V si possa far corrispondere univocamente alla classe dei numeri reali, cioè che per la classe G sieno vere le Pp1.3.4.5.6.$8_1$ (§9P2).

Se $\omega$ è una proporzionalità tra le classi V e V', dovendo, per definizione, essere $\omega$ una corrispondenza simile tra V e V', è già noto che se V contiene un numero finito $n$ di individui, anche V' deve contenere $n$ individui, e se V contiene un numero infinito di individui anche V' contiene infiniti individui, ma però i numeri degli individui di V e V' sono, secondo il Cantor, di egual potenza. Con le Def contenute nelle P1, 2 non abbiamo dunque posta alcuna limitazione riguardo al numero degli individui distinti che compariscono nelle classi V e V'.

Dipendentemente dal significato del segno A/B (§9Def1) per la classe G, nella quale è contenuta la classe V deve esser vera la Pp0, cioè, come si dice nel linguaggio comune, le grandezze che compariscono in V devono essere omogenee. Non è però necessario che queste sieno omogenee con quelle che compariscono in V' purchè quelle di V' sieno omogenee tra loro. Definendo p. e. la *velocità* nel moto uniforme come lo spazio percorso in un'unità di tempo, viene come conseguenza che lo spazio è proporzionale direttamente al tempo impiegato a percorrerlo, ma, dipendentemente dalle convenzioni fatte, non ha senso dire che *la velocità è il rapporto tra lo spazio percorso e il tempo impiegato a percorrerlo,* mentre ciò avrebbe senso quando alle grandezze ora indicate si sostituissero i numeri che le misurano mediante unità convenienti. Questa locuzione, e molte altre che si usano comunemente, sottintendono però sempre l'operazione modulare *prodotto* per due grandezze.



**36.** Le P3 e 4 dipendono dalla definizione di corrispondenza simile (Formul. I§5) e sono quindi indipendenti dalle Pp per la classe G.

È noto che se $\omega$ è una corrispondenza simile tra V e V', l'inversa di $\omega$ ($\bar{\omega}$) è una corrispondenza simile tra V' e V. Le P5 e 6 esprimono che « Se $\omega$ è una proporzionalità tra V e V' allora $\bar{\omega}$ è una proporzionalità tra V' e V ». Queste proposizioni dipendono dalle Pp1.3.4.5.6.$8_1$ che sono quelle che devono essere verificate per la classe G affinchè possa tra le classi G e Q stabilirsi una corrispondenza tale che ad individui eguali di G corrispondano individui pure eguali di Q.

Le P7, 8 dipendono invece dalle Pp che devono essere verificate per G affinchè tra G e Q possa stabilirsi una corrispondenza univoca.

Le rimanenti P, fino alla 23 inclusa, esprimono le ordinarie proprietà della proporzionalità e non hanno bisogno di spiegazioni. Noteremo solo che, eccettuate le P9", 10", tutte le altre sono indipendenti dal postulato della continuità, il quale comparisce solo per le P9", 10", perchè si ha da considerare l'ente $a$A ove $a$ è un numero reale qualunque e A una grandezza. Analoga osservazione vale per la Pp$8_2$.

**37.** Le P24-29 dimostrano come essendo $\omega$ una corrispondenza simile tra le classi V e V', tale corrispondenza possa essere una proporzionalità, attribuendo alla funzione $\omega$ alcune delle proprietà dimostrate per la proporzionalità.

Le P24-29 danno in sostanza altri modi di definire una proporzionalità tra le classi V e V', modi che noi esamineremo poichè essi sono spesso adoperati e presentano inconvenienti notevoli.

**38.** « Se $\omega$ è una corrispondenza simile tra le classi V e V', e qualunque sieno gli individui X e Y di V si ha che X+Y è un individuo di V e il corrispondente di X+Y è la somma dei corrispondenti di X e Y (P24), allora avremo che $\omega$ è una proporzionalità diretta tra V e V' (P$24_{10}$) ». Questa proposizione dipende dalle Pp1.3.4.5.6.7.8 e quindi in particolare dal postulato della continuità.

Possiamo dunque assumere per la proporzionalità diretta trà le classi V e V' la definizione seguente:

$$(\alpha)\ \mathrm{V}, \mathrm{V}' \varepsilon\, \mathrm{KG} : \mathrm{X}, \mathrm{Y}\, \varepsilon\, \mathrm{V} . \supset_{\mathrm{X},\mathrm{Y}} . \mathrm{X} + \mathrm{Y}\, \varepsilon\, \mathrm{V} : \supset :: \omega\, \varepsilon\, (\mathrm{pd} . \mathrm{VV}') .$$
$$= .\therefore \omega\, \varepsilon\, (\mathrm{V}'/\mathrm{V})\, \mathrm{sim} : \mathrm{A}, \mathrm{B}\, \varepsilon\, \mathrm{V} . \supset_{\mathrm{A},\mathrm{B}} . \omega(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \omega\mathrm{A} + \omega\mathrm{B} .$$

e in tal caso la proprietà ($\mathrm{P}24_9$)

$$\mathrm{A}, \mathrm{B}\, \varepsilon\, \mathrm{V} . \supset . \mathrm{A}/\mathrm{B} = (\omega\mathrm{A})/(\omega\mathrm{B})$$

dipende dal postulato della continuità (Pp8).

Il teorema di Talete, limitandolo come si fa ordinariamente al caso del triangolo e chiamando *lati* del triangolo i segmenti che hanno i vertici per estremi, non può enunciarsi sotto la forma « Le rette parallele ad un lato di un triangolo dividono gli altri due lati in classi di segmenti proporzionali » perchè se X e Y sono due segmenti di un lato, può X+Y essere un segmento maggiore del lato. Lo stesso teorema enunciato sotto la forma « Le rette parallele ad un lato di un triangolo dividono gli altri due lati in due classi di segmenti tali che il rapporto di due segmenti di una classe è eguale al rapporto dei segmenti corrispondenti dell'altra classe » è vero purchè per la classe dei segmenti si ammetta esser verificato il postulato della continuità.

Assumendo dunque la ($\alpha$) come definizione della proporzionalità diretta, si viene ad ammettere necessariamente il postulato della continuità quando si voglia introdurre l'eguaglianza dei rapporti delle coppie di grandezze corrispondenti. Di più essendo necessaria la condizione che la somma di due individui di V sia un individuo di V, la classe V contiene infiniti individui (§3P31) quando per gli individui di G sia vera la Pp6, e viene quindi come conseguenza che la proporzionalità tra due classi non resta definita in generale, dovendosi escludere le classi contenenti un numero finito di individui.

**39.** Dalla P26 si deduce che per certe classi si può assumere come definizione della proporzionalità diretta la seguente:

$$(\beta)\ \mathrm{V}, \mathrm{V}' \varepsilon\, \mathrm{KG} : n\, \varepsilon\, \mathrm{N} . \mathrm{X}\, \varepsilon\, \mathrm{V} . \supset_{n,\mathrm{X}} . n\mathrm{X}\, \varepsilon\, \mathrm{V} . \mathrm{V}/\mathrm{X}\, \varepsilon\, \mathrm{KR} . \supset :: \omega\, \varepsilon\, (\mathrm{pd} . \mathrm{VV}') .$$
$$= .\therefore \omega\, \varepsilon\, (\mathrm{V}'/\mathrm{V})\, \mathrm{sim} : m\, \varepsilon\, \mathrm{N} . \mathrm{A}\, \varepsilon\, \mathrm{V} . \supset_{m,\mathrm{A}} . \omega(m\mathrm{A}) = m(\omega\mathrm{A}) .$$

Questa è la definizione che ordinariamente si assume per la proporzionalità diretta nei trattati elementari, sopprimendo però le condizioni $m\mathrm{X}\, \varepsilon\, \mathrm{V} . \mathrm{V}/\mathrm{X}\, \varepsilon\, \mathrm{KR}$, ed aggiungendo come proprietà caratteristica di $\omega$ la condizione $\omega\left(\frac{1}{m}\mathrm{A}\right) = \frac{1}{m}(\omega\mathrm{A})$, condizione che è conseguenza ($\mathrm{P}26_3$) di quella da noi posta in ($\beta$).

La condizione $m\mathrm{X}\, \varepsilon\, \mathrm{V}$ è necessaria, affinchè abbia un significato il segno $\omega(m\mathrm{X})$ in tutti i casi. Che anche la condizione $\mathrm{V}/\mathrm{X}\, \varepsilon\, \mathrm{KR}$ sia necessaria si dimostra osservando che se V è la classe dei numeri reali e V' è la classe costituita dai numeri p. e. doppi dei razionali di V e tripli degli irrazionali di V, allora si ha in ogni caso, per $m$ intero, $\omega(m\mathrm{A}) = m(\omega\mathrm{A})$ eppure le classi V e V' non sono proporzionali.



Anche la ($\beta$) presa come definizione della proporzionalità diretta presenta l'inconveniente che V non può contenere un numero finito di individui se si ammette la Pp6, e di più essa vale per classi commensurabili con tutti i loro individui. Sostituendo in ($\beta$) alla condizione $\mathrm{V}/\mathrm{X}\, \varepsilon\, \mathrm{KR}$, la condizione « $\omega$ è una funzione continua » si ottiene (P28) una nuova definizione di proporzionalità diretta, più generale della precedente ($\beta$) ma per la quale occorre si ammetta anche per gli individui di G il postulato della continuità.

È facile verificare che alla condizione ora indicata si può sostituire anche la seguente: $\mathrm{A}, \mathrm{B}\, \varepsilon\, \mathrm{V} . \mathrm{A} > \mathrm{B} . \supset . \omega\mathrm{A} > \omega\mathrm{B}$.

*Torino, Marzo 1893.* Burali Forti Cesare.

---

# Sul concetto di condizione a cui devono soddisfare gli elementi di una figura nella Geometria elementare.

Non mi pare inopportuno il fissare bene, nella geometria elementare, il concetto di condizioni a cui devono soddisfare gli elementi delle figure, quando specialmente queste non solo devono essere determinate in grandezza, ma anche in posizione. È utile che lo studente, fin dal suo inizio nella Geometria, si famigliarizzi con tale concetto, che poi gli si ripresenterà più generale e completo ne' suoi studi universitarii, e che sappia con sicurezza, in problemi piuttosto complessi, decidere subito se tali problemi sieno determinati oppure no. Ritengo perciò che tale concetto sistematicamente debba introdursi ne' trattati di Geometria per le scuole secondarie superiori, e sia svolto nella *Rivista*, che ha scopo essenzialmente didattico. Non pretendo poi di avere esaurito l'argomento, il quale, a mio giudizio, merita l'attenzione di coloro che si occupano di perfezionare i metodi d'insegnamento.

Mi occupo solo della geometria piana.

**1.** Gli *elementi* delle figure poligonali sono i lati e gli angoli. Questi elementi non sono fra loro indipendenti, ma la conoscenza di alcuni fra essi trae seco la conoscenza dei rimanenti.

Se d'una figura conoscendo alcuni elementi, una o un numero limitato di figure esistono che hanno quegli elementi, la figura si dice *determinata;* se invece esistono infinite figure con quegli elementi, la figura si dice *indeterminata*. Se d'un triangolo si conoscono i lati, il triangolo è determinato in modo unico; se si conoscono due lati e un angolo opposto, il triangolo è determinato, e si hanno, in generale, due triangoli che soddisfano alla quistione; se si conoscono i tre angoli, il triangolo è indeterminato.

**2.** In questi casi, e in tutti i casi analoghi che si possono presentare, la figura, quando è determinata, è solo determinata in *grandezza*, potendo avere nel piano infinite posizioni. Così il triangolo costruito con i tre lati dati, può farsi muovere nel piano comunque si voglia, e sarà sempre lo stesso triangolo.

Se però la figura si deve determinare non solo in grandezza, ma anche in posizione, allora bisogna fissare non solo i lati, ma le rette dei lati, non solo gli angoli, ma i vertici degli angoli.

**3.** Per dire che una retta deve passare per un punto, o che un punto deve stare in una retta, si dice che la retta o il punto soddisfa ad *una condizione*. Un punto o una retta, quando sieno assoggettati a due condizioni, sono perfettamente determinati.

**4.** Un poligono di $n$ lati è determinato in grandezza e posizione da $2n$ condizioni. Infatti, basta fissare i suoi vertici, e l'assegnare un vertice equivale a due condizioni.

**5.** Un poligono è determinato in grandezza da $2n—3$ condizioni. Infatti, suppongo descritto il poligono. In seguito faccio cadere un suo vertice in un dato punto del piano (due condizioni). La figura attorno a quel vertice può acquistare infinite posizioni. Si potrà fare in modo che un altro suo vertice cada in una data retta del piano (una condizione), e allora la figura resta determinata anche in posizione, potendo avere due situazioni simmetriche rispetto alla retta dei due vertici considerati. Si può portare la retta di un lato sopra una data retta del piano (due condizioni). La figura in tal caso può acquistare infinite posizioni, e si può fare che un altro suo lato passi per un punto dato. Si conclude che un poligono di $n$ lati è determinato in grandezza da $2n—3$ condizioni.

**6.** Per un poligono l'avere un lato eguale a un dato segmento equivale ad una condizione. Infatti; posso far cadere un termine del dato segmento in un dato punto del piano, e l'altro termine in una data retta. Dopo ciò, due vertici della figura sono fissati, e ne rimangono a determinare altri $n—2$. In questo caso adunque la figura è determinata in grandezza e posizione da $2n—4+3=2n—1$ condizioni, e quindi l'assegnazione d'un lato della detta figura equivale ad una condizione, come dovevasi dimostrare. Si dimostra similmente che per un poligono l'assegnare un angolo equivale pure ad una condizione.



**7.** Se un punto deve stare in una data circonferenza di circolo, ciò equivarrà ad una condizione. Ed in vero, si fissi, oltre la circonferenza, una retta nella quale il punto deve stare; il punto allora rimane perfettamente determinato, e vi sono, in generale, due punti che soddisfano alla quistione. Ma per il punto lo stare nella retta data equivale ad una condizione, e il punto è determinato da due condizioni, dunque lo stare nella circonferenza equivarrà ad una condizione. Si dimostra similmente che per una retta l'essere tangente ad una data circonferenza equivale pure ad una condizione. E siccome una circonferenza è determinata da tre dei suoi punti o da tre delle sue tangenti, se ne conclude che una circonferenza in grandezza e posizione è determinata da tre condizioni. Inoltre, siccome una circonferenza è determinata in grandezza e posizione dal suo centro e dal suo raggio, e l'assegnare il centro equivale a due condizioni, l'assegnare il raggio equivarrà ad una condizione. Si dimostra pure che per una circonferenza il doverne toccare un'altra equivale ad una condizione.

**8.** Si dice che fra i lati, o alcuni dei lati; ovvero fra gli angoli, o alcuni degli angoli, di un poligono esiste una *relazione d'eguaglianza* quando un lato è determinato in grandezza dai rimanenti lati, o da alcuni di essi, o un angolo è determinato dai rimanenti angoli, o da alcuni di essi.

Ogni relazione d'eguaglianza fra gli elementi omogenei d'un poligono equivale ad una condizione. Infatti, quella relazione dà un lato o un angolo, tostochè altri lati o altri angoli sieno noti, e per un poligono l'assegnare un lato o un angolo equivale ad una condizione. Così un quadrangolo iscrittibile è determinato in grandezza da 4 condizioni, anzichè da 5, perchè fra due de' suoi angoli opposti esiste una relazione d'eguaglianza, che ne determina uno tostochè l'altro sia noto.

**9.** Un poligono iscrittibile di $n$ lati è determinato in grandezza da $n$ condizioni. Infatti, è necessario e sufficiente che tre vertici del poligono e ciascun dei rimanenti determinino un quadrangolo iscrittibile, e ciò equivarrà ad $n—3$ condizioni, che sottratte dalle $2n—3$ condizioni, che determinano in grandezza il poligono, rimangono ap-

*determinata;* se invece esistono infinite figure con quegli elementi, la figura si dice *indeterminata.* Se d'un triangolo si conoscono i lati, il triangolo è determinato in modo unico; se si conoscono due lati e un angolo opposto, il triangolo è determinato, e si hanno, in generale, due triangoli che soddisfano alla quistione; se si conoscono i tre angoli, il triangolo è indeterminato.

**2.** In questi casi, e in tutti i casi analoghi che si possono presentare, la figura, quando è determinata, è solo determinata in *grandezza*, potendo avere nel piano infinite posizioni. Così il triangolo costruito con i tre lati dati, può farsi muovere nel piano comunque si voglia, e sarà sempre lo stesso triangolo.

Se però la figura si deve determinare non solo in grandezza, ma anche in posizione, allora bisogna fissare non solo i lati, ma le rette dei lati, non solo gli angoli, ma i vertici degli angoli.

**3.** Per dire che una retta deve passare per un punto, o che un punto deve stare in una retta, si dice che la retta o il punto soddisfa ad *una condizione.* Un punto o una retta, quando sieno assoggettati a due condizioni, sono perfettamente determinati.

**4.** Un poligono di $n$ lati è determinato in grandezza e posizione da $2n$ condizioni. Infatti, basta fissare i suoi vertici, e l'assegnare un vertice equivale a due condizioni.

**5.** Un poligono è determinato in grandezza da $2n-3$ condizioni. Infatti, suppongo descritto il poligono. In seguito faccio cadere un suo vertice in un dato punto del piano (due condizioni). La figura attorno a quel vertice può acquistare infinite posizioni. Si potrà fare in modo che un altro suo vertice cada in una data retta del piano (una condizione), e allora la figura resta determinata anche in posizione, potendo avere due situazioni simmetriche rispetto alla retta dei due vertici considerati. Si può portare la retta di un lato sopra una data retta del piano (due condizioni). La figura in tal caso può acquistare infinite posizioni, e si può fare che un altro suo lato passi per un punto dato. Si conclude che un poligono di $n$ lati è determinato in grandezza da $2n-3$ condizioni.

**6.** Per un poligono l'avere un lato eguale a un dato segmento equivale ad una condizione. Infatti; posso far cadere un termine del dato segmento in un dato punto del piano, e l'altro termine in una data retta. Dopo ciò, due vertici della figura sono fissati, e ne rimangono a determinare altri $n-2$. In questo caso adunque la figura è determinata in grandezza e posizione da $2n-4+3=2n-1$ condizioni, e quindi l'assegnazione d'un lato della detta figura equivale ad una condizione, come dovevasi dimostrare. Si dimostra similmente che per un poligono l'assegnare un angolo equivale pure ad una condizione.



**7.** Se un punto deve stare in una data circonferenza di circolo, ciò equivarrà ad una condizione. Ed in vero, si fissi, oltre la circonferenza, una retta nella quale il punto deve stare; il punto allora rimane perfettamente determinato, e vi sono, in generale, due punti che soddisfano alla quistione. Ma per il punto lo stare nella retta data equivale ad una condizione, e il punto è determinato da due condizioni, dunque lo stare nella circonferenza equivarrà ad una condizione. Si dimostra similmente che per una retta l'essere tangente ad una data circonferenza equivale pure ad una condizione. E siccome una circonferenza è determinata da tre dei suoi punti o da tre delle sue tangenti, se ne conclude che una circonferenza in grandezza e posizione è determinata da tre condizioni. Inoltre, siccome una circonferenza è determinata in grandezza e posizione dal suo centro e dal suo raggio, e l'assegnare il centro equivale a due condizioni, l'assegnare il raggio equivarrà ad una condizione. Si dimostra pure che per una circonferenza il doverne toccare un'altra equivale ad una condizione.

**8.** Si dice che fra i lati, o alcuni dei lati; ovvero fra gli angoli, o alcuni degli angoli, di un poligono esiste una *relazione d'eguaglianza* quando un lato è determinato in grandezza dai rimanenti lati, o da alcuni di essi, o un angolo è determinato dai rimanenti angoli, o da alcuni di essi.

Ogni relazione d'eguaglianza fra gli elementi omogenei d'un poligono equivale ad una condizione. Infatti, quella relazione dà un lato o un angolo, tostochè altri lati o altri angoli sieno noti, e per un poligono l'assegnare un lato o un angolo equivale ad una condizione. Così un quadrangolo iscrittibile è determinato in grandezza da 4 condizioni, anzichè da 5, perchè fra due de' suoi angoli opposti esiste una relazione d'eguaglianza, che ne determina uno tostochè l'altro sia noto.

**9.** Un poligono iscrittibile di $n$ lati è determinato in grandezza da $n$ condizioni. Infatti, è necessario e sufficiente che tre vertici del poligono e ciascun dei rimanenti determinino un quadrangolo iscrittibile, e ciò equivarrà ad $n-3$ condizioni, che sottratte dalle $2n-3$ condizioni, che determinano in grandezza il poligono, rimangono ap-

Fra esse meritano il posto d'onore quelle di Weierstrass [2], le quali in sostanza arrivano a trasformare in argomentazione rigorosa e concludente un pseudo-ragionamento antichissimo, il cui punto debole non era sfuggito a Gauss. Infatti il grande analista di Berlino si propone di dimostrare che, posto

$$(x-x_1)(x-x_2)\ \dots\ (x-x_n) = x^n + \sum_\nu (x_1\ \dots\ x_n)_\nu x^{n-\nu},$$

ove $\nu$ qui ed in seguito assume successivamente tutti i valori interi da 1 a $n$, e supposte date $n$ costanti arbitrarie $C_1, C_2 \dots C_n$, esistono sempre $n$ altre qualità $x_1, x_2 \dots x_n$ soddisfacenti le $n$ equazioni seguenti

$$\text{(S)} \quad (x_1\ \dots\ x_n)_\nu = C_\nu\,,$$

tali cioè che, posto

$$f(x) = x^n + C_1 x^{n-1} + \dots + C_n\,,$$

risulti identicamente

$$f(x) = \prod_\nu (x - x_\nu)\,.$$

A tale scopo egli insegna un algoritmo con cui, date le C, si possono determinare le quantità $x_1 \dots x_n$ soddisfacenti al sistema (S), senza, ben inteso, presupporre nota prima l'esistenza di tali quantità. In questo metodo di calcolo si ammette essere differente da 0 il discriminante di $f(x)$ e noto un sistema di $n$ quantità $a_1 \dots a_n$ soddisfacenti le condizioni

$$\text{(C)} \quad |\, C_\nu - (a_1 \dots a_n)_\nu \,| < d_0\,,$$

ove $d_0$ è un numero positivo soggetto a certe limitazioni che per brevità qui si tacciono; da esso sistema se ne deducono successivamente altri $a'_\nu$, $a''_\nu$, ... mediante le equazioni

$$a'_\nu = a_\nu - \frac{f(a_\nu)}{\prod_\mu (a_\nu - a_\mu)}, \quad a''_\nu = a'_\nu - \frac{f(a'_\nu)}{\prod_\mu (a'_\nu - a'_\mu)}, \quad \dots \quad \text{ove } \mu \gtrless \nu\,.$$

Le quantità $a_\nu^{(\lambda)}$ così definite ($\lambda = 0, 1, 2, \dots$) sono tutte finite. Se si pone $A_\nu^{(\lambda)} = \left(a_1^{(\lambda)} \dots a_n^{(\lambda)}\right)_\nu$ e si chiama $\varepsilon^{(\lambda)} d_0$, per un certo valore

[2] Furono annunziate all'Accademia di Berlino nel 1859 (v. *Monatsberichte*, p. 758) e di nuovo nel 1868 (v. *Monatsberichte*, p. 428), vennero poi ad essa presentate il 21 febbraio 1889 e inserte nel resoconto della seduta del 17 dicembre 1891, sotto il titolo *Neuer Beweis des Satzes dass jede ganze rationale Function einer Veränderlichen dargestellt werden kann als ein Productaus linearen Functionen derselben Veränderlichen.*



di $\lambda$, e la massima fra le quantità $\left| C_\nu - A_\nu^{(\lambda)} \right|$ si avrà $\varepsilon^{(\lambda)} < (\varepsilon)^{2^\lambda}$. Finalmente se si designa con $\varphi_\lambda(x)$ il prodotto $\prod\left(x - a_\nu^{(\lambda)}\right)$ e con $\psi_\lambda(x)$ la differenza $f(x) - \varphi_\lambda(x)$, le $n$ quantità

$$(*) \quad x_\nu = a_\nu - \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{f\left(a_\nu^{(\lambda)}\right)}{\varphi'_\lambda\left(a_\nu^{(\lambda)}\right)}\,,$$

queste soddisferanno il sistema (S). Tutto dunque è ora ridotto ad assodare l'esistenza delle quantità $a_1 \dots a_n$ soddisfacenti le relazioni (C): ciò vien fatto dal Weierstrass nel terzo § della sua memoria, servendosi di due proposizioni che, a mo' di lemmi, egli premise nel secondo. Per una prossima scrittura egli riserba l'esposizione di complementi ed osservazioni al suo notevolissimo ragionamento (a dimostrarne l'importanza è sufficiente segnalare le formole (*), le quali dànno esplicitamente tutte le varie radici dell'equazione proposta), dopo averne con una semplice osservazione estesa la portata fino ad includere il caso in cui il discriminante di $f(x)$ sia nullo.

Le altre indagini su cui credo opportuno di fissare l'attenzione degli algebristi sono dovute al Mertens [1] e rappresentano uno svolgimento ulteriore di quei concetti che governano le anteriori pubblicazioni del medesimo autore sullo stesso tema (n. LXVII). Come le antiche, le nuove indagini sono di quelle che è impossibile riassumere; ci limitiamo pertanto alla seguente notizia. Quando un'equazione algebrica ad un'incognita $f(z) = 0$ non possiede alcuna radice (reale o complessa) razionale, in generale ad essa non si può soddisfare che adoperando un procedimento di approssimazione continua illimitata; laonde dimostrare il teorema fondamentale dell'algebra non può significare altro che scoprire un modo per determinare successivamente dei valori razionali di $z = x + iy$ che rendano $|\, f(z) \,|$, funzione continua e sempre positiva delle variabili reali $x$ e $y$, minore di qualsiasi numero positivo dato; e (supposto ancora che $f(z)$ e $f'(z)$ siano funzioni fra loro prime) a tale scopo è sufficiente sapere determinare, mediante un numero finito di tentativi, un valore a partire dal quale la notissima regola di Newton rappresenti un vero metodo di approssimazione. Gli è quello a cui mirano ed a cui giungono le argomentazioni del Mertens.

[1] *Der Fundamentalsatz der Algebra* (Sitzungsberichte der k. Akad. d. Win. in Wien, Math.-naturn. Classe, Bd. CI, Abth. II *a*, 1892, p. 415-424; e Monatshefte für Math. u. Phys., III Jahrg., 1892, p. 293-308).

Mi sia lecito lamentare da ultimo che anche nel più pregevole trattato d'algebra che — per quanto a me consta — vide la luce in questi ultimi tempi ([1]), il teorema fondamentale venga dimostrato con quel ragionamento incompleto ([2]) che è oggi a cognizione di tutti per opera del *Cours d'Algèbre supérieure* di J. A. Serret.

---

## Su un problema di geometria numerativa relativo alle congruenze lineari.

(Da una lettera del prof. V. MARTINETTI al prof. G. LORIA).

Il sig. STURM al n° 90 della recente sua opera *Die Gebilde I u. II Grades der Liniengeometrie* (*I Th.* pag. 125) pone il problema: « Trovare il numero N delle congruenze lineari, le quali passano per $\alpha(\leq 4)$ rette arbitrarie e posseggono un raggio in ciascuno di $8-2\alpha$ fasci di raggi dati pure arbitrariamente ». Il problema presenta cinque casi: $\alpha=4, 3, 2, 1, 0$, nel primo dei quali, come era già stato dimostrato in precedenza, si ha N=1, per gli altri si trova ordinatamente N=1, 2, 5, 14. Ma, mentre il sig. Sturm dimostra direttamente essere N=1 per $\alpha=3$, tratta i casi $\alpha=2$, $\alpha=1$ valendosi di alcuni risultati dell'HIRST (*On the Correlation of two Planes*; Proceed. London Math. Soc. Vol. 5, pag. 40, ed *Annali di Matematica*, $6_2$, pag. 260) e rimanda per la dimostrazione dell'ultimo, $\alpha=0$ N=14, allo SCHUBERT, *Kalkül der Abzählenden Geometrie* (§ 27, pag. 191).

Ora senza ricorrere a risultati, che non si trovino già dimostrati dallo Sturm nei §§ che precedono il n° 90 dell'opera citata, ma solo usando del *principio della conservazione del numero* (dallo stesso Sturm invocato in questa occasione) si può risolvere il problema con molta semplicità ed uniformità nel modo seguente:

**1.** Siano $g_1, g_2, g_3$ tre rette date ad arbitrio, e si voglia trovare il numero delle congruenze lineari le quali passano per queste tre rette e posseggono una generatrice in ciascuno di due dati fasci di raggi. Supponiamo arbitrari affatto i piani di questi ed i centri invece coincidenti in un punto arbitrario A della intersezione $g_4$ dei loro piani.

---

([1]) G. CHRYSTAL. *Algebra, an elementary Text-book.* I Part, second edition, Edinburgh, 1889.

([2]) Cfr. questa *Rivista*, T. I, p. 207-8.



Per una congruenza lineare, che soddisfaccia queste condizioni, il punto A od è singolare, ovvero l'unica generatrice della congruenza, che passa per esso, è necessariamente la $g_4$; ma la congruenza lineare individuata dalle quattro rette $g_1, g_2, g_3, g_4$ soddisfa alle poste condizioni, per cui, se oltre di essa ve ne fossero delle altre, per queste A dovrebbe essere singolare.

Ma i punti singolari di una congruenza lineare o sono su due rette sghembe (direttrici) seganti tutte le generatrici, ed è impossibile che questo si verifichi nel caso nostro, perchè nessuna retta per A può segare contemporaneamente $g_1, g_2, g_3$ (per l'arbitrarietà di tali elementi); ovvero sono tutti e soli i punti di un piano, nel qual caso la congruenza lineare si spezza in un piano rigato ed in una stella di raggi, i cui sostegni si appartengono, e pur questo è impossibile nel caso nostro, giacchè fra tre generatrici di una congruenza lineare degenere ve ne sono sempre due almeno appartenenti ad uno stesso punto, mentre questo non avviene per le $g_1, g_2, g_3$. Si conclude, che una sola congruenza lineare soddisfa le date condizioni e quindi che per $\alpha=3$ è N=1.

**2.** Si domanda il numero delle congruenze lineari passanti per due rette arbitrarie $g_1, g_2$ ed aventi un raggio in ciascuno di quattro fasci di raggi dati.

Prendiamo arbitrariamente i piani di questi fasci, ma coincidenti i centri di due di essi in un punto arbitrario A della intersezione $g_3$ dei loro piani, e pure coincidenti i centri degli altri due in un punto arbitrario B della intersezione $g_4$ dei rispettivi piani.

Per una congruenza lineare, che soddisfaccia queste condizioni, A e B possono essere ordinarî o singolari.

Se entrambi sono ordinarî, la congruenza deve possedere anche le generatrici $g_3$ e $g_4$. Esiste poi sempre un'unica congruenza lineare passante per le $g_1, g_2, g_3, g_4$ e questa fa al caso nostro.

Uno solo dei punti A e B non potrebbe essere singolare, giacchè sopra fu appunto dimostrato, che non v'ha alcuna congruenza lineare che possegga tre generatrici arbitrarie e per la quale un punto arbitrario sia singolare.

Se poi si suppongono singolari entrambi i punti A e B, la congruenza non potrebbe essere degenere, altrimenti una almeno delle rette $g_1$ $g_2$ dovrebbe (perchè non si segano) appartenere al piano rigato, che fa parte di essa ed il cui sostegno passerebbe già per A e B, e questo non è; perciò A e B dovrebbero stare sopra le direttrici della congruenza (non sulla stessa, perchè la AB non sega $g_1$ e $g_2$): ne viene che le direttrici della congruenza non possono essere che le due rette le quali passano rispettivamente per A e B ed appoggiano contemporaneamente alle $g_1$ e $g_2$. D'altra parte la congruenza lineare, che ha queste due rette per direttrici, esiste, è unica e soddisfa a tutte le date condizioni, perciò deduciamo che per $\alpha=2$ è $N=2$.

**3.** Sia $\alpha=1$; prendiamo cioè una retta $g$ e sei fasci di raggi e scegliamo questi così che i loro piani siano arbitrari, ma i loro centri coincidano due a due nei punti A, B e C.

Vi ha *una* sola congruenza lineare passante per $g$, avente un raggio in ciascuno di detti fasci e per la quale A, B, C non siano singolari.

Non ve n'ha alcuna, soddisfacente alle stesse condizioni, ma per la quale uno solo dei tre punti A, B, C sia singolare (n° 1).

Supponendo invece che A non sia singolare ma lo siano gli altri due, si trova (n° 2) una sola congruenza lineare; perciò *tre* sono in tutto quelle, che soddisfanno il problema, e per le quali uno solo dei tre punti A, B, C è singolare.

Finalmente, supposto che A, B, C siano tutti singolari, poichè nessuna delle rette che ne uniscono due incontra la $g$, la congruenza non potrebbe essere che degenere e contenere il piano rigato di sostegno ABC (sul quale non sta la $g$) ed avere per centro della stella, che completa la congruenza, il punto $g$.ABC. D'altra parte una tale congruenza lineare degenere è unica e soddisfa le condizioni poste, perciò se $\alpha=1$ è $N=5$.

**4.** Prendiamo $\alpha=0$. Anche qui supponiamo che i centri degli otto fasci siano a coppie coincidenti nei punti arbitrari A, B, C, D mentre i loro piani siano distinti.

Si vede subito che:

*a*) Vi è *un'*unica congruenza lineare, soddisfacente al problema, per la quale A, B, C, D non siano singolari;

*b*) Non ve n'ha alcuna, per la quale uno solo di quei punti sia singolare;

*c*) Ve ne sono *sei* con due soli di quei punti singolari;

*d*) Ve ne sono *quattro* per le quali tre di detti punti risultano singolari;

*e*) In fine, se tutti e quattro si suppongono singolari, non può darsi, per la loro arbitrarietà, che si riferiscano ad una congruenza degenere, nè che tre di essi trovinsi sulla medesima direttrice, quindi le *tre* sole congruenze lineari aventi per direttrici le coppie di lati opposti del quadrangolo gobbo ABCD soddisfanno al problema. Dunque per $\alpha=0$ è $N=14$.

*Messina, 20 Aprile 1893.* V. MARTINETTI.



# Sulle serie di potenze.

*Nota di* G. VIVANTI.

## I.

Il sig. Pringsheim, in un interessantissimo lavoro pubblicato recentemente (1), ha mostrato come esistano serie di potenze convergenti, insieme alle loro derivate di tutti gli ordini, in ogni punto del contorno del loro cerchio vero di convergenza, e tuttavia tali che la funzione analitica di cui esse sono un elemento non può prolungarsi oltre quel cerchio, pel fatto che sul contorno esiste un insieme condensato di punti singolari.

Le considerazioni che seguono ci sembrano condurre ad una costruzione metodica di serie fornite di tali proprietà.

È noto che, se $\lim\limits_{n=\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = 1$, la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, dove le $c_n$ si suppongono reali e positive, è convergente, insieme a tutte le sue derivate, entro il cerchio di raggio 1 col centro nell'origine. Applicando poi ad essa il criterio di Raabe (2) può aggiungersi che essa è convergente nel punto $x=1$ (e quindi in ogni altro punto della circonferenza) se

$$\lim_{n=\infty} n\left(1-\frac{c_{n+1}}{c_n}\right) > 1\,. \tag{a}$$

In virtù dello stesso criterio, sarà pure convergente nel punto $x=1$ la serie derivata, se

$$\lim_{n=\infty} n\left(1-\frac{(n+1)c_{n+1}}{nc_n}\right) > 1\,. \tag{b}$$

Diciamo $l_0$, $l_1$ i limiti delle espressioni (a) e (b); sarà

$$l_0 - l_1 = \lim_{n=\infty} n\left[\left(1-\frac{c_{n+1}}{c_n}\right)-\left(1-\frac{n+1}{n}\frac{c_{n+1}}{c_n}\right)\right] = \lim_{n=\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n} = 1\,.$$

Quindi la derivata sarà convergente se $l_0 > 2$. Ripetendo lo stesso ragionamento, può concludersi che la serie data e le sue derivate

(1) *Zur Theorie der Taylor'schen Reihe und der analytischen Functionen mit beschränktem Existenzbereich*, Math. Ann., t. XLII, p. 153-184.

(2) RAABE, *Note zur Theorie der Convergenz und Divergenz der Reihen*, Crelle's J., T. XI, p. 309-310.

di tutti gli ordini saranno convergenti su tutta la circonferenza di raggio 1 se

$$\lim_{n=\infty} n\left(1-\frac{c_{n+1}}{c_n}\right)=\infty \quad (^1).$$

D'altra parte la funzione analitica di cui quella serie è un elemento ha evidentemente una singolarità nel punto $x=1$.

Immaginiamo ora di ordinare in serie semplice:

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots$$

l'insieme di tutti gli angoli di ampiezza razionale compresi fra 0° e 360°, e prendiamo un insieme di quantità reali o complesse:

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots$$

tali che $\sum_{r=1}^{\infty} b_r$ sia assolutamente convergente. Allora, per un noto teorema di Weierstrass, la serie:

$$\sum_{r=1}^{\infty} b_r \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\alpha_r} x^n$$

potrà porsi sotto forma di una serie semplice $\sum_{m=0}^{\infty} d_m x^m$ convergente insieme a tutte le sue derivate nel cerchio di raggio 1, compreso il contorno. La funzione analitica, di cui questa serie è un elemento, avrà sulla circonferenza di raggio 1 un insieme condensato di punti singolari (i punti estremi di tutti i raggi formanti coll'asse reale angoli di ampiezza razionale), e quindi non potrà prolungarsi oltre quella circonferenza.

## II.

Nella Memoria citata il sig. Pringsheim dà esempi di funzioni le quali, pur essendo determinate e finite in un punto insieme alle loro derivate di tutti gli ordini, non sono sviluppabili nell'intorno di esso in serie di Taylor. Cauchy ha messo in chiaro pel primo l'esistenza di tali funzioni mediante l'esempio della $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$, che è nulla insieme a tutte le sue derivate nel punto $x=0$. Il sig. Pringsheim ritiene questo esempio non concludente, perchè i valori della funzione e delle sue derivate nel punto $x=0$ non risultano direttamente dal-

(1) È pressochè inutile avvertire che questa condizione è sufficiente ma non necessaria.



l'introduzione del valore $x=0$ nell'espressione di $f(x)$, ma si ottengono mediante un passaggio al limite. La difficoltà sussiste infatti, ma essa può togliersi considerando la cosa sotto un punto di vista alquanto diverso.

Abbiasi una *funzione analitica,* la quale rappresenti in tutto il piano una certa *espressione aritmetica;* e sia P un suo punto singolare essenziale isolato, $p$ una retta passante per P. Supponiamo che andando al punto P lungo uno qualunque dei raggi posti da una stessa parte di $p$ l'espressione aritmetica tenda ad un medesimo limite finito e determinato, e lo stesso abbia luogo per le sue derivate di tutti gli ordini. Consideriamo tra le infinite serie di potenze, elementi della funzione analitica data, le cui circonferenze vere di convergenza passano per P, quelle di cui i cerchi di convergenza sono tangenti alla retta $p$ dalla stessa parte ove trovansi i raggi considerati. È chiaro che una qualunque di queste serie di potenze e tutte le sue derivate saranno convergenti nel punto P, e i loro valori in quel punto non saranno altro che i limiti a cui tendono rispettivamente l'espressione aritmetica e le sue derivate avvicinandosi al punto P lungo i raggi interni al cerchio di convergenza di quella serie.

Prendiamo in particolare l'espressione $e^{\frac{x}{x-1}}$, che è di natura analoga alla funzione di Cauchy. Essa è rappresentabile in tutto il piano mediante un'unica funzione analitica, avente a distanza finita il solo punto singolare $x=1$. Come primo elemento di questa funzione può prendersi la serie di potenze relativa all'origine (1). Il cerchio di convergenza di tale serie ha raggio 1; ma siccome, andando al punto $x=1$ lungo qualunque retta interna a questo cerchio, $e^{\frac{x}{x-1}}$ e le sue derivate di tutti gli ordini tendono a zero, la serie di potenze e le sue derivate saranno convergenti nel punto $x=1$ ed avranno in esso valore nullo. Pertanto noi abbiamo in questa serie un esempio, perfettamente rigoroso, di una espressione che s'annulla insieme a tutte le sue derivate in un punto senza essere nulla in tutto il piano.

(1) I coefficienti di questa serie si calcolano immediatamente quando si conoscano le espressioni delle derivate della funzione data. Queste possono dedursi mediante la relazione:

$$\frac{d^n}{dx^n}e^{\frac{x}{x-1}}=e\frac{d^n}{dx^n}e^{\frac{1}{x-1}}=e\frac{d^n}{dz^n}e^{\frac{1}{z}}$$

da quelle delle derivate di $e^{\frac{1}{z}}$, di cui abbiamo data la legge di formazione in una Nota che uscirà nel *Jornal de Ciencias Mathematicas.*

Possiamo aggiungere che la stessa proprietà appartiene alle serie di potenze dedotte dalla serie considerata rispetto a tutti i punti dell'asse reale posti a sinistra del punto $x = 1$, mentre le serie dedotte rispetto a qualsiasi altro punto del piano divengono nel punto $x = 1$ divergenti od indeterminate.

*Mantova, 29 Maggio 1893.*

---

## Sulla scoperta del potenziale.

Nella mia nota portante il titolo della presente, io lamentavo di non aver potuto consultare uno scritto del prof. Hathaway sulla storia del potenziale. L'illustre prof. Eneström con squisitissima cortesia, di cui son lieto rendergli qui pubbliche grazie, mi favorì spontaneamente in lettura il numero del *Bulletin of the New-York Mathematical Society* che contiene lo scritto del prof. Hathaway: *On the early history of the potential.* In questo si dimostra pure che la scoperta e la prima introduzione del potenziale nella scienza spettano a Lagrange e non a Laplace, come erroneamente si era, non da tutti però, creduto fino al 1878. La nota storica del prof. Hathaway sarebbe stata più completa se egli avesse accennato che molti anni prima di lui, la priorità di Lagrange era stata riconosciuta e dimostrata, oltrechè da Cayley, che egli cita, da Baltzer, Jacobi e da chi scrive queste linee; come appare dalla nota storica contenuta nelle pagine 293 e seguenti della *Parte prima* del nostro lavoro intitolato: *Il problema meccanico della figura della terra esposto secondo i migliori autori;* e dopo di essi da Bacharach nel 1883, *Abriss der Geschichte der Potentialtheorie,* come ebbe la cortesia di farci notare il prof. Eneström stesso. La nostra nota precedente fu pubblicata al solo scopo d'impedire, che libri pregevoli per molti rispetti, divulgassero ancora una nozione storica, ripetutamente dimostrata inesatta.

*Torino, 11 Maggio 1893.*

OTTAVIO ZANOTTI BIANCO.

---



# RECENSIONI

---

Dott. GIULIO LAZZERI — *Trattato di Geometria analitica.*
(Livorno, Raff. Giusti, 1893).

Ha avuto origine dalle lezioni, che l'egregio A. impartisce da qualche anno agli allievi della R. Accademia Navale, e a questi è specialmente rivolto. Come si poteva presumere dalla ben nota perizia dell'A., mi sembra, che lo scopo di appianare ai suoi giovani la via per un campo tanto importante della cultura matematica sia stato, almeno in gran parte, raggiunto. L'opera si contraddistingue per un uso saggiamente e sistematicamente promiscuo di metodi vecchi e nuovi e di coordinate cartesiane, plückeriane e proiettive; di proposizioni relative al piano ed allo spazio opportunamente ravvicinate fra loro; di proprietà metriche e grafiche: ed è corredata di belle figure esplicative. Il tutto è preceduto da una breve introduzione contenente alcune fra le principali nozioni di Geometria proiettiva; e termina con un'appendice, in cui sono raccolte parecchie utili costruzioni intorno alle coniche. L'aver saputo ordinare tanta disparità di argomenti e di metodi in un insieme abbastanza omogeneo, non è piccolo merito dell'A.

Nei primi tre capitoli della Parte I sono studiate le coordinate cartesiane, plückeriane e proiettive nelle forme di prima, seconda e terza specie, e le proiettività fra queste forme. Gli altri due capitoli della Parte I trattano, per mezzo di coordinate cartesiane, le proprietà della retta nel piano, del piano e della retta nello spazio, del cerchio e della sfera. La Parte II, che è tutta quanta rivolta alle coniche e alle quadriche, procedendo dall'equazione omogenea più generale di 2° grado fra tre o quattro variabili studia, nel 1° capitolo, le più importanti proprietà proiettive, e nel 2° capitolo le proprietà metriche fondamentali delle coniche e delle quadriche stesse. A questo capitolo appartiene pure la riduzione dell'equazione generale di 2° grado fra due o tre variabili non omogenee alle forme più semplici, e la discussione di detta equazione, cioè la classificazione delle coniche e delle quadriche. Nel 3° capitolo infine sono studiate le proprietà focali delle coniche e delle quadriche sulle loro equazioni ridotte (*).

Io, lasciando da parte ogni proposito di recar larghi giudizi sintetici sopra un lavoro, che è certamente il frutto di molte e mature riflessioni, e che ha già subìto in gran parte la difficile prova del pubblico insegnamento; ed anche per attenermi all'indole speciale di questa Rassegna; mi restringerò in quel che segue a notare alcune di quelle cose, che mi attenuaron di poco l'eccellente impressione ricavata dalla lettura del libro.

---

(*) È degna di nota la definizione ivi adottata per i fochi d'una quadrica (punti, ciascuno dei quali è vertice di infiniti triedri trirettangoli autoreciproci con una faccia in comune) la quale offre una grande analogia con la definizione ordinaria dei fochi d'una conica nel piano, e non diventa illusoria per nessun fuoco reale della quadrica.

Si tratta in gran parte di minuzie; e di censure che l'A. avrebbe potuto facilmente evitare, sol che avesse dato un po' più d'opera alla lima: ma non si stimeranno fuori di luogo rispetto ad un'opera didattica, anzi ad un libro di testo; sul quale, a parer mio, l'allievo dovrebbe poter giurare come un cristiano sul Vangelo. L'egregio A. ed amico vorrà accogliere le seguenti osservazioni (sopra alcune delle quali si può anche liberamente dissentire) non altrimenti che come un saggio di possibili ritocchi per una seconda edizione dell'opera.

L'Introduzione è forse la parte del libro, che lascia maggiormente a desiderare: ma bisogna pur molto concedere ad un'impresa così ardua, come quella di trattare in pochissime pagine (trentasette), con tutta l'esattezza ed il rigore convenienti, le nozioni fondamentali della Geometria moderna. Non mi piace il modo col quale sono introdotti, al § 4, gli elementi all'infinito; perchè questi non vengono ad esser definiti *in sè*, ma risulta definita soltanto la locuzione *incontrarsi a distanza infinita* (come sinonimo di *parallelismo*): ciò che, secondo il mio modo di vedere, non consente di parlare di *punti* e *rette* all'infinito come di enti geometrici, senza contraddire alla definizione di parallelismo. — Ai §§ 26 e 35 dove si stabilisce il principio di dualità (di cui l'A. si vale ampiamente in tutto il corso dell'opera) mi parrebbe utile chiarir maggiormente, come esso non consista nel puro e semplice scambio delle parole *punto* e *retta*, o *punto* e *piano;* e quand'è che esso si può con sicurezza applicare. — La definizione di omologia piana (§ 28), come proiezion centrale di due piani prospettivi fra loro sul piano che unisce il centro e l'asse di prospettività dei medesimi, è difettosa, perchè esclude il caso importante in cui l'asse e il centro d'omologia si appartengono: mancanza che si riflette poi naturalmente sopra alcune deduzioni dei successivi §§. La dimostrazione del § 29 prova soltanto che, *se esiste* un'omologia con centro ed asse dati e due punti corrispondenti dati, essa è necessariamente *unica:* occorre pertanto aggiungere che *una* tale corrispondenza effettivamente sussiste; ciò che si dedurrebbe per altro assai facilmente dal prec. § 28. Queste osservazioni parranno tanto più giustificate dal fatto, che sulle anzidette proposizioni attinenti all'omologia è fondata la dimostrazione dell'importantissimo teorema sui triangoli omologici, data dall'A. immediatamente dopo. — Perchè poi l'A. ha voluto sciupare il teorema sugli $m$-goni prospettivi (§ 29) enunciandolo sotto condizioni superflue? — Nè piacerà sicuramente a molti l'abito frequente nell'A. di usar le espressioni fascio *proiettivo*, forma *proiettiva*, isolate in fin di periodo, come (§ 31): « ..... in modo che agli elementi dell'una costituenti una forma di prima specie corrispondano nell'altra gli elementi di una forma di prima specie proiettiva ». — Il penultimo degli esercizi a pag. 41 suonerebbe: « costruire un'omologia piana, conoscendo l'asse e le due rette di fuga »; ma per certo dev'essere stato alterato nella stampa.

Nei §§ 17 e 68 dei capitoli 2° e 3° non è rilevata l'indeterminazione inerente al sistema cartesiano, allorchè si tratta di punti all'infinito; i quali, per l'Introduzione, dovrebbero omai considerarsi come acquisiti al piano ed allo spazio (e dei quali si parla del resto anche nello stesso § 17);



indeterminazione, su cui l'A. trasvola anche altrove (§ 18). — L'ammissione degli elementi immaginari è fatta, in modo puramente formale, ai §§ 10, 81 e 82, mediante la definizione: « una coordinata complessa o un sistema di due o tre coordinate complesse *determina un elemento complesso* della forma ». Non si può certo pretendere in un libro scolastico di Geometria analitica la trattazione sistematica degli elementi immaginari come veri enti geometrici indipendenti dal sistema delle coordinate, p. e. al modo di Staudt; sebbene non manchino dei buoni tentativi in proposito. Se non che l'A. afferma ripetutamente, che la definizione suddetta serve a mettere i risultati dell'Algebra in perfetto accordo con quelli della Geometria, a render compiuta la corrispondenza fra le soluzioni di una o più equazioni e gli elementi del piano e dello spazio. A me sembra invece, che una definizione siffatta non serva ad altro che ad introdurre una certa uniformità nel discorso; e che quanto al resto essa lasci il tempo che trova. — Noto ai §§ 47 e 94 l'affermazione che « dato un punto sono individuati i rapporti delle sue coordinate proiettive » la qual cosa è soggetta ad eccezioni: come non ne vanno esenti alcuni enunciati dei §§ 158 e 166, dove si dice che « due curve di 2° ordine aventi cinque punti a comune coincidono », e che « ogni conica può riguardarsi come figura omologica di un cerchio ».

Il ragionamento del § 206 esclude implicitamente l'ipotesi $a_{12}=0$: quantunque il risultato finale di detto n° non cessi di valere se $a_{12}=a_{22}=0$, come si verifica facilmente per via diretta. Ma per $a_{12}=a_{11}=0$ quel risultato non è più giusto: esso condurrebbe per es. a concludere, che l'equazione $ay^2+by+c=0$ rappresenta sempre una coppia di rette coincidenti. Per questo motivo io penso, che l'ultima parte del quadro sinottico delle curve di 2° ordine esposto al successivo n. 207 debba modificarsi come segue:

$$\mathrm{A}_{33}=0,\ \mathrm{A}=0 \left\{ \begin{array}{ll} a_{11} \gtrless 0 & \left\{ \begin{array}{lll} \mathrm{A}_{22}<0 & \text{coppia di rette} & \text{parallele reali.} \\ \mathrm{A}_{22}=0 & \text{»} & \text{coincidenti.} \\ \mathrm{A}_{22}>0 & \text{»} & \text{parallele complesse.} \end{array} \right. \\ a_{11}=0 & \left\{ \begin{array}{lll} \mathrm{A}_{11}<0 & \text{»} & \text{parallele reali.} \\ \mathrm{A}_{11}=0 & \text{»} & \text{coincidenti.} \\ \mathrm{A}_{11}>0 & \text{»} & \text{parallele complesse.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Così pure non sono scevri di obiezione i ragionamenti e i risultati dei §§ 228 e 229, dove è svolta la parte più scabrosa della discussione di una equazione di 2° grado nelle tre coordinate cartesiane; nè vi è considerata l'ipotesi che, oltre ad essere $\mathrm{A}=\mathrm{B}=0$, sia pure $\mathrm{A}_{33}=0$, senza che si annullino tutte le $\mathrm{A}_{ik}$ (come succede ad es. per l'equazione $ay^2+bz^2+cyz+dy+ez+f=0$); cosicchè di fronte a questo caso è muto il quadro sinottico delle superficie di 2° ordine esposto al § 229.

La natura delle osservazioni che precedono non è tale da scemar nel lettore la buona opinione di un libro, che io stimo degnissimo di andar per le mani dei giovani. — Le figure sono spiccate e nitide, la carta e i caratteri discretamente buoni, ed assai curata la diligenza nell'edizione.

*Torino, Aprile 1893.* M. PIERI.

## S. Pincherle — *Algebra complementare.*

### Parte I — *Analisi algebrica.*

Non mi fermo a tessere gli elogi del pregevolissimo *Manuale Hoepli* uscito con questo titolo: per raccomandarlo agli studenti basta il chiarissimo nome dell'autore. La mole del libro e lo scopo didattico del medesimo non permettevano un ampio svolgimento delle diverse teorie; però l'autore seppe toccare in giusta misura e con chiarezza e moderno indirizzo i più importanti argomenti. Parla delle successioni di *segmenti* e relativo postulato di Dedekind, delle successioni di *vettori*, dei *punti derivati* e della general condizione d'esistenza di limite. Riassume le proposizioni principali d'Aritmetica; parla delle *congruenze* che applica alla risoluzione dell'equazione di Diofante; dà la funzione $\varphi(n)$ di Gauss; i teoremi di Fermat, di Euler e di Wilson e chiude questi cenni della teoria dei numeri interi col teorema: « Il prodotto di $n$ interi consecutivi è divisibile per $n!$ ». Passando a trattare dei numeri reali, introduce successivamente i *numeri frazionarii, negativi* ed *irrazionali* con logico metodo, collegandosi alla genesi delle operazioni aritmetiche: infine pone in evidenza la rigorosa corrispondenza tra le proposizioni sui segmenti e quelle sui numeri reali: poi s'occupa dei *numeri complessi* e della perfetta corrispondenza tra i medesimi ed i vettori. Così resta pienamente giustificata l'applicazione alle quistioni d'Algebra del linguaggio geometrico, che spesso dà semplicità ed eleganza a dimostrazioni sostanzialmente analitiche. Tratta poi dei *limiti* rapidamente, le quistioni principali riguardanti le successioni essendo già state svolte in precedenza sotto varie forme. Dedica poi un capitolo alle *radici numeriche* e ne dà i valori nella forma trigonometrica. Dopo s'occupa del calcolo combinatorio, accenna alle *sostituzioni*, tratta delle *permutazioni, disposizioni* e *combinazioni* semplici e con ripetizione: ne fa applicazione agli sviluppi delle *potenze d'un binomio,* di $\cos m\theta$ e $\operatorname{sen} m\theta$, ai *numeri figurati,* alla somma delle potenze $n^{me}$ dei numeri naturali, alle *potenze d'un polinomio* ed alle *probabilità.* Passa poi alle *serie,* ne dà il criterio generale di convergenza e dà criterii speciali per le serie a termini positivi, considerate sole od in relazione con altre di noto carattere, e per quelle a termini positivi e negativi, oppure complessi; parla della convergenza assoluta d'una serie e del prodotto di due serie: poi tratta della convergenza dei *prodotti infiniti.* Dopo considera le *frazioni continue,* particolarmente quelle coi numeratori tutti eguali ad 1; dà la legge di formazione e le proprietà delle ridotte, lo sviluppo d'un numero in frazione continua e di questa in serie: come applicazione risolve nuovamente l'equazione di Diofante. Passando alle *serie di potenze,* premette alcuni concetti e teoremi sulle *funzioni,* sulla *continuità,* sui *limiti superiore ed inferiore:* dà il principal teorema sulla convergenza di una serie di potenze, parla dei cerchi di convergenza, del loro limite superiore o vero cerchio di convergenza e della continuità di esse serie di potenze. Studia infine in modo particolare le funzioni *esponenziale, iperboliche* e *circolari*



delle quali dà gli sviluppi in serie e le equazioni funzionali: dimostra che il numero $e$ è $\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ ed è irrazionale: dà la relazione d'Eulero tra le funzioni circolare ed esponenziale; ed accenna alle *funzioni periodiche.* Il libro termina con un capitolo sui *logaritmi,* reali e complessi, dedotti dall'equazione esponenziale.

Dopo d'aver detto rapidamente degli argomenti contenuti nel Manuale del chiar.$^{mo}$ prof. Pincherle, farò alcune osservazioni di poca importanza suggeritemi dalla lettura del medesimo.

Nel caso d'una successione di vettori tendente all'infinito (pag. 17, *d*) mi parrebbe utile provare che, ridotti i vettori ad origine comune, si può condurre per l'origine almeno una semiretta in modo che in ogni angolo bisecato dalla medesima cadano vettori formanti ancora una successione avente l'infinito per limite: la dimostrazione si condurrebbe come quella di pag. 149, *b*), dividendo il piano in 4, 8, ..... angoli eguali. Sarebbe conveniente che le proposizioni delle pag. 65 e 66 fossero completate con la dichiarazione, « supposto che questi limiti esistano »: anzi mi sembra preferibile p. es. questa forma: « se dei numeri, in numero limitato, tendono a limiti finiti, la loro somma tende alla somma di essi limiti ». Se è $\lim \alpha_n = \lim \beta_n = 0$, è

$$\lim\,[(a+f_n+\alpha_n)+(b-f_n+\beta_n)] = a+b$$

anche se $f_n$ non tende a nessun limite, nel qual caso non tenderebbero ad un limite neppure $a+f_n+\alpha_n$ e $b-f_n+\beta_n$; e se è $\lim u_n=\infty$, $\lim v_n=\infty$, $u_n+v_n$ può tendere a qualsiasi limite come può non tendere ad alcuno, secondo la natura di $u_n$ e $v_n$: analoghe osservazioni si possono fare per l'altre operazioni. Relativamente al teorema *a*) di pag. 114 ricorderò che per la divergenza di $\Sigma a_n$ è sufficiente che sia $a_{n+1}:a_n \geqq 1$, a partire da un particolar termine $a_n$. Conseguentemente (pag. 115, *b*), se sia $\lim.(a_{n+1}:a_n)=1$, non si potrà dir nulla soltanto se $a_{n+1}:a_n$ prenda sempre anche valori minori di 1. Per il teorema *b*) della pag. 124 ricordo esser sufficiente che delle due serie convergenti almeno una converga assolutamente (¹). Dirò infine esser mia opinione che i due capitali e generali teoremi di Kummer (²) sulle serie a termini positivi, riguardante quindi tutte le serie assolutamente convergenti, e di Riemann (³) sulle semplicemente convergenti possano aver posto dovunque si tratti l'importantissimo argomento delle serie, senza il sussidio dell'Analisi infinitesimale.

Dirò finalmente che un mio articolo sulla convergenza delle serie a termini positivi ha dato luogo ad un'osservazione del sig. Pringsheim (⁴), alla quale io non credetti conveniente rispondere perchè la medesima restava distrutta precisamente dallo stesso mio articolo che l'aveva originata, in quanto che l'accennata osservazione è posta in modo molto significante in

---

(¹) Mertens, *Crelle's Journal,* 1874.
(²) Kummer, *Crelle's Journal,* 1835.
(³) B. Riemann's, *Werke.* Leipzig, 1892, pag. 235.
(⁴) *Mathematische Annalen,* Dicembre 1891.

quel mio articolo [1]; ed aggiungo che la maniera usata dal sig. Pringsheim per stabilire il legame tra la mia proposizione ed il teorema di Kummer, od analogo del Dini, era già stata usata da me [2]. Se ora ne ho parlato, è specialmente per procurarmi l'occasione di far conoscere questo rimarchevole enunciato del criterio generale per le serie convergenti assolutamente: *Perchè una serie a termini positivi,* $u_1+u_2+\ldots$, *sia convergente è necessario e sufficiente chè vi sia una funzione positiva* $a_n$ *soddisfacente sempre la*

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \geqq \frac{1+a_{n+1}}{a_n}.$$

Non volendo abusare eccessivamente della pazienza di chi leggerà, tronco la digressione e per non terminare con essa, mio solo vero scopo essendo stato il riferire dell'eccellente Manuale d'Analisi algebrica, augurerò al medesimo quella diffusione nelle scuole a cui, per i suoi pregi, avrebbe diritto.

PARTE II.

Nella 2ª parte del Manuale d'Algebra il chiar.mo prof. Pincherle tratta questi argomenti:

*Le funzioni razionali. Formula di Taylor. Derivate. I determinanti. Sistemi d'equazioni lineari. L'equazione algebrica. Le funzioni simmetriche. Radici comuni. Eliminazione. Radici multiple. Trasformazioni nelle equazioni. Equazioni di terzo e quarto grado. La funzione razionale per valori reali della variabile. Numero delle radici reali comprese fra due numeri dati. Cenno sul calcolo numerico delle radici.*

Le parti sulle forme lineari e sull'eliminazione sono ammirabili e per generalità di trattazione e per chiarezza di dimostrazioni, tenuto conto della concisione a cui l'autore era costretto per restare nei limiti imposti: rigorosa e semplice è la dimostrazione del teorema di D'Alembert, fondamentale allo studio delle equazioni, del quale sono ancora frequenti le dimostrazioni mancanti di semplicità e di rigore. Le risoluzioni delle equazioni letterali di 3° e 4° grado, con discussioni relative, e delle numeriche sono trattate piuttosto rapidamente: però vi sono dimostrati i teoremi di Cartesio, di Rolle e di Sturm, ed esposti i metodi di Newton e di Lagrange: d'altronde era logico, stante la piccola mole del libro, concederne la miglior parte agli argomenti più importanti e meno facili. Prima di finire, voglio far rilevare che, secondo la definizione data a pag. 140, una funzione potrebbe esser sempre crescente, o sempre decrescente, anche per un intorno d'un punto nel quale compia oscillazioni: p. es. la funzione

$$\cos(x-a)+\frac{\sqrt{3}}{2}(x-a)$$

sarebbe crescente nell'intervallo da $a-\infty$ ad $a+\infty$: in ciò non v'è dell'assurdo per cui tale definizione potrebbe anche porsi; ma ritengo che la medesima debbasi attribuire a pura distrazione.

F. GIUDICE.

[1] *Rend. Circolo Mat.* Palermo, 1890, pag. 279, linee 8-11 risalendo.
[2] *Giornale di Battaglini.* Napoli, 1890, pag. 303.



## Sulla seconda edizione degli « Elementi di Euclide ».

Risposta al prof. Gremigni.

Alla breve recensione della nuova edizione degli *Elementi di Euclide*, curata dal prof. Gremigni, da me pubblicata nella *Rivista*, l'autore contrappone un lungo e vivace articolo, che dovrebbe distruggere tutte le critiche, che io feci del suo lavoro.

Mi sia lecito rispondere colla maggior brevità possibile per far vedere come l'articolo destinato ad annientare la mia critica, la conferma luminosamente.

L'appunto più grave, che io aveva fatto alla nuova edizione degli *Elementi*, è che la pretesa dimostrazione della proposizione E (*se due poligoni sono eguali, ed hanno una parte comune, la rimanente parte dell'uno è equivalente alla rimanente parte dell'altro*), che il Gremigni pone come fondamento della teoria dell'equivalenza, è press'a poco quella stessa, che il prof. Faifofer credè di dare di una proposizione più generale, e che il De-Paolis dimostrò errata. — Il sig. Gremigni dice che ciò non è vero, e che anzi egli ha seguito la via indicata dal De-Paolis. — Il lettore intelligente ha un mezzo molto facile per riconoscere chi abbia ragione, quale delle due affermazioni sia conforme al vero. Confronti le due pretese dimostrazioni del Faifofer e del Gremigni, senza badare alla diversità delle parole, e giudichi la sostanza.

D'altra parte, con tutte le sue proteste, il Gremigni riconosce senza volerlo il suo torto colle parole seguenti: « Rispetto alla dimostrazione « della proposizione E si può muovere l'obiezione fatta dal prof. De-Paolis « alla dimostrazione del Faifofer, perchè occorrendo, come ho descritto nel « libro, di dividere uno dei poligoni nello stesso modo con cui è diviso il « suo eguale dal contorno della parte comune, e potendo per tale opera- « zione questa parte comune venir divisa e suddivisa successivamente più « volte; *può ragionevolmente dubitarsi* che tali suddivisioni non abbiano « termine. Ma a ciò io rispondo che le suddivisioni della parte comune « cessano ogni volta che i lati delle parti risultanti son ridotti minori dei « lati corrispondenti della parte non comune appartenente all'uno o al- « l'altro dei poligoni eguali ».

Con queste parole il Gremigni confessa che la sua dimostrazione, qual'è pubblicata nel testo, non è completa, e che manca precisamente in quella parte nella quale il De-Paolis dubitava che si potesse completare. È vero che l'ultime parole sopra citate dovrebbero, secondo l'autore, tenere il posto di ciò che manca nel libro; ma quella osservazione, contro l'abitudine così concisa, non mi pare che risolva affatto la quistione. Per mio conto confesso che non riesco a indovinare come, anche sviluppando il concetto indeciso e nebuloso contenuto in quell'osservazione, la dimostrazione si possa render completa e rigorosa. Anzi lo stesso sig. Gremigni non è molto convinto di quello che dice, perchè, mentre mi fa sapere che gli esempi da lui portati avrebbero dovuto persuadermi che la sua dimostrazione è giusta, e dice che la mia critica avrebbe dovuto cominciare da uno di questi, ai quali egli annette molta importanza, aggiunge: « Cerchi piuttosto, se pure gli sarà possibile, il sig. Lazzeri degli esempi da contrapporre al mio, dai quali risulti che vi sono casi in cui le divisioni successive da farsi nei due poligoni non hanno termine; e nemmeno allora potrà dire che la mia dimostrazione non è corretta (!) perchè essa vale sempre (!!). Allora ciò che si renderà necessario di fare sarà semplicemente questo: cioè estendere il concetto di poligoni equivalenti al caso in cui il numero delle parti eguali, nelle quali essi possono decomporsi, cresce indefinitamente (!!!) ».

Questi due periodi sono veramente preziosi per più ragioni. In primo luogo dimostrano che l'autore ammette la possibilità di trovare esempi, nei quali non si verifica il fatto accennato, e quindi che la sua dimostrazione possa essere demolita. In secondo luogo dimostrano che il sig. Gremigni la pensa diversamente dal suo e mio illustre maestro prof. Dini, il quale non si stanca di ripetere ai suoi scolari, che un milione di esempi favorevoli ed un dato enunciato generale non sono sufficienti a stabilirne la verità, mentre un solo contrario ne prova la falsità, e, tenendo in vista questa legge, è riuscito a fare tante e così importanti rettifiche al calcolo infinitesimale di 20 a 30 anni fa, sollevando dei dubbi su cose che prima si ammettevano come verità indiscutibili. In terzo luogo dimostrano che il sig. Gremigni ha dimenticato che io non ho mai messo in dubbio l'enunciato della proposizione E, ma soltanto la bontà della sua pretesa dimostrazione. Ed è molto strano che egli abbia preso questo equivoco, perchè non dovrebbe ignorare che su quell'enunciato non può cadere nessun dubbio. È notissimo che due poligoni equivalenti (come sono appunto le parti sovrapposte di due poligoni eguali aventi una parte comune), si possono sempre decomporre in uno stesso numero *finito* di parti eguali.

Sapendo ciò, come può il sig. Gremigni ammettere la possibilità di dover ricorrere alla teoria dei limiti per l'equivalènza dei poligoni come per quella dei poliedri? Ripeto, non metto in dubbio l'enunciato della proposizione E; nemmeno intendo affermare che il postulato dell'equivalenza non possa un giorno o l'altro diventare un teorema. Soltanto dico che la pretesa dimostrazione della citata proposizione non regge, e che perciò crolla con essa tutto l'edifizio della teoria dell'equivalenza, costruito *con lungo studio e grande amore* dal sig. Gremigni (*).

(*) Dopo avere scritto questo articolo ho visto che nell'ultimo fascicolo dei *Mathematische Annalen* la proposizione « Se due superficie piane hanno « una parte comune, le parti non comuni sono equivalenti » è stata argomento di una lunga polemica fra i signori M. Rethy di Budapest e H. Dobriner di Francoforte (*Endlich-gleiche Flächen* von M. Rethy. M. Ann. Bd. XXXVIII, pag. 405-428. — *Bemerkungen zu der Abhandlung des Herrn* M. Rethy *uber « Endlich-gleich Flâchen »* von H. Dobriner. M. Ann. Bd. XLII, p. 275-284 — *Der Satz « Congruentes von Congruentem giebt Gleichs » in seiner Anwendung auf ebene Flächen von* H. Dobriner. M. Ann. Bd., XLII, p. 285-296. — *Ueber endlich-gleiche Flächen* von M. Rethy. M. Ann. Bd., XLII, p. 297-307).

Non credo però che questa lunga discussione abbia fatto fare un passo avanti alla teoria dell'equivalenza. Infatti l'ultimo dei citati articoli comincia: « Wir stellen uns vor, eine jede zusammenhängende Fläche A sei theilbar, « der *Gesammtheit* hirer Stüche $A_1$, $A_2 \ldots A_n$ *gleich*, einem *Theile* der- « selben aber *ungleich* ... Besteht B aus den getrennten Theilen $B_1$ und « $B_2$, so folgt aus disen Grundvorstellungen, dass $B_1$ *durch keinerlei « Theilung und Bwegung in Deckung zu bringen ist mit* $B_1 + B_2$ ». E questo equivale a dire che si ammette il postulato consueto.



È facile convincersi della verità di questa mia asserzione (quando anche quella che ho detto finora non bastasse) pensando che, se il ragionamento del Faifofer e del Gremigni fosse giusto, sarebbe tale egualmente sostituendo alla parola *poligoni* la parola *poliedri*, e così si dimostrerebbe che anche due poliedri equivalenti (per esempio due piramidi aventi basi equivalenti ed altezze eguali) sono scomponibili in un egual numero *finito* di parti eguali; scomposizione che fino ad oggi nessuno è riuscito a fare.

Osservo inoltre che, quand'anche si riuscisse a rendere rigorosa la dimostrazione della prop. E, la dimostrazione della prop. F, qual'è pubblicata nel testo del sig. Gremigni, non va. Infatti egli comincia col dire: « *Sieno* $\alpha$ « *e* $\beta$ *due poligoni, tali che* $\beta$ *sia parte di* $\alpha$; dico che essi non sono equi- « valenti fra loro. — *Supponiamo invece che* $\alpha$ *e* $\beta$ *sieno equivalenti* ecc. ». E dopo un lungo ragionamento conclude: « Dunque in $\alpha$ si trovano più « parti che in $\beta$, mentre se $\alpha$ e $\beta$ fossero equivalenti, come si sono sup- « posti, per *qualunque* suddivisione che si facesse nell'uno o nell'altro, si « dovrebbe ottenere *sempre* lo stesso numero di parti rispettivamente « uguali ».

Dunque l'autore ammette già che due poligoni sieno equivalenti quando per *qualunque* suddivisione sono scomposti in parti rispettivamente eguali, ed allora la supposizione che $\alpha$ sia equivalente a $\beta$ contraddice l'ipotesi (non la tesi) del teorema, perchè esiste già una scomposizione per la quale $\alpha$ contiene $\beta$ insieme ad altre parti. E ciò rende inutile tutto il ragionamento.

Prima di passare ad altro argomento non posso fare a meno di osservare che se, chiamando per lo meno ingenua la pretesa di condensare in tre teoremi la teoria dell'equivalenza, si tendesse a falsare l'opinione del pubblico circa il libro del Gremigni, non sono io l'autore di una simile accusa, ma il Gremigni stesso che nella prefazione scrisse: « Quanto al postulato « dell'equivalenza sono riuscito dopo una lunga prova a darne la dimo- « strazione; onde il lettore troverà qui, *dalla proposizione* D *alla pro- « posizione* F *inclusive*, la teoria completa dell'equivalenza dei poligoni, « la quale potrà anche estendersi a tutte le grandezze in generale ».

Relativamente al postulato del diedro, il sig. Gremigni fa una lunga serie di considerazioni, che non hanno niente a che fare con le critiche, che io avevo fatto in proposito. — Per non ripetermi rimando il lettore a quanto già scrissi nella mia recensione; soltanto osserverò due cose. In primo luogo tutto ciò che il sig. Gremigni dice per mettere in sodo la necessità di dimostrare la possibilità di rovesciare un diedro, si può ripetere per dimostrare la necessità di ricavare l'una dall'altra la possibilità di rovesciare un segmento e un angolo.

In secondo luogo ripeto che non si può in buona fede asserire che la quistione della fusione della geometria piana colla solida dipenda da questa quistione di postulati, e perciò il dire che per questa dipendenza la fusione in discorso è *un errore bello e buono*, oltre ad essere una sconvenienza verso un morto illustre, è anche una ..... cosa non vera.

Per dimostrare poi che questa fusione non è raccomandabile dal lato didattico, ecco le ragioni positive che porta il sig. Gremigni in opposizione alle molte addotte dai fautori della fusione stessa, e che non mi pare sia qui il caso di ripetere. « È sopratutto quistione d'esperienza, ma in ogni « modo è chiaro che sarà cosa molto più facile dare ad intendere (*sic*) ad « un giovinetto delle nostre scuole liceali successivamente le proprietà del « diedro, dopo che egli avrà ben capite e fatte cognizioni proprie quelle « dell'angolo, anzichè procedere allo studio di questi due enti contempo- « raneamente. Son sicuro poi che moltissimi miei colleghi pensano in pro- « posito come me; e non è passato molto tempo che uno dei professori « dell'Università di Pisa, amicissimo del De-Paolis, mi riferiva che nella « circostanza di certi esami di abilitazione all'insegnamento, il De-Paolis « stesso si era dichiarato didatticamente contrario alla fusione in discorso ».

Ora, se le parole non hanno mutato significato, per parlare di esperienza bisogna prima quest'esperienza averla fatta, cioè per lasciar decidere all'esperienza quale fra due metodi d'insegnamento sia il migliore, bisogna prima averli, coscienziosamente e senza prevenzioni, provati ambedue; e questo i signori oppositori sistematici non hanno fatto e non vogliono fare, dicendo: i nostri nonni e i nonni dei nostri nonni fino dalla più remota antichità hanno fatto sempre così, e son vissuti pacifici e tranquilli; o perchè dobbiamo proprio noi prenderci la briga di far diversamente, a costo di sciuparci il sonno e l'appetito?

Sarà poi molto chiaro, giacchè il sig. Gremigni lo assicura, che sia più facile *dare ad intendere* ai giovani le proprietà dei diedri due o tre anni dopo di aver fatto studiare le proprietà degli angoli, ma a me pare anche più chiaro che, tenendo i due studi riuniti, si risparmia ai giovani tempo e fatica.

Non dubito che vi sieno molti colleghi che pensano come il sig. Gremigni a proposito della fusione. — Per lo meno vi sono tutti quelli che per pigrizia non son disposti a cambiare nulla delle loro abitudini, e tutti coloro che sono sempre e ad ogni costo *laudatores temporis acti*. Ma vi sono anche altrettanti che la pensano diversamente, e potrei facilmente citare una lunga serie di nomi autorevolissimi e ben noti.

Lasciando però da parte l'opinione di tutti, ognuno capisce quanto sia poco verosimile che si sia dichiarato contrario alla fusione in discorso lo stesso De-Paolis, che fu il primo a proporla in Italia col suo bellissimo libro. — Disgraziatamente egli non può più difendersi da sè, e credo di



compiere un sacro dovere, rimettendo la verità a suo posto. Il professore dell'Università di Pisa, amicissimo del De-Paolis, di cui parla il sig. Gremigni, mi ha scritto in proposito una lettera, della quale (autorizzato da lui) riporto qui la parte sostanziale: « La persona a cui allude il Gremigni « nella sua polemica evidentemente son io, ed ecco come stanno le cose. « Ricordo benissimo di avergli raccontato una volta, che trovandomi a far « parte di una Commissione esaminatrice per la patente d'idoneità all'in- « segnamento insieme col mio caro e compianto Riccardo De-Paolis, ac- « cadde questo fatto. — Un candidato a cui egli domandò di quale libro « di testo si sarebbe servito per insegnar gli Elementi di Geometria nella « scuola tecnica, rispose credendo di entrar nelle sue buone grazie, che a « tutti gli altri avrebbe preferito il suo. — Al che sdegnosamente replicò: « ritengo che farebbe una corbelleria.

« . . . . . ma da questa storia all'asserzione che anco nei gradi più « elevati d'istruzione liceale, il libro sarebbe stato didatticamente inser- « vibile, mi par che ci sia una differenza sostanziale ».

A meglio spiegare l'episodio, che, male interpretato, ha dato luogo ad un deplorevole equivoco, aggiungerò che il compianto De-Paolis ha detto moltissime volte non solo a me, ma anche ai suoi colleghi ed amici dell'Università di Pisa, che riconosceva il suo libro molto difficile, fatto con un indirizzo puramente scientifico, e perciò più adatto a servire di guida agl'insegnanti che agli studenti, ma che però era fermamente convinto che il metodo da lui iniziato fosse il migliore sotto tutti gli aspetti e perciò destinato a trionfare in un avvenire più o meno prossimo.

E qui potrei anche finire, essendo quelle esposte le più gravi osservazioni che io aveva fatte sulla nuova edizione degli Elementi. — Ma pur tralasciando per amore di brevità molte inesattezze che si trovano nell'articolo del sig^r Gremigni, non posso fare a meno di rilevarne qualcuna.

Il sig. Gremigni scrisse che alcuni difetti da me rilevati sono imaginari. Per esempio io scrissi: « Si è mai accorto il sig. Gremigni che le propo- « sizioni I, XII, XXII, non possono dirsi rigorosamente dimostrate senza i « teoremi relativi alle intersezioni d'un circolo con una retta a di due cir- « coli fra loro, teoremi che Euclide mette nel III libro? » E il Gremigni di rimando: « Ha mai letto l'osservazione che è alla fine della proposizione « XXII? Se l'avesse letta, ci avrebbe trovato la dimostrazione rigorosa che « desidera. » — Sebbene questa osservazione lasci a desiderare, e non valga per la XII, mi contento che il sig. Gremigni riconosca per lo meno che le proposizioni I e XXII sono giustificate dopo la XXII.

Per un difensore di Euclide non c'è male.

Cerca inoltre il sig. Gremigni di cogliermi in contradizione con me stesso, perchè, mentre ho deplorato in principio della mia recensione che gli Elementi di Euclide abbiano dominato per un quarto di secolo nelle nostre scuole, senza migliorarsi mai, mi sono poi permesso di domandare se la nuova edizione fatta con tante aggiunte e modificazioni è proprio ancora *Gli Elementi di Euclide*, ed aggiunge che chi lo giudicherà con più imparzialità e benevolenza di me, capirà che l'unico suo pensiero è stato di rendere sempre più adatto all'insegnamento un libro che dal 1867 in poi aveva già recato molti vantaggi all'insegnamento secondario.

La contradizione non esiste perchè, mentre credo che si possa agevolare lo studio di un'opera classica come quella di Euclide, per mezzo di copiose note ed aggiunte *ben distinte dal testo*, non credo lecito apportare nel testo modificazioni tali, che un lettore superficiale possa non riconoscere a colpo d'occhio dove finisce l'opera dello scrittore e dove comincia quella del chiosatore.

Riguardo all'opportunità di fare ora una nuova edizione degli elementi mi sia lecito dire in poche parole quello che penso sull'uso di Euclide nelle scuole.

L'obbligo di usare Euclide nei Licei, imposto nel 1867, credo sia stata cosa provvidenziale. « La recisa prescrizione (scrissero Sannia e D'Ovidio (*)) « mirava a ricondurre all'antica purezza la trattazione della Geometria razionale elementare, che il Legendre e i suoi imitatori avevano offuscata...; « e mirava altresì a spazzar via i tanti libercoli, mal pensati e peggio « scritti da indotti speculatori, che infestavano i nostri licei. Fu come una « operazione chirurgica: fece gridare, ma giovò. Tuttavia gli autorevoli « matematici, che ritornarono in onore gli elementi di Euclide, non negavano che, se ventidue secoli non eran valsi a far porre in oblio quell'aureo « codice della geometria greca, avevano però senza fallo reso necessario « che esso fosse emendato, semplificato ed esteso ».

Ora in 26 anni le cose sono cambiate, e molto. Ormai è entrato nella coscienza di tutti che le proprietà geometriche devono essere insegnate senza alcun sussidio dell'Algebra e dell'Aritmetica; oramai le numerose lacune, che si trovano negli Elementi, sia rispetto all'enunciato dei postulati, sia rispetto alle teorie dell'equivalenza, dei limiti, ecc., sono state messe in luce dalle molte opere accurate pubblicate in questo tempo, e quindi quello che era buono 26 anni fa, non è più buono ora; e non è più possibile migliorare Euclide rimpolpettandolo; bisogna servirsi dei materiali, ma costruire di nuovo.

Ciò è tanto vero che l'obbligo di adottare Euclide come testo è stato soppresso da molti anni, e l'uso di esso va poco a poco diminuendo, tanto che lo stesso sig. Gremigni dice che, quantunque il nome di Euclide fosse associato ai nomi illustri di Betti e Brioschi, si sentiva il bisogno di una nuova edizione. Valgono ancora a dare una vita effimera agli Elementi nelle scuole la forza d'inerzia dell'abitudine, per la quale molti non cambiano volentieri un libro di testo, ed anche i programmi ministeriali, non tanto per il fatto che impongono il metodo Euclideo, quanto perchè si limitano a stabilire che nel tal corso si facciano i tali o tali altri libri di Euclide; e questo per i pigri e per i timidi equivale a imporre gli Elementi. Infatti i libri di Euclide non corrispondono in generale a divisioni organiche della materia, perchè (e questo è uno dei maggiori difetti riconosciuti anche da tutti i fautori di Euclide) le proposizioni si succedono sì in modo

(*) Prefazione alla 6ª edizione degli *Elementi di Geometria*.



che ciascuna si possa ricavare logicamente delle precedenti, ma assai di rado in modo che una serie di esse costituisca una trattazione completa di un dato argomento. — Cosicchè chi voglia adottare un altro libro, trova un po' di difficoltà a distribuire la materia nei varii corsi.

Credo perciò che il tentativo del prof. Gremigni di ringiovanire Euclide per l'uso delle scuole equivalga al tentativo di galvanizzare un cadavere, e non ritarderà (se pure non lo affretterà) il giorno in cui fatalmente gli Elementi torneranno ad essere relegati nelle biblioteche, dove staranno benissimo, e dove tutti gli studiosi potranno ammirarli e far loro tanto di cappello. È sperabile che ad affrettare questo giorno cooperino le nuove istruzioni ministeriali, informate a maggiore spirito di libertà.

Mi piace a questo proposito richiamare l'attenzione dei lettori della *Rivista* sopra una dotta ed interessante memoria, pubblicata dal prof. Gino Loria nel *Periodico di matematiche elementari*, nella quale con molta erudizione e molta cognizione di causa è compendiata la storia delle vicende di Euclide in tutto il mondo. — Da essa si rileva che in Francia, Spagna, Portogallo, Danimarca, Russia, Austria-Ungheria e perfino nella patria di Euclide gli Elementi non hanno mai attecchito; che negli Stati Uniti l'uso degli elementi è quasi abbandonato; e che anche in Germania ed in Inghilterra, le due cittadelle di Euclide, si accentua ogni giorno più il movimento che tende a sostituire agli Elementi libri più conformi all'indirizzo moderno degli studî geometrici. E ciò è naturale. Infatti, scrive il giovane e valente geometra, « la geometria non è una lingua morta che si deve studiare nelle « opere di Euclide. — Ostinandosi a far ciò sarebbe quanto suggerire a chi « volesse imparare l'italiano l'unico studio di Ciullo d'Alcamo e fra Jacopone « da Todi ».

E con questo dichiaro che per parte mia la polemica è assolutamente finita, e, senza curarmi delle accuse di parzialità, malevolenza e malignità, mi rimetto serenamente e con piena coscienza al giudizio del pubblico intelligente.

G. Lazzeri.

*Livorno, 15 giugno 1893.*

---

## ERRATA-CORRIGE

Pag. 113, linea 15

*invece di* « saranno » *leggi* « potranno essere ».

G. Vivanti.

# Su talune erronee "riflessioni" del Prof. Arminio Nobile

*Osservazioni del Prof.* Ernesto Cesàro.

*
* *

> . . . . . scola li pazzii, scola cci sunnu
> li spropositi, o nostri, o d'autri genti,
> ch'appocu appocu un ciriveddu tunnu
> lu riducinu quatru e risplendenti;
> e chiddi chi 'un si quatranu a sta scola,
> nu' li quatra lu ferru nè la mola.
> (Giovanni Meli).

Le « riflessioni » fatte dal socio ordinario Nobile, nell'adunanza del 1° aprile 1893, sulla *variazione della latitudine*, son piene di gravi errori, alcuni dei quali rivelano una strana imperizia nell'uso delle formole trigonometriche e degli sviluppi in serie, che pure dovrebbero essere familiari ad ogni più modesto cultore di cose astronomiche; altri provengono da un modo assai superficiale d'interpretare i risultati dei calcoli. Alludo all'interpretazione geometrica di talune formole, e non alle conseguenze di filosofia naturale che l'Autore ha creduto di poter dedurre dalle sue (pur così tenui) ricerche. Su quest'ultimo argomento non intendo insistere, per ora, perchè voglio evitare un campo nel quale debbo ritenere (fintantochè un più attento studio della questione non valga a convincermi del contrario) che la competenza dell'Autore superi di gran lunga la mia.

Nondimeno non so astenermi dall'esprimere il parere che ben altre teorie di Analisi e di Meccanica occorrerebbe, forse, mettere in giuoco per istudiare con serietà gli effetti dello spostamento dell'asse di rotazione della Terra nelle determinazioni di longitudine, e che quando si voglia, per evitare certe difficoltà, ridurre il problema a quel grado di pressochè infantile semplicità che gli attribuisce l'Autore, non si ha più il diritto di trarne deduzioni gravi ed assolute come quella che termina il § 3.

Tuttavia, semplificato ad arbitrio il problema, non è nel modo più semplice che l'Autore lo tratta. Egli sente infatti ad ogni istante il bisogno di ricorrere alle coordinate cartesiane, perfettamente inutili. In particolare è ben facile *leggere*, per così dire, la relazione (1) nel triangolo $APP_1$. Essa non è che la formola fondamentale della trigonometria sferica

$$\cos AP_1 = \cos AP \cos PP_1 + \operatorname{sen} AP \operatorname{sen} PP_1 \cos \widehat{P}\,,$$

poichè

$$AP = 90° - \varphi\,,\quad AP_1 = 90° - \varphi_1\,,\quad PP_1 = \varepsilon\,,\quad \widehat{P} = 180° - \lambda\,.$$



Quella che l'Autore chiama la « ricavazione » delle sue formole non è dunque, per un occhio abituato ai calcoli trigonometrici, che una semplice *lettura* di note formole sulla superficie della sfera.

Messa poi l'ipotesi che di $\varepsilon$ si possano trascurare le potenze superiori alla prima, è inutile enunciare, come se fossero *altre* condizioni cui si assoggetta $\varepsilon$, le uguaglianze $\operatorname{sen}\varepsilon = \varepsilon$, $\cos\varepsilon = 1$. Ciò è matematicamente scorretto in quanto si vengono a presentare come ipotesi distinte (e l'intenzione dell'Autore è resa manifesta dalle parole « ed anche che » della 3ª linea del § 1) tre fatti analitici, ciascuno dei quali vale da solo a determinare gli altri due. Quanto all'aggiunta che quelle potenze sia lecito trascurarle *con tutta sicurezza*, essa è una vana pretesa, perchè ciò non dipende nè dall'Autore, nè dall'angolo $\varepsilon$, per quanto piccolo sia, ma dalle circostanze caratteristiche dei varii problemi in cui l'angolo stesso interviene. E fra breve si vedrà che, alla fine del § 2, l'Autore è caduto in errore appunto per aver fatto troppo a fidanza con la supposta illimitata possibilità di trascurare le potenze superiori di $\varepsilon$.

È anche indispensabile che tali potenze non si trascurino *troppo presto*, come in sostanza fa l'Autore ricavando dalla formola (3) uno sviluppo erroneo di $\lambda - \lambda_1$ secondo le potenze ascendenti di $\varepsilon$. Sebbene tale sviluppo sia completamente inutile per le ulteriori « riflessioni » l'Autore ha tenuto a farlo conoscere; ma nel coefficiente di $\varepsilon^2$ ha scritto $\operatorname{tg}^2\varphi$ per $\operatorname{tg}^2\varphi + \frac{1}{2}$. E questo errore non è possibile addebitarlo al proto, perchè lo sviluppo è stato dedotto *esattamente* dalla formola (3), quantunque non sia vero che per la sua validità occorra la condizione $\varphi < 90°$, che *non è necessaria* ed *è insufficiente* per la convergenza. L'errore sta invece nell'aver fatto uso della (3), uso non consentito dal carattere approssimativo di questa formola. Se l'Autore fosse partito da ciò che la (3) era, prima che vi si trascurassero le potenze superiori di $\varepsilon$, sarebbe pervenuto allo sviluppo esatto:

$$\lambda - \lambda_1 = \varepsilon \operatorname{tg}\varphi \operatorname{sen}\lambda - \left(\operatorname{tg}^2\varphi + \frac{1}{2}\right)\varepsilon^2 \operatorname{sen}\lambda\cos\lambda + \ldots\ldots$$

L'Autore si ferma poi a discutere la curva (che egli chiama *speciale*) rappresentata dall'equazione $\cos\lambda + \varepsilon\operatorname{tg}\varphi = 0$. I dettagli della discussione assumono un aspetto singolarmente puerile, appena si osserva che questa equazione, tradotta in coordinate cartesiane, diventa $x + \varepsilon z = 0$. La *curva speciale* del prof. Nobile è dunque un *circolo massimo* della sfera! La grande incertezza che regna nella matematica dell'Autore è poi messa in rilievo dalle ultime parole del § 2, dove egli rasenta la verità, anzi la investe in pieno, senza riuscire ad afferrarla. Del resto, anche in questa circostanza, è inutile adoperare le coordinate cartesiane per vedere che cosa sia la *curva speciale*. Basta osservare che, nell'ipotesi $\cos\lambda + \varepsilon\operatorname{tg}\varphi = 0$, la formola (2) dà $\lambda_1 = 90°$. Questa è appunto l'equazione di quel meridiano del sistema $(P_1)$, che taglia ad angolo retto il meridiano $PP_1$. Dopo ciò, non solo riesce ingenua la discussione geometrica della formola (4), ma viene in luce anche l'inesattezza di qualche dettaglio. È ovvio, per esempio, che la *curva speciale* incontra l'equatore sotto un angolo complementare di $\varepsilon$, e non uguale a 270°.

Ora io voglio mostrare che anche queste ultime conclusioni, che pur costituiscono una prima rettifica necessaria di quelle dell'Autore, sono sbagliate. E sono sbagliate al punto che danno come *quasi retto* un angolo *quasi nullo*. Ciò valga ad ammonire tutti quelli che abusano delle quantità *trascurabili*. I gravi errori nei quali s'incorre tralasciandole inconsideratamente lungo i calcoli sono facili ad evitare. Bisogna trascurare *una volta sola* ed *il più tardi possibile*. Nella questione attuale una più accorta discussione, fatta rispettando questo duplice precetto, conduce alla formola

$$\operatorname{tg}\varphi_1 \cos\lambda_1 + \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} = 0,$$

che va sostituita alla (4). Dunque si può dire soltanto che $\operatorname{tg}\varphi_1 \cos\lambda_1$ è quantità piccolissima, e che però i punti soddisfacenti alla precedente condizione sono vicinissimi ad avere o $\lambda_1 = 90°$ o $\varphi_1 = 0$. Essi costituiscono una *conica sferica*, prossima a degenerare in una coppia ortogonale di circoli massimi. L'Autore considera solamente uno di questi circoli, che nelle vicinanze del polo differisce pochissimo dalla conica; ma nelle vicinanze dell'equatore accade che la conica, scostandosi quasi bruscamente dal detto circolo, si accosta all'altro, ed a tale rapido variare dell'orientazione si deve se essa, che sembrava voler tagliare ad angolo retto l'equatore, finisce in realtà per incontrarlo sotto un angolo piccolissimo.

Anche il calcolo di tale angolo si può agevolmente eseguire senza coordinate cartesiane, perchè si sa, in generale, che l'angolo $\theta$ di due linee qualunque $u = 0$, $v = 0$, tracciate sulla superficie sferica, è dato dalla formola

$$\cos\varphi \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{\Delta u \,.\, \Delta v}} \frac{\partial(u, v)}{\partial(\lambda, \varphi)},$$

nella quale i parametri differenziali di $u$ e $v$ si calcolano facilmente ricordando che

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^2 + \frac{1}{\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^2.$$

Nel caso attuale si ha

$$u = \operatorname{tg}\varphi \cos\lambda + \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}, \quad v = \operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varepsilon \cos\lambda,$$

e le coordinate d'un punto d'incontro sono $\lambda = \frac{3\pi}{4}$, $\varphi = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Quindi

$$\Delta u = \frac{1}{2}, \quad \Delta v = 1, \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(\lambda, \varphi)} = \varepsilon, \quad \theta = \varepsilon\sqrt{2}.$$

Adunque l'angolo trovato (non si sa come) di 270° dall'Autore è invece uguale ad $\varepsilon\sqrt{2}$!

Le « riflessioni » del Prof. Nobile occupano *sette* pagine degli *Atti* (vol. V, serie 2ª, n. 13). Quello che ho detto della *prima pagina e mezza* mi autorizza a tacere delle altre.



*
* *

Mmatula Euclidi a pruvari si sforza
chi tutti l'anguli àvi aviri uguali
ogni triangulu a dui retti afforza;
'ntra sti paisi la ragiuni 'un vali,
e supra tuttu è contrabbannu granni
'na muddichedda minima di sali.
(Giovanni Meli).

Le osservazioni precedenti, prima comunicate confidenzialmente al Prof. Nobile, che non riuscì a persuadersi della loro esattezza, furono poi lette, il 1° Agosto 1893, innanzi ad una delle nostre Accademie, che le respinse (*) ad unanimità. Profitto dell'ospitalità accordatami dalla « Rivista » per replicare brevemente alle varie risposte date a viva voce dal Prof. Nobile su alcuni punti della mia critica:

1° « Lo sviluppo di $\lambda - \lambda_1$ è *tolto di peso* dall'Astronomia del Brünnow ».

Questo non si chiama rispondere. Segnalato l'errore, il prof. Nobile aveva l'obbligo di verificarne l'esistenza, e ciò egli avrebbe potuto fare con lieve fatica derivando l'eguaglianza

$$\cot\lambda_1 = \cos\varepsilon \cot\lambda + \operatorname{sen}\varepsilon \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{sen}\lambda}.$$

Avrebbe, forse, ottenuto

$$\frac{d^2\lambda_1}{d\varepsilon^2} = 2\cot\lambda_1 \left(\frac{d\lambda_1}{d\varepsilon}\right)^2 + \operatorname{sen}\lambda_1 \cos\lambda_1,$$

e siccome, per $\varepsilon$ tendente a zero, si ha

$$\lim \frac{d\lambda_1}{d\varepsilon} = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{sen}\lambda,$$

è pure

$$\frac{1}{2} \lim \frac{d^2\lambda_1}{d\varepsilon^2} = \left(\operatorname{tg}^2\varphi + \frac{1}{2}\right) \operatorname{sen}\lambda \cos\lambda.$$

Tale, cambiato di segno, è il coefficiente di $\varepsilon^2$ nello sviluppo di $\lambda - \lambda_1$. Dunque ha sbagliato Brünnow? No, perchè invano si cercherebbe in tutto il suo trattato la formola che il Prof. Nobile asserisce di averne *tolto di peso*. Lo sviluppo di $\lambda - \lambda_1$ è proprietà esclusiva del Prof. Nobile. Non ha egli esplicitamente dichiarato (nella 11ma linea della pag. 2) di averlo dedotto dalla formola (3)? *Questo* appunto gli era vietato di fare. Del resto come si spiegherebbe che, non dovendo servirsene in tutto il corso delle sue « riflessioni » l'Autore abbia voluto togliere una formola da un libro per il solo gusto di vederla figurare nella sua « Nota »? Quanto alla legittimità dello sviluppo, l'Autore non ha creduto di doversene preoccupare, proba-

(*) Unicamente *per la forma* (Verbali dell'Accademia).

bilmente perchè non si è accorto dell'esistenza di piccolissimi campi di divergenza intorno ai poli. Forse li ha *trascurati* con $\varepsilon$.

2° « I 270° della fine del § 2 non rappresentano l'angolo sotto cui la *curva speciale* incontra l'equatore, sì bene la longitudine del punto d'incontro ».

Questo si chiama cadere da Scilla in Cariddi. Si conceda pure al prof. Nobile di scambiare fra loro due verità di *Monsieur de la Palisse;* ma resta pur sempre in piedi il calcolo eseguito alla fine delle mie osservazioni, dal quale emerge chiaramente che le due curve non hanno in comune due soli punti, alle longitudini $\pm 90°$, come sembra credere il Prof. Nobile, ma ne hanno quattro, vicinissimi ai vertici d'un quadrato, giacchè le loro longitudini, per $\varepsilon$ infinitesimo, tendono ad essere $\pm 45°$, $\pm 135°$. Ed anche qui un calcolo elementarissimo consente un rapido controllo delle mie asserzioni. Infatti si ha, sull'equatore,

$$\lambda_1 - \lambda = \frac{\varepsilon^2}{4} \operatorname{sen} 2\lambda ,$$

trascurando le potenze di $\varepsilon$, dalla terza in su. Noto, passando, che dalla pretesa formola di Brünnow $\lambda_1 - \lambda$ risulterebbe trascurabile rispetto ad $\varepsilon^2$. Ora per $\lambda = \pm 90°$ si ha, come si poteva prevedere, $\lambda_1 = \lambda$, anche senza trascurar nulla. Il massimo di $\lambda_1 - \lambda$ è, in valore assoluto, $\frac{\varepsilon^2}{4}$, e si presenta quando $\operatorname{sen} 2\lambda = \pm 1$, cioè per $\lambda = \pm 45°$, $\pm 135°$. Invece il prof. Nobile addita agli osservatori come punti nei quali, sull'equatore, deve avverarsi la *massima variazione* di longitudine, precisamente quei due soli punti *nei quali la longitudine non varia!*

3° « Se nel cominciare a discutere l'equazione (4) l'Autore ha parlato d'una *curva speciale,* egli non ha poi tardato a riconoscere che questa curva è un circolo. »

Nego. Le ultime parole del § 2 stanno invece a provare, come ho detto, che le già scarse cognizioni matematiche dell'Autore sono confuse al punto che egli non riesce a rendersi conto delle stesse verità che gli cadono sotto gli occhi. Ad ogni modo, chi gli ha impedito di ritornare su quello che aveva scritto, per farne sparire almeno l'espressione di *curva speciale?* Mandò egli forse in tipografia le prime bozze dei suoi calcoli, vietando a sè stesso ogni ulteriore correzione? Se l'affermazione del prof. Nobile fosse sincera, egli avrebbe dunque voluto dimostrare, fra molte altre ingenuità, che se un punto percorre un circolo massimo della sfera, che non sia un meridiano, esso non può avvicinarsi indefinitamente ai poli. In altri termini, generalizzando: *una curva piana non passa per quei punti che stanno fuori del suo piano!* Del resto l'errore principale del prof. Nobile sta appunto nell'aver creduto e sopratutto nel continuare a credere che la curva della massima variazione di longitudine sia un circolo, o qualche cosa che rassomiglia ad un circolo.

4° « All'Autore poco importava la discussione della *curva speciale.*



Egli voleva soltanto indicare ai geodeti la via da tenere per non si sa quali alte speculazioni. »

Non è probabile che i geodeti vogliano seguire i consigli di chi li esorta a fondare le loro osservazioni sopra una base matematica ridicola e falsa. Quanto alla curva speciale, il discuterla non poteva interessare altri che il prof. Nobile, giacchè il pubblico delle nostre scuole conosce abbastanza i circoli massimi e le coniche sferiche. O Geodesia! .....

Or io pongo fine al mio dire per non imitare il prof. Nobile, che specialmente nella 6ª pagina della sua « Nota » sciupa la carta dell'Accademia e la pazienza dei lettori per abbandonarsi a volgarissime esercitazioni di Geometria analitica, indegne dei più elementari periodici di matematica. Pure termino senza speranza alcuna che la mia critica valga a correggere un avversario (stavo per dire scientifico) che *nun àvi drittu, è comu la lasagna, — e cci aviti a concediri pri forza, — chi l'acqua asciuca e chi lu suli vagna.* (*)

Portici, 2 agosto 1893.

---

## Rettificazione di alcune inavvertenze in un moderno trattato di geodesia.

Nota di Ottavio Zanotti Bianco, Ingegnere.

Scopo del presente lavoro è di correggere la dimostrazione di una proprietà del *geoide* data dal compianto Professore Enrico Pucci nelle pagine 300-4 del volume primo del suo pregevole libro, *Fondamenti di Geodesia.* I ragionamenti svolti rimangono valevoli anche rettificando l'inavvertenza che generò uno sviluppo di calcolo inesatto.

Ne occorre trascrivere parte della trattazione.

« Ci sembra importante di notare che i punti che appartengono al *livello medio del mare* non appartengono però realmente al *geoide* definito come la superficie di equilibrio secondo cui si disporrebbero le acque dei mari supposti in comunicazione e quando non vi fossero cause di continuo disturbo. Una tale considerazione che non ha valore rispetto allo scopo principale dell'altimetria, diviene invece necessaria quando si vogliono comparare degli *zeri mareografici* posti sotto latitudini molto diverse, per dedurne delle conseguenze sulla forma del Geoide. »

« Per mostrare elementarmente la distanza (in altezza) fra un punto appartenente al *livello* medio del mare e il punto corrispondente del Geoide

(*) Giovanni Meli, *Satiri* (Lu tempiu di la Fortuna).

e dedurre in pari tempo una formola che dia, con sufficiente approssimazione, il valore di tale distanza, considereremo il Geoide come una sfera di raggio R (lo che non introduce in questo caso nessun errore sensibile nei resultati) e supporremo che la superficie delle acque, deformata a causa dell'attrazione lunisolare, sia un ellissoide di rivoluzione allungato, col suo grand'asse diretto verso il corpo attraente che possiamo ammettere unico. Rappresentando la metà di questo grand'asse con $R + x$ è facile vedere che il piccolo asse è dato con sufficiente approssimazione da $R - 2x$, giacchè, il volume dell'ellissoide dovendo essere eguale a quello della sfera, si ha fra il raggio di questa e i semiassi $a$, $b$ la condizione

$$a^2 b = R^3$$

da cui si deduce

$$b = \frac{R^3}{a^2} = \frac{R^3}{(R+x)^2} = R\left(1 - 2x \, \frac{3x^3}{R^2} \ldots\ldots \text{ ecc.}\right)$$

mentre, per la piccolezza pel rapporto $\frac{x}{R}$, le seconde potenze di questo possono evidentemente essere trascurate, tanto più che la forma ellissoidica ammessa non è che ipotetica. »

La parte sbagliata comincia colle parole « *è facile vedere che il piccolo asse* ». Notiamo anzitutto che si doveva scrivere *piccolo semi asse*, come appare dalla semplice lettura. Il valore di questo *piccolo semi asse* è $R - \frac{x}{2}$ non $R - 2x$. Infatti se l'ellissoide di rivoluzione che corrisponde alla superficie delle acque perturbate dall'azione lunisolare è allungato verso il corpo attraente, supposto unico, l'asse maggiore passante pel corpo attraente, sarà quello di rotazione; diciamolo $2a$ e chiamiamo $b$ il semi asse minore; il volume dell'ellissoide sarà dato da $\frac{4}{3}\pi ab^2$ e quindi ragionando come nel testo si avrà l'equazione

$$ab^2 = R^3 \tag{1}$$

non quella data

$$a^2 b = R^3$$

Da questa svista rimane inquinato tutto il susseguente sviluppo che noi ripetiamo qui liberato dalle conseguenze di quella.

Dalla nostra equazione (1), si ricava

$$b = \frac{\sqrt{R^3}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{R^3}}{\sqrt{R+x}} = R^{\frac{3}{2}}\left\{R + x\right\}^{-\frac{1}{2}} = R^{\frac{3}{2}}\left\{\frac{1}{R^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}\frac{x}{R^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{8}\frac{x^2}{R^{\frac{5}{2}}} \ldots\ldots\right)$$

$= R\left\{1 - \frac{x}{2}\right\}$; pur trascurando le potenze di $\frac{x}{R}$ superiori alla prima.

Ora riprodurremo lo sviluppo dell'autore ma col giusto valore

$$b = R\left(1 - \frac{x}{2}\right) \tag{2}$$



Tutti i punti che in un dato istante hanno alta marea appartengono ad un meridiano terrestre, e, nella nostra ipotesi, astrazion fatta dal ritardo della marea *(stabilimento del porto)* la forma della intersezione del piano di quel meridiano colla superficie delle acque è in quell'istante un'ellisse che ha per semi assi $R + x$ ed $R - \frac{x}{2}$; se si riferisce codesta curva a un sistema di coordinate polari $r, \theta$ col polo al suo centro e coll'asse polare coincidente coll'asse maggiore dell'ellisse, per l'equazione che la rappresenta, si trova senza difficoltà

$$r = \frac{R - \frac{x}{2}}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2\theta}},$$

da cui si deduce:

$$r - R = \frac{Re^2\cos^2\theta}{2} - \frac{x}{2}\left(1 + \frac{e^2\cos^2\theta}{2}\right) + \ldots\ldots$$

Per il valore di $e^2$, trascurando le potenze di $\frac{x}{R}$ superiori alla prima, si ottiene per altro

$$e^2 = \frac{(R+x)^2 - \left(R - \frac{x}{2}\right)^2}{(R+x)^2} = \frac{3x}{R} + \text{ ecc.}$$

quindi l'espressione precedente diviene

$$r - R = -\frac{x}{2}\left(1 - \frac{3}{2}\cos^2\theta\right) + \ldots$$

Per esprimere $\theta$ in funzione di quantità note, sia $\delta$ la declinazione astronomica del corpo attraente e $\psi$ la latitudine geocentrica corrispondente al punto $(r, \theta)$ ed è facile constatare che si ha

$$\theta = \psi - \delta$$

Avremo dunque:

$$r - R = -\frac{x}{2}\left\{1 - \frac{3}{2}\cos^2(\psi - \delta)\right\} \tag{3}$$

Formola molto notevole che ci mostra che per i punti di un meridiano compresi fra certe latitudini, anche nel momento di alta marea, il livello del mare resta al disotto del Geoide, che è una superficie per metà sempre elevata sulle acque.

Nel momento di bassa marea l'intersezione del piano meridiano colla superficie delle acque è un cerchio di raggio $R - \frac{x}{2}$ e la distanza (in altezza) fra un punto del mare dal Geoide è $-\frac{x}{2}$. Rappresentando dunque con $\Delta$ la differenza di livello fra l'alta e la bassa marea in un luogo di latitudine *geocentrica* $\psi$ avremo le relazioni

$$(4) \quad \Delta = \frac{3}{4}x\cos^2(\varphi - \delta); \quad x = \frac{4\Delta}{3\cos^2(\varphi - \delta)} \quad (5).$$

Si avverta che la parola *geocentrica*, manca nel testo, ma vi è necessaria.

La (5) ci porge il mezzo di verificare l'esattezza dell'ipotesi fatta sulla forma della superficie del mare deformata dall'attrazione lunisolare; infatti i valori di $\Delta$ osservati su coste oceaniche non frastagliate sotto le diverse latitudini in ogni singola fase di marea introdotti successivamente nella (5) dovrebbero dare, se l'ipotesi è buona, uno stesso valore per $x$.

La distanza (in altezza) H fra il livello medio mareografico ed il Geoide si ottiene subito dalle (3), (4) e (5) osservando che il livello medio si ha togliendo dal livello dell'alta marea la quantità $\frac{\Delta}{2}$, mentre per ridurre il livello dell'alta marea al Geoide si deve togliere dal primo la quantità:

$$-\frac{x}{2}\left\{1-\frac{3}{2}\cos^2(\psi-\delta)\right\}$$

che, a causa della (5), può scriversi

$$\frac{-2\Delta\left\{1-\frac{3}{2}\cos^2(\psi-\delta)\right\}}{3\cos^2(\psi-\delta)}$$

Questa ha la stessa forma di quella data dal prof. Pucci a pagina 303, ma il valore di $\Delta$ è diverso; quello esatto è dato dalla nostra formola (4).

Ne conviene proseguire a rettificare lo sviluppo del testo, perchè le conseguenze della svista accennata in principio si estendono fino al fine.

Si ha quindi

$$H=\frac{\Delta}{2}+\frac{2\Delta\left\{1-\frac{3}{2}\cos^2(\psi-\delta)\right\}}{3\cos^2(\psi-\delta)}=-\frac{\Delta}{2}\left\{1-\frac{3\cos^2(\psi-\delta)}{4}\right\}. \qquad (6).$$

Per $\psi-\delta=0$, si ha dunque: $H=\frac{\Delta}{6}$: per $\psi-\delta=90°$, quantunque il valore di $\frac{1}{\cos^2(\psi-\delta)}$ divenga infinito, il valore di H resta indeterminato, giacchè $\Delta$ si annulla: infatti nei due punti corrispondenti del Geoide, che sono unici, la marea varia solo col variare della posizione relativa del sole e della luna. Del resto sappiamo che in questo caso si ha $H=\frac{x}{2}$.

In quanto rimane dello sviluppo del prof. Pucci la svista in cui incorse non ha più influenza, ove si avverta di sostituire alle formole cui egli accenna, quelle corrette da noi date nella presente breve nota.

A pag. 214 del volume medesimo (primo) della Geodesia del sig. Pucci, linea 17, invece di *simile e concentrico,* bisogna leggere *simile, similmente disposto e concentrico,* od, il che torna lo stesso, *omotetico e concentrico.*

Ottavio Zanotti Bianco.



N. Jadanza. — *Una difesa delle formole di Simpson, ed alcune formole di quadratura poco note.* (Estratto dal periodico *Il Politecnico,* 1893).

Questo articolo si riferisce alla questione sollevata dall'ing. F. Crotti nella *Rivista di Matematica,* II, pag. 176, e già discussa dal prof. Bardelli, ivi, vol. III, pag. 16 e da altri. L'A. fa vedere i pregi della formola di Simpson rispetto a quella dei trapezii; si occupa in seguito di alcune altre formole di quadratura, cioè di quelle di Eulero (o di Cotes), di Gauss, e di Tchebicheff, e ne fa infine delle interessanti applicazioni numeriche. (P).

E. Carvallo. — *Sur les forces centrales.* Nouvelles Annales de Mathématiques, 1893, pag. 228.

In questa breve nota l'A. applicando la teoria dei vettori, tratta la questione enunciata deducendo dal principio delle aree che l'accelerazione è centrale, e conchiudo: « Voilà, parmi tant d'autres, un exemple où la méthode du calcul géometrique peut rendre service à l'enseignement. »

Il passaggio inverso, che è pure assai usato nell'insegnamento, si può esporre come segue.

Siano $\rho$ e $\varphi$ le coordinate polari d'un punto P del piano. Si avrà

$$P=O+\rho e^{i\varphi}I, \qquad (1)$$

ove O è il polo, e I è un vettore, di lunghezza l'unità, diretto secondo l'asse polare. Supposto il punto P mobile, e quindi $\rho$ e $\varphi$ funzioni del tempo $t$, derivando la (1) si avrà la velocità

$$P'=(\rho'+\rho\varphi' i)e^{i\varphi}I \qquad (2)$$

e, derivando una seconda volta, l'accelerazione

$$P''=(\rho''+2\rho'\varphi' i-\rho\varphi'^2+\rho i\varphi'')e^{i\varphi}I \qquad (3)$$

Se si vuole che P″ sia parallelo a P — O, cioè a $e^{i\varphi}I$, la quantità entro parentesi dovrà essere reale, e quindi

$$2\rho'\varphi'+\rho\varphi''=0, \qquad (4)$$

che integrata dà

$$\rho^2\varphi'=\text{costante}, \qquad (5)$$

che esprime il principio delle aree. Tenendo conto della (4), la (3) diventa:

$$P''=(\rho''-\rho\varphi'^2)e^{i\varphi}I. \qquad (6)$$

Se si vuole che il valore assoluto di P″ sia una data funzione $f(\rho)$ dei raggio vettore, ossia che

$$P'' = f(\rho)\, e^{i\varphi}\, I,$$

dovrà essere

$$\rho'' - \rho\,\varphi'^2 = f(\rho) \qquad (7).$$

Le equazioni differenziali (5) e (7), che non contengono più vettori, si trattano ora come in tutti i libri di meccanica. (P).

---

# I numeri negativi.

Nota di C. Burali-Forti in Torino.

In un recente articolo inserito nei *Nouvelles Annales des mathematiques* (fascicoli di aprile e maggio 1893) il sig. M. Fouché si occupa dell'introduzione dei numeri negativi, facendo uso nelle sue ricerche di un concetto che in sostanza era già stato adoperato dal Prof. F. Castellano (1). Avevo dovuto anche io, qualche tempo fa, occuparmi di tale argomento, e ritengo non inutile esporre qui alcune osservazioni che credo possano completare i lavori del sig. Castellano e del sig. Fouché.

Riguardo ai vari modi adoperati per introdurre i numeri negativi mi limiterò ad alcune osservazioni generali.

Si possono introdurre prima i numeri intieri negativi, poi i fratti negativi, poi finalmente i numeri irrazionali negativi. Questo metodo fu già esposto dal sig. G. Peano nelle due note inserite in questa rivista (Vol. 1°, 1891, pag. 87-101 e pag. 256-266). Il numero intero negativo è qui ottenuto invertendo una speciale corrispondenza della quale l'A. si è servito per definire l'operazione $a + b$.

Si possono poi introdurre i numeri reali positivi e negativi considerando, come ha fatto il sig. Bettazzi (2) (pag. 89), una corrispondenza metrica in una classe continua a due sensi.

Si introducono, anche, i numeri interi negativi, definendo (così si dice) una nuova unità 1′ (unità negativa) mediante la relazione $1 + 1' = 0$ (3).

(1) *Elementi di Algebra.* Torino, Bocca, 1891.

(2) *Teoria delle grandezze.* Pisa, E. Spoerri, 1890.

(3) Bettazzi, l. c., pag. 165 — G. M. Testi. Algebra elementare. Vol. II del *Corso di matematiche.* Livorno, Giusti, 1892 (pag. 16 e seg.) — S. Pincherle. *Analisi algebrica.* Manuali Hoepli, 1893 (pag. 36).



Questa pretesa definizione non ha la forma delle definizioni matematiche; vale a dire non ha nel primo membro il solo segno 1′, e nel secondo un complesso di segni avente significato già noto. Di più si potrebbe osservare che qui si tratta di definire due segni, il segno + e il segno 1′.

Finalmente si possono introdurre i numeri negativi reali definendo essi e le operazioni + e ×, in modo che sieno soddisfatte le condizioni caratteristiche delle relazioni e operazioni corrispondenti già note per i numeri positivi. Questo è il metodo seguito dai sigg. Castellano e Fouché (l. c.) e che seguirò io pure in questa nota, osservando volta per volta quali sono le condizioni deficienti o sovrabbondanti indicate dai sigg. Castellano e Fouché nei citati lavori.

## § 1. Definizioni (1).

1. $a\,\varepsilon\,Q\,.\,\supset.\,-a\,\varepsilon\,-Q$
2. $-Q = \overline{x\,\varepsilon}\,(a\,\varepsilon\,Q\,.\,x = -a\,.\,-\!=_a \Lambda)$
3. $Q \cap -Q = \Lambda$
4. $q = Q \cup -Q \cup \iota 0$

(Def.)

### Osservazioni.

[1]. Scriviamo $-Q$, al posto di *numero reale negativo.*

Per analogia il segno Q, lo leggeremo *numero reale positivo.*

Essendo (P1), $a$ un numero reale positivo, con $-a$ indichiamo un numero reale negativo. Ammettiamo cioè che essendo $a$ un individuo della classe Q, la coppia di segni $-a$ indichi un individuo della classe $-Q$.

[2]. Ammettiamo che la classe $-Q$ (P2) sia costituita da individui tali che essendo $x$ uno di questi si possa sempre trovare un individuo $a$ di Q, per il quale si abbia che $x = -a$, cioè che $x$ *è identico* a $-a$. È evidente che tale definizione è necessaria poichè la classe $-Q$ potrebbe definirsi in modo da contenere tutti gli $\overline{x\,\varepsilon}\,(a\,\varepsilon\,Q\,.\,x = -a\,.\,-\!=_a \Lambda)$ e altri individui ancora, senza che per questo divenisse assurda la P1.

(1) Per le notazioni di cui facciamo uso in questa nota, si veda questa Rivista, vol. III, pag. 1 e seg.; vol. I, pag. 1 e seg.; e le due note già citate del Prof. Peano, anche per ciò che riguarda la teoria generale dei numeri reali.

[3]. Escludiamo che le classi Q e — Q, abbiano individui a comune, ammettiamo cioè che un numero reale non possa essere ad un tempo negativo e positivo.

Le P2 e 3 non sono citate dai sigg. Castellano e Fouché.

[4]. Il segno q si legge *numero reale*. La classe q contiene dunque i numeri positivi, i negativi e lo *zero*.

Dalla P4 si ha

(α) $$a \varepsilon q . \supset . a \varepsilon Q \cup a \varepsilon - Q \cup a = 0$$

e in questa, a causa della P3, possiamo sostituire al segno ∪ (vel) il segno ∘ (aut) (vedi Formulario pubblicato dalla *Rivista di Matematica*, I § 3 P24-30) e allora si ha

(β) $$a \varepsilon q . \supset . a \varepsilon Q \circ a \varepsilon - Q \circ a = 0 .$$

La P (α), dice che dei tre casi $a \varepsilon Q$; $a \varepsilon - Q$; $a = 0$, deve verificarsene uno, ma non esclude che possano verificarsene due o tre ad un tempo; la P (β) dice che uno solo dei tre casi deve verificarsi.

## § 2. Eguaglianza.

1. $a, b \varepsilon Q . \supset : -a = -b . = . a = b .$ (Def.
2. $a, b \varepsilon q . a = b . \supset . a, b \varepsilon Q \cup a, b \varepsilon - Q \cup a, b \varepsilon \iota 0 .$

$a, b, c \varepsilon q . \supset :$

*3. $a = a$

*4. $a = b . = . b = a$

*5. $a = b . b = c . \supset . a = c .$

### Osservazioni.

[1]. Essendo $a$ un numero reale positivo, possiamo convenire di dire che $a$ è il *valore assoluto* del numero negativo $-a$; allora la P1 può enunciarsi così « Dire che due numeri negativi sono eguali equivale a dire che sono eguali i loro valori assoluti ». Questa definizione è pure stata data dal sig. Fouché; il sig. Castellano non ha definito i numeri negativi eguali, ritenendo compreso il concetto di eguaglianza nel concetto di identità ed ammettendo a priori il principio della sostituzione (l. c., pag. 4, n° 11).

[2]. Dalla proposizione primitiva $u \varepsilon K . a = b . b \varepsilon u . \supset . a \varepsilon u$ ammessa in generale per le classi (*Formulario* I. § 4 P10), abbiamo

$$a, b \varepsilon q . a \varepsilon Q . a = b . \supset . b \varepsilon Q .$$



Da questa si ha (*Formulario* I. § 2 P1)

$$a, b \varepsilon q . a \varepsilon Q . b - \varepsilon Q . \supset . a - = b .$$

A causa della P4 del § 1, l'insieme delle condizioni $b \varepsilon q . b - \varepsilon Q$ equivale a $b \varepsilon (-Q \cup \iota 0)$; la condizione $a \varepsilon q$ è contenuta nella condizione $a \varepsilon Q$; dunque la precedente proposizione può scriversi

(α) $$a \varepsilon Q . b \varepsilon (-Q \cup \iota 0) . \supset . a - = b .$$

Analogamente si ha

(α') $$a \varepsilon (-Q \cup \iota 0) . b \varepsilon Q . \supset . a - = b .$$

Da (α) e (α'), e da *Formulario* I. § 2 P17 si ha la proposizione

(β) $$[a \varepsilon Q . b \varepsilon (-Q \cup \iota 0)] \cup [a \varepsilon (-Q \cup \iota 0) . b \varepsilon Q] . \supset . a - = b .$$

Ponendo nel primo membro di questa i valori (P4 . § 1)

$$Q = q \cap -(-Q \cup \iota 0); \; -Q \cup \iota 0 = q \cap -Q$$

abbiamo

$$a, b \varepsilon q . [a - \varepsilon (-Q \cup \iota 0) . b - \varepsilon Q] \cup [a - \varepsilon Q . b - \varepsilon (-Q \cup \iota 0)] . \supset . a - = b .$$

Da questa, e da *Formulario* I. § 2 P1, 7, 8, si ha

$$a, b \varepsilon q . a = b . \supset . [a \varepsilon (-Q \cup \iota 0) \cup b \varepsilon Q][a \varepsilon Q \cup b \varepsilon (-Q \cup \iota 0)] .$$

Sviluppando il prodotto logico delle due somme logiche del secondo membro, ricordando la P3 del § 1 e ricordando che $Q \cap \iota 0 = \Lambda$, abbiamo

$$a, b \varepsilon q . a = b . \supset . a, b \varepsilon Q \cup a, b \varepsilon - Q \cup a, b \varepsilon \iota 0$$

che è la P2 di questo paragrafo.

La (β) esprime che « se i numeri $a$ e $b$ sono l'uno positivo, e l'altro negativo o nullo, allora $a$ non è uguale a $b$ » e per dimostrare tale proposizione è necessaria la P3 del § 1.

La P2 esprime invece che « se due numeri sono eguali, allora essi sono entrambi positivi, o entrambi negativi o entrambi nulli » e per dimostrare tale proposizione è necessaria la P3 del § 1.

La P2 non è stata enunciata dal sig. Fouché, sebbene di essa si serva implicitamente quando dice (l. c., pag. 171) che « L'égalité ainsi définie des nombres algébriques jouit évidemment de la propriété fondamentale ». Infatti per dimostrare le P4 e 5 di questa nota occorre considerare i tre casi $a, b \varepsilon Q$; $a, b \varepsilon - Q$; $a, b \varepsilon \iota 0$, e la P2 (unitamente alla β) dimostra che non vi sono altri casi da considerare.

[3. 4. 5.] Le P3, 4, 5 segnate con asterisco sono le proprietà caratteristiche dell'eguaglianza. Il sig. Fouché ritiene la sola P5 (enunciata però così: $a = c \,.\, b = c \,.\supset.\, a = b$) come caratteristica dell'eguaglianza. Essa però non è sufficiente (1).

## § 3. Somma.

$$
\left.\begin{array}{ll}
1. & a, b \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\supset.\, (-a) + (-b) = -(a+b) \\
2. & \qquad a \geqq b \,.\supset.\, a + (-b) = a - b \\
3. & \qquad a \leq b \,.\supset. \qquad\qquad = -(b-a) \\
4. & \qquad a \leqq b \,.\supset.\, (-a) + b = b - a \\
5. & \qquad a > b \,.\supset. \qquad\qquad = -(a-b) \\
6. & a \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\supset.\, a + 0 = 0 + a = a
\end{array}\right\} \text{(Def.)}
$$

$a, b, c \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\supset:$

$$
\begin{array}{ll}
{*}7. & a + b \,\varepsilon\, \mathrm{q} \\
{*}8. & a = b \,.\supset.\, a + c = b + c \\
{*}9. & a + b = b + a \\
{*}10. & a + (b + c) = (a + b) + c \\
{*}11. & a \,\varepsilon\, (b + \mathrm{q}) \\
{*}12. & a \,-\varepsilon\, (a + (\mathrm{q} \cap -\iota 0))
\end{array}
$$

### Osservazioni.

[1. 2. 3. 4. 5. 6.] Essendo $a$, $b$ numeri reali chiameremo *somma* di $a$ con $b$, ciò che è indicato dal complesso dei segni $a + b$. Contenendo la classe q le classi Q, — Q e lo zero, dovremo definire

la somma di un numero negativo con uno negativo (P1)
» » » positivo » » (P2, 3)
» » » negativo » positivo (P4, 5)

la somma di un numero reale con zero e di zero con un numero reale (P6).

Le P1-6 sono vere definizioni poichè il complesso dei segni $a + b$ non aveva precedentemente ricevuto significato.

Le medesime definizioni sono date dal sig. Fouché (l. c. pag. 171). Il sig. Castellano aggiunge la definizione $a + (-(b + c)) = (a + (-b)) + (-c)$ che è conseguenza delle precedenti (P10).

[7. 8. 9. 10.] Le P7-10, segnate con asterisco, danno le proprietà caratteristiche della somma e si dimostrano facilmente (vedi p. e. Fouché

(1) Vedi questa Rivista, vol. II, pag. 113 (E. De-Amicis). Pag. 161 (Vailati).



l. c.). Il sig. Fouché dà come proprietà caratteristiche della somma le seguenti

$$
\begin{array}{lll}
(1) & a + 0 = a & \\
(2) & a + b = b + a & \\
(3) & a + b + c = a + c + b & \qquad \text{(l. c. pag. 169)}
\end{array}
$$

ove $a + b + c$ deve ritenersi identico ad $(a + b) + c$. Ora queste condizioni non sono sufficienti, poichè da esse *solamente* non può dedursi la proprietà *associativa* della somma cioè la nostra P10. Infatti: siano ancora $a$, $b$, $c$, individui di q; chiamiamo eguali due individui di q quando hanno egual valore assoluto (p. e. $3 = 3$, $3 = -3$, $-3 = -3$); e l'operazione $+$ sia l'ordinaria sottrazione. In tale ipotesi, le condizioni dell'eguaglianza sono verificate, le P (1), (2), (3) del sig. Fouché sono vere, ma la P10 non è vera (p. es. $3 - (7 - 5) - = (3 - 7) - 5$). Ciò avviene perchè per dedurre la P10 dalle (1), (2), (3) del sig. Fouché occorre far uso della P8 che nelle ipotesi da noi fatte non è vera (infatti p. e. $-3 = 3$ e si dovrebbe avere che $-3 - 7 = 3 - 7$, cioè $-10 = -4$, che è assurdo) (1).

[11. 12.] Definendo i segni $>$ e $<$ come si è già fatto per i numeri reali positivi

$$
\begin{array}{r}
a, b \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\supset:\, a > b \,.=.\, a \,\varepsilon\, b + \mathrm{Q} \\
.\supset:\, a < b \,.=.\, b > a
\end{array}
$$

allora la P11 può scriversi

$$a, b \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\supset.\, a = b \cup a > b \cup a < b \,.$$

Senza entrare in troppi particolari per ciò che riguarda le P7-12 rimando il lettore alla mia nota « Sulla teoria delle grandezze » inserita in questa Rivista (vol. III pag. 76) e alla parte IV del formulario.

## § 4. Differenza.

$$
\begin{array}{ll}
1. & a, b \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\supset.\, a - b = \mathrm{q} \cap \overline{x \,\varepsilon}\, (a = b + x) \qquad \text{(Def.)} \\
2. & \qquad .\supset.\, a - b \,\varepsilon\, \mathrm{q} \\
3. & a \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\supset.\, 0 - (-a) = a
\end{array}
$$

(1) Se restando fisse le prime due ipotesi ora fatte supponiamo che l'operazione $+$ sia l'ordinaria addizione in luogo della sottrazione, allora le P9 e 10 sono vere ed è falsa la P8 e quindi questa non è conseguenza della proprietà commutativa ed associativa della somma. Il sig. S. Pincherle (l. c., pag. 22) ammette come proprietà caratteristiche della somma le P7, 9, 10: l'osservazione ora fatta prova che anche queste non sono sufficienti.

4. $a \varepsilon \mathrm{Q} . \supset . -(-a) = a.$ (Def.)
5. $-(-\mathrm{Q}) = \mathrm{Q}$
6. $-\mathrm{q} = \mathrm{q}.$

### Osservazioni.

[1]. Con $a - b$ indichiamo la differenza fra $a$ e $b$, e ammettiamo (P1) che essa sia la classe dei numeri reali $x$ tali che $a = b + x$.

[2]. Si dimostra facilmente che la differenza di due numeri reali è un numero reale.

[3]. Ogni numero positivo $a$ può essere considerato come la differenza fra 0 e il numero negativo $-a$.

Conveniamo allora di indicare con $-(-a)$ il numero positivo $a$. Diamo così un significato al complesso dei segni $-a$ quando $a$ è un numero reale qualunque.

[5. 6]. Se $a$ è un numero reale, $-a$ indica un numero reale negativo se $a$ è positivo; indica il valore assoluto di $a$ se $a$ è negativo.

Con le definizioni date fin qui, l'algoritmo algebrico riguardante le operazioni $+$ e $-$ è completamente stabilito.

## § 5. Prodotto.

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & a, b \,\varepsilon\, \mathrm{Q} . \supset . (-a)(-b) = a\,b \\ 2. & \qquad . \supset . a(-b) = -(a\,b) \\ 3. & \qquad . \supset . (-a)\,b = -(a\,b) \\ 4. & a \,\varepsilon\, \mathrm{q} . \supset . a \times 0 = 0 \times a = 0 \end{array}\right\} \text{(Def.)}$$

$a, b, c \,\varepsilon\, \mathrm{q} . \supset :$

*5. $a\,b \,\varepsilon\, \mathrm{q}$
*6. $a = b . \supset . ac = bc$
*7. $ab = ba$
*8. $a\,(bc) = (ab)\,c$
*9. $(a + b)\,c = ac + bc$

$a \,\varepsilon\, (\mathrm{q} \frown - \iota\, 0) . \supset :$

10. $/a = \mathrm{q} \frown \overline{x \varepsilon}\,(ax = 1)$ (Def.)
11. $/a \,\varepsilon\, (\mathrm{q} \frown - \iota\, 0)$

$a \,\varepsilon\, \mathrm{q} . b \,\varepsilon\, (\mathrm{q} \frown - \iota 0) . \supset :$

12. $(-a)/(-b) = a/b$
13. $a/(-b) = -(a/b)$
14. $(-a)/b = -(a/b)$



### Osservazioni.

Essendo $a$, $b$ numeri reali, chiamiamo *prodotto* di $a$ per $b$ ciò che è indicato dal complesso di segni $a \times b$ ossia $ab$.

Per le P1-4 possono ripetersi le osservazioni già fatte per la somma.

Le P5-9 insieme alla P4 dànno le proprietà caratteristiche del prodotto. Anche in questo caso quelle date dal sig. Fouché (l. c. p. 170) non sono sufficienti e ciò si dimostra come si è già fatto per la somma.

Con la P10 definiamo il reciproco di un numero reale diverso da zero.

Le P1-3, 12-14 esprimono le note regole dei segni dei prodotti e dei quozienti (1).

*Arezzo, agosto 1893.* Burali-Forti Cesare.

---

(1) Era già composto questo articolo quando ebbi occasione di leggere nei *Nouvelles Annales* (l. c., fascicolo di giugno) l'articolo del sig. L. Lévy « Quelques observations..... pag. 225 » riguardanti l'articolo già da me citato ed esaminato del sig. Fouché. Credo conveniente fare qualche osservazione anche sull'articolo del sig. Lévy.

1° Egli dice (l. c., pag. 227) che crede *preferibile* sostituire alla proposizione (3) (questa nota § 3) del sig. Fouché, l'ordinaria proprietà associativa (P10, § 2); ed aggiunge «..... qui lui *équivaut* d'ailleurs ». Se le proposizioni $a$ e $b$ si chiamano equivalenti quando da $a$ si deduce $b$ e da $b$ si deduce $a$, ciò che dice il sig. Lévy non è esatto, come ho dimostrato nel § 2.

2° Egli dice (l. c., pag. 227) « Enfin il est *nécessaire*, pour définire ..... la soustraction, de dire: si $a + b = a + b'$, il en résulte $b = b'$ ». Nella mia nota « Sulla teoria delle Grandezze » (l. c., pag. 86) ho dimostrato che la proposizione enunciata dal sig. Lévy è conseguenza delle P7, 8, 9, 10, 11, 12 di questa nota, e di più che è conseguenza *necessaria* della P12. Ciò che dice, dunque, il sig. Lévy è *necessario* solo quando le proprietà ammesse per i numeri positivi verifichino solo le P7-11.

3° Nell'ultima parte della sua nota, intitolata « Définition des quantités négatives ou positives », il sig. Lévy definisce il numero negativo $-a$ dicendo che esso è il binomio $0 - a$. Ora il complesso di segni $0 - a$, per $a$ diverso da zero, non può aver ricevuto un significato nella teoria dei numeri positivi, e quindi esso stesso, non che definire i numeri negativi, ha bisogno di esser definito. Le relazioni che dice quindi (pag. 228) *esser facile di verificare*, sono altrettante definizioni vere e proprie, nelle quali manca, per la 2ª e 3ª, la condizione $a \overline{\overline{>}}\, b$.

*(Torino, ottobre 1893).*

## Sull'equazione di 3° grado

di F. Giudice.

*Equazione differenziale soddisfatta dalle radici d'un'equazione algebrica.* Siano funzioni d'una stessa variabile i coefficienti dell'equazione

$$1) \qquad y^n + f_2 y^{n-2} + f_3 y^{n-3} + \dots + f_{n-1} y + f_n = 0$$

che supporremo generale, od almeno tale che siano linearmente indipendenti $n-1$ delle sue $n$ radici $y_1, y_2, \dots, y_n$: sarà per ciò diverso da zero il determinante

$$D = \begin{vmatrix} y'_1 & y'_2 & \dots & y'_{n-1} \\ y''_1 & y''_2 & \dots & y''_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Invece il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} y & y_1 & \dots & y_{n-1} \\ y' & y'_1 & \dots & y'_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^{(n-1)} & y_1^{(n-1)} & \dots & y_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

s'annulla per aver due verticali identiche, se $y$ ha uno dei valori $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$, e si annulla anche se è $y = y_n$ per essere $y_1 + y_2 + \dots + y_n = 0$. Ora è:

$$\Delta . D = \begin{vmatrix} y & y_1 & \dots & y_{n-1} & y_n \\ y' & y'_1 & \dots & y'_{n-1} & y'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^{(n-1)} & y_1^{(n-1)} & \dots & y_{n-1}^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & y'_1 & \dots & y'_{n-1} & y'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & y_1^{(n-1)} & \dots & y_{n-1}^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

S'eseguisca questo prodotto per orizzontali e nel risultato, che oltre la variabile $y$ e sue derivate conterrà soltanto funzioni simmetriche di tutte le radici ed $y_n$, si ponga $y$ in luogo di $y_n$, indicando $y_n$ una qualsiasi delle $n$ radici: poi dagli elementi dell'ultima verticale si tolgano gli omologhi della prima. Si riconoscerà così che tutte le radici della 1) soddisfano l'equazione differenziale



$$2) \qquad \begin{vmatrix} y & s_{0,1} & \dots & s_{0,n-2} & s_{0,n-1} \\ y' & s_{1,1} & \dots & s_{1,n-2} & s_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^{(n-2)} & s_{n-2,1} & \dots & s_{n-2,n-2} & s_{n-2,n-1} \\ y^{(n-1)} & s_{n-1,1} & \dots & s_{n-1,n-2} & s_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = 0$$

dove s'è fatto

$$s_{\mu,\nu} = y_1^{(\mu)} y_1^{(\nu)} + y_2^{(\mu)} y_2^{(\nu)} + \dots + y_n^{(\mu)} y_n^{(\nu)}.$$

Adunque: *Le radici d'un'equazione algebrica di grado $n$, se $n-1$ d'esse siano linearmente indipendenti, soddisfano un'equazione differenziale lineare omogenea dell'ordine $n-1$, i coefficienti della quale sono formati con quelli dell'equazione algebrica e derivate dei medesimi.*

Si conoscono teoremi che possono facilitare il calcolo dei coefficienti della 2): per essa s'è riconosciuto che certe classi d'equazioni algebriche sono risolubili per serie ipergeometriche. Mediante tali serie furono anche risolte le equazioni generali di 5° e 6° grado (*); ma ciò senza utile pratico perchè s'è supposto che tali equazioni siano prima semplificate mediante la trasformazione di Bring. Noi ora ci occuperemo dell'equazione cubica: e, per procedere nel modo più elementare possibile, calcoleremo direttamente la relativa equazione differenziale e ne dedurremo, col metodo dei coefficienti indeterminati, gli sviluppi in serie delle tre radici, i quali si potranno utilizzare anche in pratica.

*Equazione cubica.* Se nell'equazione cubica, generale,

$$3) \qquad y^3 + 3\,H\,y + x = 0$$

si considera H come costante ed $x$ come variabile indipendente, derivando s'ottiene

$$3\,(y^2 + H)\,y' + 1 = 0$$

Moltiplicando per $y$ ed eliminando $y^3$ per mezzo della 3), s'ottiene

$$6\,H\,yy' = y - 3\,xy'$$

Moltiplicando per $y'$ l'equazione che s'ottiene derivando un'altra volta la penultima, e semplificando il prodotto per mezzo della stessa penultima, s'ottiene

$$y'' = 6\,yy'^3\,.$$

Eliminando $y$ dalla 3) per mezzo della penultima equazione, s'ottiene:

$$27\,(x^2 + 4\,H^3)\,y'^3 - 9\,H\,y' + 1 = 0\,.$$

(*) V. p. es. D. Besso: Sull'equazione del quinto grado. R. Acc. dei Lincei: 1883-84.

Moltiplicando questa per $2y$ e sostituendovi poi i valori dati dalle precedenti per $6\,\mathrm{H}\,y\,y'$ ed $y''$, si ottiene:

$$4)\qquad 9\,(x^2+4\,\mathrm{H}^3)\,y''+9\,x\,y'-y=0\,.$$

Questa è l'equazione differenziale, che è soddisfatta dalle radici della 3).

Pongasi ora

$$5)\qquad y=k_0+k_1\,x+k_2\,x^2+\dots$$

Determiniamo i coefficienti $k_n$ col metodo dei coefficienti indeterminati, e mediante la 4): i risultati a cui perverremo saranno valevoli, se per gli ottenuti valori convergerà assolutamente la serie $k_0+k_1\,x+k_2\,x^2+\dots$.

L'applicazione della 4) alla 5) dà:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}[36\,\mathrm{H}^3\,(n+2)\,(n+1)\,k_{n+2}+(9\,n^2-1)\,k_n]\,x^n=0$$

per cui deve essere

$$6)\qquad \frac{k_{n+2}}{k_n}=-\frac{9\,n^2-1}{36\,\mathrm{H}^3\,(n+1)\,(n+2)}$$

Da questa se è mod $4\,\mathrm{H}^3 \gtrless x^2$, si deduce

$$\lim_{n=\infty}\frac{k_n\,x^n}{k_{n+2}\,x^{n+2}}=-\frac{4\,\mathrm{H}^3}{x^2}$$

e se è mod $4\,\mathrm{H}^3=x^2$, si deduce

$$\lim_{n=\infty} n\left(\mathrm{mod}\,\frac{k_n\,x_n}{k_{n+2}\,x^{n+2}}-1\right)=3\,.$$

La penultima relazione mostra che la serie $k_0+k_1\,x+k_2\,x^2+\dots$ è assolutamente convergente se è mod $4\,\mathrm{H}^3>x^2$ ed è divergente se è mod $4\,\mathrm{H}^3<x^2$: l'ultima poi mostra che la serie è assolutamente convergente anche se è mod $4\,\mathrm{H}^3=x^2$. Lo sviluppo 5) è dunque certamente valevole se la 3) è nel *casus irreductibilis*.

I coefficienti $k_n$ debbono soddisfare alla 6), la quale dà

$$k_{2n+2}=\frac{(1-36)\,(1-36\,.\,4)\dots(1-36\,n^2)}{(2\,n+2)\,!}\cdot\frac{k_0}{(36\,\mathrm{H}^3)^{n+1}}$$

$$k_{2n+1}=\binom{3\,n}{n}\cdot\frac{(-1)^n\,k_1}{(2\,n+1)\,(27\,\mathrm{H}^3)^n}$$

e, per una nota proprietà dei coefficienti binomiali, che comunemente è data per numeri interi, ma è valevole per numeri qualsiansi (*), è ancora

(*) V. p. es. G. Novi: Analisi algebrica: Firenze 1863: pag. 145. R. Baltzer: Algebra tradotta da L. Cremona: Genova 1875: pag. 120.



$$k_{2n+2}=\frac{\binom{n+\frac{1}{6}}{2n+2}}{1-6\,(n+1)}\cdot\frac{k_0}{\mathrm{H}^{3n+3}}\,.$$

Inoltre la 3) dà immediatamente

$$k_0=(y)_{x=0}=-\sqrt{-3\,\mathrm{H}}\,,\,0\,,\sqrt{-3\,\mathrm{H}}$$

e la prima derivata della 3) dà:

$$k_1=(y')_{x=0}=\frac{1}{6\,\mathrm{H}}\,,\,-\frac{1}{3\,\mathrm{H}}\,,\,\frac{1}{6\,\mathrm{H}}\,.$$

Indicando con $y_1, y_2$ ed $y_3$ le radici della 3), se sia mod $4\,\mathrm{H}^3 \geqq x^2$, sarà quindi

$$7)\quad\left\{\begin{aligned} y_1&=-\sqrt{-3\,\mathrm{H}}\,.\left[1+\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\binom{n+\frac{1}{6}}{2\,n+2}}{1-6\,(n+1)}\left(\frac{x^2}{\mathrm{H}^3}\right)^{n+1}\right]-\frac{y_2}{2}\,.\\ y_2&=\frac{-x}{3\,\mathrm{H}}\left[1+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\binom{3\,n}{n}}{2\,n+1}\cdot\left(\frac{-x^2}{27\,\mathrm{H}^3}\right)^n\right].\\ y_3&=-y_1-y_2\,.\end{aligned}\right.$$

*Genova, Ottobre 1893.*

---

A. Garbasso

## La teoria di Maxwell dell'elettricità e della luce.

(Conferenze fatte all'Università di Torino).

Le idee più recenti sulla teoria dell'elettricità e del magnetismo, che tolgono origine dalle esperienze e dalle vedute teoriche di Faraday hanno già trovato parecchi espositori.

Senza parlare dei lavori originali di Maxwell (1) e di Helmholtz (2), fatti necessariamente senza preoccupazione didattica, nè dei trattati del

(1) J. C. Maxwell, *A treatise on electricity and magnetism* (Oxford, Clarendon Press, 1873, 2 vol.).

(2) H. Helmholtz, *Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper* (Borchardt's Journal, LXXII, 57. Wiss. Abh. I, 545).

Tumlirz [1] e del Poincaré [2], che il primo è plasmato sulla memoria d'Helmholtz « Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper », e il secondo cade in quello stesso peccato di molteplicità che è stato rimproverato tante volte alla grande opera del Maxwell: abbiamo tre esposizioni complete della teoria e sono quelle di Hertz [3], di Cohn [4] e di Boltzmann [5].

Vi è fra i lavori dei primi due e quello del terzo una differenza capitale.

Hertz e Cohn hanno assunto, per definizione, l'espressione dell'energia e le equazioni del campo elettro-magnetico, deducendone con definizioni e convenzioni opportune le altre leggi note; la legge di Coulomb, per esempio, la legge di Biot e Savart e così via.

Boltzmann invece si è tenuto più stretto al testo di Maxwell, movendo come ha fatto dalle equazioni di Lagrange e dalle proprietà dei policicli.

Ora mi sembra incontestabile che se le equazioni del campo, tanto più nella forma loro data da Hertz, sono di una grande semplicità e di una chiarezza grande per chi conosce già la teoria ed è abituato ad intendere il linguaggio particolare delle formole, esse non presentino gli stessi caratteri per un principiante: quindi pare che, quantunque la teoria nella forma datale da Cohn e particolarmente da Hertz costituisca un edifizio logico di grande bellezza, non sia punto conveniente di metterla così senz'altro nelle mani di chi cerca di formarsi per la prima volta un concetto delle idee del Maxwell.

Resta il procedimento seguito dal Boltzmann, ma anche per questo è necessaria nel discente una coltura matematica più che mediocre e una certa facoltà d'astrazione.

È vero che, abbandonando le equazioni di Lagrange si viene a trascurare quello che è parso ad alcuno *il nocciolo proprio* [6] della teoria del Maxwell, ma è permesso di dubitare della verità di questa

---

(1) O. Tumlirz, *Die elektromagnetische Theorie des Lichtes* (Leipzig, B. G. Teubner, 1883).

(2) H. Poincaré, *Electricité et optique* (Paris, G. Carré, 1890-91, 2 vol.).

(3) H. Hertz, *Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper* (Wied. Ann. XL, p. 577). — H. Hertz, *Ueber d. G. d. E. f. bewegte Körper* (Wied. Ann. XLI, p. 369).

(4) E. Cohn, *Zur Systematik der Elektricitätslehre* (Wied. Ann. XL, p. 625).

(5) L. Boltzmann, *Vorlesungen über Maxwells Theorie der Elektricität und des Lichtes* [I u. II Theil.] (Leipzig, J. A. Barth, 1891-93).

(6) H. Ebert, *Versuch einer Erweiterung der Maxwell'schen Theorie* (Wied. Ann. XLVIII, p. 1).



affermazione, anzi se si pensa che l'essenziale non può essere una questione di metodo ma di risultato, si è piuttosto inclinati ad accogliere quell'altra sentenza che « la teoria del Maxwell è il sistema delle equazioni di Maxwell » [1].

Un'altra ragione ancora mi ha consigliato ad abbandonare l'esposizione del Boltzmann: mi sembra che la teoria del Maxwell non presenti quel suo carattere di suggestività se non quando la si vede innestata sul tronco delle teorie classiche dell'elettricità; quando in una parola si presenta non come una innovazione, ma come un compimento.

È solo allora che, secondo la bella immagine di Hertz, essa appare come « una arcata gigantesca gettata attraverso l'ignoto per riunire due verità conosciute » [2].

In conseguenza mi sono proposto di dedurre le equazioni di Hertz dalle leggi fondamentali dell'elettricità e del magnetismo, e di far vedere come esse prevedano una perturbazione dotata di tutte quelle proprietà geometriche e meccaniche che spettano a quel moto che costituisce la luce.

In ciò che segue riassumo le quattro conferenze che ho tenuto su questo argomento all'Università di Torino, nella Scuola di Magistero diretta dal chiar.$^{mo}$ prof. Naccari.

## § 1.

Le leggi sperimentali dell'elettricità e del magnetismo, a cui dovremo ricorrere, sono le seguenti:

1) La legge di Coulomb secondo la quale la forza che s'esercita sopra un piccolo corpo elettrizzato vicinissimo ad un conduttore è proporzionale alla densità della carica sul conduttore medesimo,

2) La legge di Coulomb, per il caso delle attrazioni e repulsioni elettro-statiche:

$$f = \frac{ee'}{\varepsilon r^2}, \tag{1}$$

3) La legge di Coulomb, per il caso delle attrazioni e repulsioni magnetiche:

$$\varphi = \frac{mm'}{\mu r^2}, \tag{2}$$

---

(1) H. Hertz, *Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft*, I, 23 (Leipzig, J. A. Barth, 1892).

(2) H. Hertz, *Ueber die Beziehungen zwischen Licht und Elektricität*, p. 14 (Bonn, E. Strauss, 1889).

4) La legge di Biot e Savart:

[3] $$F = \frac{2Aim}{r}.$$

In queste equazioni le quantità $e$ ed $i$ sono date in misura elettrostatica, le quantità $m$ in misura elettro-magnetica.

$\varepsilon$ e $\mu$ sono due numeri che dipendono dalla natura del mezzo (per noi dielettrico, isotropo ed omogeneo) in cui si studiano i fenomeni.

Per convenzione $\varepsilon$ è uguale ad uno per quel mezzo in cui si suppone fatta la determinazione dell'unità elettro-statica di quantità di elettricità.

Parimenti $\mu$ è uguale ad uno per quel mezzo in cui si suppone fatta la determinazione dell'unità elettro-magnetica di quantità di magnetismo.

Per noi il mezzo in cui si verificano le condizioni

$$\varepsilon = \mu = 1$$

è il vuoto o, come si suol dire, l'etere libero.

Ad $\varepsilon$ si dà il nome di *costante dielettrica*, a $\mu$ quello di *costante magnetica*.

La quantità A è « il rapporto fra l'unità elettro-statica e l'unità elettro-magnetica di quantità di elettricità ».

La teoria indica che le dimensioni di A sono $L^{-1}T$, vale a dire che A è il reciproco di una velocità.

Quanto ai valori particolari di $\varepsilon$ e $\mu$ nei differenti mezzi e alla grandezza di A l'esperienza dimostra che:

*a*) Per i mezzi veramente dielettrici $\varepsilon$ è uguale al quadrato dell'indice di rifrazione per un raggio luminoso di lunghezza d'onda infinita.

*b*) Per la maggior parte dei mezzi trasparenti $\mu$ è sensibilmente uguale all'unità.

*c*) A è molto prossimamente uguale al reciproco della velocità della luce nel vuoto. Per quest'ultima velocità Cornu e Foucault hanno trovato rispettivamente $300{,}4 \,.\, 10^8 \frac{cm}{sec}$ e $298{,}2 \,.\, 10^8 \frac{cm}{sec}$, cioè in media

$$299\,,3\,.\,10^8 \frac{cm}{sec}$$

Del rapporto 1 : A citerò solo la determinazione più recente, quella di Abraham [1], che ha dato

[1] H. ABRAHAM, *Sur une nouvelle détermination du rapport* v *entre les unités* C.G.S *électromagnétiques et électrostatiques.* [Ann. de ch. et de phys. (6), XXVII, 433, 1892].



$$1 : A = 299\,,2\,.\,10^8 \frac{cm}{sec}$$

Se la luce si considera come un fenomeno di indole elastica i fatti indicati alle lettere *a*) e *c*) appaiono come concordanze casuali, inesplicabili: nella teoria elettro-magnetica della luce sono una conseguenza necessaria delle ipotesi fondamentali.

## § 2.

*Forza elettrica* (in misura elettro-statica) in un dato punto di un mezzo è la forza che si eserciterebbe in quel punto sopra un piccolo corpo recante l'unità elettro-statica di elettricità positiva.

Le sue dimensioni sono $M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$.

L'esperienza mostra che l'esistenza di una forza elettrica in un punto dello spazio implica l'esistenza di una forza elettrica in ogni punto circostante.

*Forza magnetica* (in misura elettro-magnetica) in un dato punto di un mezzo è la forza che si eserciterebbe in quel punto sopra un piccolo corpo recante l'unità elettro-magnetica di magnetismo nord.

Le sue dimensioni sono $M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$.

L'esperienza mostra che l'esistenza di una forza magnetica in un punto dello spazio implica l'esistenza di una forza magnetica in ogni punto circostante.

L'esperienza dimostra altresì che, in generale l'esistenza in un dato punto di una forza elettrica importa l'esistenza nello stesso punto di una forza magnetica.

*Campo elettro-magnetico* è uno spazio in ogni punto del quale esistono forze elettriche e magnetiche.

La teoria del Maxwell si propone di trovare le equazioni che legano la forza elettrica alla magnetica per un punto qualunque di un campo elettro-magnetico.

Indicherò sempre la forza elettrica con $E$, le sue componenti con X . Y . Z; similmente indicherò con $M$ la forza magnetica, con L . M . N le sue componenti.

## § 3.

Si sa, ed è una nozione che risale al Mossotti, che è possibile rendere conto del modo di comportarsi dei coibenti sottoposti alle azioni elettriche quando si considerino come costituiti da piccole masse conduttrici separate da tramezzi sottilissimi perfettamente isolanti.

In un coibente sottoposto a perturbazioni elettriche le particelle conduttrici di cui risulta sono tutte cariche, in ciascuna cioè si trovano due quantità uguali di elettricità positiva e negativa risultanti dalla decomposizione parziale del fluido neutro; si esprime questo dicendo che il dielettrico è *polarizzato.*

Da questo punto di vista i coibenti e i conduttori differiscono solo in ciò che, in questi ultimi anche i tramezzi sono di sostanza conduttrice: quindi la polarizzazione non può sussistere nell'interno, ma si ha una carica soltanto alla superficie.

È evidente che il comportamento di un coibente rimane lo stesso qualunque sia la legge con cui si immaginano condotti i tramezzi isolanti nella massa conduttrice: siccome nel seguito riferiremo il mezzo in cui studiamo i fenomeni a tre assi ortogonali $x \,.\, y \,.\, z$ (1), supporremo sempre, per semplicità di calcolo, che il dielettrico risulti di tante cellette infinitamente piccole, parallelepipede, con gli spigoli secondo gli assi coordinati.

Consideriamo la celletta di coordinate $x \,.\, y \,.\, z$, al tempo $t$ sopra una delle faccie normali all'asse $x$ vi sarà una quantità di elettricità positiva

$$f \, dy \, dz \,,$$

sull'altra una quantità d'elettricità negativa

$$-f \, dy \, dz \,,$$

$f$ è appunto ciò che si chiama la « *componente della polarizzazione dielettrica, secondo $x$ e per il tempo $t$, nel punto $x \,.\, y \,.\, z$* ».

Similmente si definiscono due grandezze $g$ ed $h$ relative agli assi $y$ e $z$.

Quanto alla relazione che fa dipendere la forza dalla polarizzazione in seno dielettrico segue da una osservazione fatta più su che deve essere quella stessa che lega la forza alla densità alla superficie del conduttore, vale a dire una relazione di proporzionalità.

Il coefficiente di proporzionalità poi basta determinarlo in un caso particolare, e noi scegliamo quello di una sfera conduttrice, isolata, lontana da ogni altro conduttore, immersa in un coibente la cui costante dielettrica è $\varepsilon$, avente raggio $r$ e una carica totale $e$.

In tale caso la densità, $\delta$ è determinata dalla condizione

$$4 \pi r^2 \delta = e \,, \tag{1}$$

e la forza è data da

(1) Gli assi sono diretti in modo tale che un osservatore coi piedi nell'origine e il capo sopra la parte positiva dell'asse $z$ abbia alla destra la parte positiva dell'asse $y$, quando guarda verso la parte positiva dell'asse $x$.



$$E = \frac{e}{\varepsilon r^2} \,, \tag{2}$$

eliminando $e$ fra [1] e [2] s'ottiene:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{4\pi} E \,. \tag{3}$$

Secondo quanto precede, tenendo conto della [3] bisognerà scrivere:

$$\left\{ \begin{aligned} f &= \frac{\varepsilon}{4\pi} X \,, \\ g &= \frac{\varepsilon}{4\pi} Y \,, \\ h &= \frac{\varepsilon}{4\pi} Z \,. \end{aligned} \right. \tag{4}$$

La somiglianza dei fenomeni del magnetismo con quelli dell'elettricità statica, somiglianza che ha la sua ragione nell'identità di forma della legge fondamentale, porta a definire, conformemente alle $f.g.h$ tre quantità $\alpha.\beta.\gamma$ come « *componenti della polarizzazione magnetica* ».

Di più si ammette che sia:

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{\mu}{4\pi} L \,, \\ \beta &= \frac{\mu}{4\pi} M \,, \\ \gamma &= \frac{\mu}{4\pi} N \,. \end{aligned} \right. \tag{5}$$

Le equazioni [4] e [5] si possono riguardare come rappresentanti la prima ipotesi della teoria del Maxwell.

## § 4.

Le quantità $f \,.\, g \,.\, h$ si debbono considerare come funzioni del tempo; producendosi delle nuove decomposizioni di fluido neutro nell'elemento $x \,.\, y \,.\, z$ le elettricità libere che ne risultano continueranno ad accumularsi sulle faccie, così p. e. la quantità $f \, dy \, dz$ di elettricità positiva che stava nell'istante $t$ su una delle faccie normali ad $x$, alla fine del tempo $t + dt$ sarà divenuta:

$$\left[ f + \frac{\partial f}{\partial t} dt \right] dy \, dz \,;$$

$\frac{\partial f}{\partial t}$ è dunque « la quantità di elettricità positiva che passa nell'unità di tempo attraverso a una sezione di area uno, normale nel punto $x.y.z$ all'asse delle $x$ ».

Significati analoghi hanno $\frac{\partial g}{\partial t}$ e $\frac{\partial h}{\partial t}$.

Porremo:

[1]
$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{\varepsilon}{4\pi}\dfrac{\partial X}{\partial t}, \\ v = \dfrac{\partial g}{\partial t} = \dfrac{\varepsilon}{4\pi}\dfrac{\partial Y}{\partial t}, \\ w = \dfrac{\partial h}{\partial t} = \dfrac{\varepsilon}{4\pi}\dfrac{\partial Z}{\partial t}, \end{cases}$$

e diremo che $u.v.w$ sono « *le componenti della corrente di polarizzazione dielettrica al tempo t nel punto x.y.z* ».

Le correnti la cui azione magnetica si rappresenta con la legge di Biot e Savart si intende che siano lineari cioè tali che le dimensioni trasversali dei conduttori che le trasmettono siano piccolissime rispetto alle altre lunghezze che si hanno a considerare nel fenomeno.

Quando non fosse così si potrebbe sempre intendere la sezione del conduttore divisa in elementi, quindi la corrente in altrettante correnti elementari: ad ognuna di queste la legge di Biot e Savart sarebbe applicabile.

Intesa la legge fondamentale dell'elettro-magnetismo in questo modo la seconda ipotesi della teoria di Maxwell si può enunciare così « ammettiamo che le correnti di polarizzazione dielettrica diano origine a forze magnetiche, rette dalla legge di Biot e Savart ».

In un piano sia tracciato un contorno chiuso e su esso si immagini che possa muoversi l'unità elettromagnetica di magnetismo nord; di più una corrente di intensità $i$ traversi normalmente il piano stesso: produrrà in ogni punto del contorno una forza magnetica.

Si faccia descrivere all'unità di magnetismo l'intero contorno, segue immediatamente dalla legge di Biot e Savart che:

« il lavoro compiuto in tale movimento dalla forza magnetica è nullo se la corrente taglia il piano fuori dell'area racchiusa dal contorno; è uguale a $4\pi Ai$ nel caso contrario purchè il moto segna nel senso stesso in cui la forza magnetica tenderebbe a spostare l'unità di magnetismo ».

Di più è evidente che:

« è sempre nullo il lavoro della forza magnetica dovuta a una corrente quando l'unità di magnetismo si muove in un modo qualunque in un piano che contiene la corrente ».

Ciò posto per il punto P $(x.y.z)$ del mezzo dielettrico si conducano tre assi $\xi\,\eta\,\zeta$ paralleli a quelli delle coordinate, nel piano $\xi\,\eta$ si descriva un rettangolo elementare ABCD con l'intersezione delle diagonali in



P, i lati secondo $\xi$ ed $\eta$, di lunghezze $dx$ e $dy$. Le lettere A.B.C.D sono distribuite in modo che si incontrano nell'ordine alfabetico seguendo il contorno secondo il senso in cui trasporterebbe su esso un polo magnetico nord una corrente diretta secondo le $\zeta$ positive; la direzione del lato AB è quella delle $\xi$ positive. In ogni punto del contorno ABCD esiste una forza magnetica dovuta alle correnti di polarizzazione e di conduzione (1) che sono nel campo: ora queste correnti sono di quattro specie:

$\alpha$) le correnti parallele al piano $\xi\,\eta$ ma fuori di esso;

$\beta$) le correnti che sono nel piano $\xi\,\eta$;

$\gamma$) le correnti normali al piano $\xi\,\eta$, che lo tagliano fuori del contorno ABCD;

$\delta$) la corrente (di polarizzazione) normale al piano $\xi\,\eta$ che passa entro ABCD.

Ne segue che la forza magnetica totale si può considerare come la risultante di quattro, il lavoro della risultante sarà la somma dei lavori delle componenti.

Ora il lavoro delle forze dovute alle correnti $\alpha$ e $\gamma$ è nullo per il primo dei teoremi ricordati dianzi; parimenti è nullo il lavoro della forza dovuta alle correnti $\beta$ per il terzo teorema; dunque: « facendo descrivere all'unità di magnetismo l'intero contorno ABCD il lavoro della forza magnetica totale risulta in definitiva uguale a quello che compirebbe da sola la forza dovuta alla corrente di polarizzazione che traversa l'elemento ABCD ».

Questa corrente ha l'intensità $w\,dx\,dy$, dunque (se si muove l'unità di magnetismo nel senso A.B.C.D) il lavoro della forza magnetica nell'intera rivoluzione è

$$4\pi A\, w\, dx\, dy.$$

Del medesimo lavoro possiamo dare un'espressione in funzione delle componenti della forza magnetica totale.

Lungo il tratto BC lavora la sola componente che è secondo $y$, di grandezza

$$M + \frac{\partial M}{\partial x}\frac{dx}{2},$$

il lavoro è dunque:

$$-\left(M + \frac{\partial M}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy$$

Similmente il lavoro lungo CD è:

(1) Escludiamo ora ed in seguito la presenza nel campo di calamite permanenti.

$$-\left(L-\frac{\partial L}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dx\,,$$

lungo DA:

$$\left(M-\frac{\partial M}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy\,,$$

lungo AB:

$$\left(L+\frac{\partial L}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dx\,,$$

e però il lavoro totale è:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}\right)dx\,dy\,.$$

Uguagliando questo valore del lavoro a quello trovato prima si ottiene:

$$4\pi A\,w=\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}\,.$$

Ma per le equazioni [1] § 4.

$$w=\frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial Z}{\partial t}\,,$$

dunque:

$$A\,\varepsilon\frac{\partial Z}{\partial t}=\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}\,.$$

Ripetendo le stesse considerazioni per elementi posti nei piani $\eta\,\zeta$ e $\zeta\,\xi$ si otterrebbero due equazioni analoghe: le diamo qui sotto, riscrivendo quella testè ottenuta:

[2]
$$\left\{\begin{aligned} A\,\varepsilon\frac{\partial X}{\partial t}&=\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y}\,,\\ A\,\varepsilon\frac{\partial Y}{\partial t}&=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial 2}\,;\\ A\,\varepsilon\frac{\partial Z}{\partial t}&=\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}\,.\end{aligned}\right.$$

## § 5.

Perchè in uno spazio preventivamente in quiete si producano delle polarizzazioni dielettriche e magnetiche è necessario che le forze elettriche e magnetiche, qualunque sia la loro origine, compiano un certo lavoro, all'elemento di questo lavoro corrisponderà un incremento (1) infinitamente piccolo dell'energia potenziale del campo.

(1) Un vero incremento (positivo) trattandosi di forze esterne.



Consideriamo dapprima il caso delle forze elettriche; su una delle faccie dell'elemento $x\,.\,y\,.\,z$ normali all'asse $x$ starà una quantità d'elettricità positiva $f\,dy\,dz$: una deformazione elementare del sistema corrisponde ad un incremento $d\,(f\,dy\,dz)$ di tale quantità.

Quindi il lavoro per ciò che riguarda X è misurato da

$$X\,d\,(f\,dy\,dz)=X\,dx\,dy\,dz\,d\,f=X\,d\,f\,dv.$$

Un calcolo analogo ripetuto per Y e Z ci porterebbe a conchiudere che le forze per quanto riguarda $dv$ compiono un lavoro

$$(X\,d\,f+Y\,d\,g+Z\,d\,h)\,dv\,;$$

il lavoro compiuto nell'intero campo è dunque:

$$\iiint(X\,d\,f+Y\,d\,g+Z\,d\,h)\,dv\,.$$

Ora, per le equazioni della polarizzazione dielettrica:

$$d\,f=\frac{\varepsilon}{4\pi}\,d\,X$$

$$d\,g=\frac{\varepsilon}{4\pi}\,d\,Y$$

$$d\,h=\frac{\varepsilon}{4\pi}\,d\,Z$$

dunque il lavoro diventa

$$\frac{\varepsilon}{8\pi}\,d\iiint(X^2+Y^2+Z^2)\,dv\,;$$

e se si indica con $W_e$ l'*energia elettrica* che il campo possiede si dovrà scrivere:

$$d\,W_e=\frac{\varepsilon}{8\pi}\,d\iiint(X^2+Y^2\,Z^2)\,dv\,;$$

o, integrando e osservando che $W_e$ è nulla da principio:

$$W_e=\frac{\varepsilon}{8\pi}\iiint(X^2+Y^2+Z^2)\,dv\,.$$

In modo affatto identico si troverebbe che l'*energia magnetica*, $W_m$, che il sistema possiede è data da:

$$W_m=\frac{\mu}{8\pi}\iiint(L^2+M^2+N^2)\,dv\,.$$

Un campo elettromagnetico contiene dunque una quantità d'*energia elettromagnetica:*

[1] $$W_{em}=W_e+W_m=\frac{\varepsilon}{8\pi}\iiint \boldsymbol{E}^2dv+\frac{\mu}{8\pi}\iiint \boldsymbol{M}^2dv\,.$$

La terza ipotesi della teoria del Maxwell consiste nell'ammettere che « l'energia elettromagnetica di un campo racchiuso da una superficie sulla quale le forze elettriche e magnetiche sono costantemente nulle è costante », cioè che in tale ipotesi

$$\frac{\partial}{\partial t} W_{em} = 0 .$$

In causa della [1] si dovrà scrivere:

$$\frac{1}{4\pi}\iiint\left[\varepsilon\left(X\frac{\partial X}{\partial t}+Y\frac{\partial Y}{\partial t}+Z\frac{\partial Z}{\partial t}\right)+\mu\left(L\frac{\partial L}{\partial t}+M\frac{\partial M}{\partial t}+N\frac{\partial N}{\partial t}\right)\right]dv=0.$$

Per mezzo delle [2] § 4 si possono eliminare $\frac{\partial X}{\partial t} \cdot \frac{\partial Y}{\partial t} \cdot \frac{\partial Z}{\partial t}$, e si ottiene:

$$\frac{1}{4\pi}\iiint\left\{\frac{1}{A}\left[X\left(\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y}\right)+Y\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial z}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+Z\left(\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}\right)\right]+\mu\left(L\frac{\partial L}{\partial t}+M\frac{\partial M}{\partial t}+N\frac{\partial N}{\partial t}\right)\right\}dv=0 .$$

Nella ipotesi enunciata innanzi questa equazione è equivalente all'altra:

$$\frac{1}{4\pi}\iiint\left[\frac{1}{A}\left(N\frac{\partial X}{\partial y}-M\frac{\partial X}{\partial z}+L\frac{\partial Y}{\partial z}-N\frac{\partial Y}{\partial x}\right.\right.$$
$$\left.\left.+M\frac{\partial Z}{\partial x}-L\frac{\partial Z}{\partial y}\right)+\mu\left(L\frac{\partial L}{\partial t}+M\frac{\partial M}{\partial t}+N\frac{\partial N}{\partial t}\right)\right]dv=0$$

ossia:

$$\frac{1}{4\pi A}\iiint\left[L\left(A\mu\frac{\partial L}{\partial t}-\frac{\partial Z}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial z}\right)+M\left(A\mu\frac{\partial M}{\partial t}-\frac{\partial X}{\partial z}+\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\right.$$
$$\left.+N\left(A\mu\frac{\partial N}{\partial t}-\frac{\partial Y}{dx}+\frac{\partial X}{dy}\right)\right]dv=0 .$$

L'equazione si verifica se si ammette che sia:

$$[2]\qquad\left\{\begin{aligned}A\mu\frac{\partial L}{\partial t}&=\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z},\\ A\mu\frac{\partial M}{\partial t}&=\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x},\\ A\mu\frac{\partial N}{\partial t}&=\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y};\end{aligned}\right.$$

e noi supporremo che sia così.

Le equazioni [2] § 4 e le [2] § 5 sono dovute ad Hertz (1).

(1) H. Hertz. Ueber die Beziehungen zwischen den Maxwellschen electrodynamischen Grundgleichungen und den Grundgleichungen der gegnerischen Elektrodynamik. (Wied. Ann. XXIII, p. 84).



## § 6.

Esiste per l'energia di un campo elettromagnetico un'equazione analoga a quelle che vanno sotto il nome di principio di Hamilton e principio della minima azione nella dinamica ordinaria: si può dimostrare cioè la relazione

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} W_{em}\,dt = 0 ,$$

quando si suppongano nulle le variazioni ai limiti.

Per vedere questo si scriva:

$$[1]\qquad\begin{aligned}x_1&=A\varepsilon\frac{\partial X}{\partial t}-\frac{\partial M}{\partial z}+\frac{\partial N}{\partial y} & l_1&=A\mu\frac{\partial L}{\partial t}-\frac{\partial Z}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial z}\\ x_2&=A\varepsilon\frac{\partial Y}{\partial t}-\frac{\partial N}{\partial x}+\frac{\partial L}{\partial z} & l_2&=A\mu\frac{\partial M}{\partial t}-\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial x}\\ x_3&=A\varepsilon\frac{\partial Z}{\partial t}-\frac{\partial L}{\partial y}+\frac{\partial M}{\partial x} & l_3&=A\mu\frac{\partial N}{\partial t}-\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial X}{\partial x}\end{aligned}$$

sarà, per le equazioni di Hertz:

$$x_1 = x_2 = x_3 = l_1 = l_2 = l_3 = 0 ;$$

di più si introducano sei funzioni $X . Y . Z . L . M . N$ delle coordinate e del tempo, che ci riserviamo di determinare.

Facciamo le variazioni di queste funzioni: moltiplichiamo la prima delle [1] per $\delta X$, la seconda per $\delta Y$..... la sesta per $\delta N$; sommiamo membro a membro, moltiplichiamo per $dt$ e integriamo fra $t_0$ e $t_1$, otterremo:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt\iiint dv\left[A\varepsilon\frac{\partial X}{\partial t}\delta X+A\varepsilon\frac{\partial Y}{\partial t}\delta Y+\ldots+A\mu\frac{\partial N}{\partial t}\delta N\right.$$
$$-\frac{\partial M}{\partial z}\delta X-\frac{\partial N}{\partial x}\delta Y-\;.\;.\;.\;.\;.\;-\frac{\partial Y}{\partial x}\delta N$$
$$\left.+\frac{\partial N}{\partial y}\delta X+\frac{\partial L}{dz}\delta Y+\;.\;.\;.\;.\;.\;+\frac{\partial X}{\partial y}\delta N\right]=0 .$$

Ora è evidente che si può scrivere:

$$A\varepsilon \frac{\partial X}{\partial t}\delta X = A\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(X\delta X) - A\varepsilon X \frac{\partial}{\partial t}(\delta X)$$

e che 5 eguaglianze analoghe si potrebbero formare considerando i termini in $\frac{\partial Y}{\partial t} \dots \frac{\partial N}{\partial t}$, si ha dunque:

$$\begin{aligned}&\Big[\iiint dv\,(A\varepsilon X\delta X + A\varepsilon Y\delta Y + \dots + A\mu N\delta N)\Big]_{t_0}^{t_1}\\ &-\int_{t_0}^{t_1} dt \iiint dv \Big[A\varepsilon X\delta\,.\,\frac{\partial X}{\partial t} + A\varepsilon Y\delta\,.\,\frac{\partial Y}{\partial t} + \dots + A\mu N\delta\,.\,\frac{\partial Z}{\partial t}\\ &\qquad +\frac{\partial M}{\partial z}\delta X + \frac{\partial N}{\partial x}\delta Y + \dots \dots + \frac{\partial Y}{\partial x}\delta N\\ &\qquad -\frac{\partial N}{\partial y}\delta X - \frac{\partial L}{\partial z}\delta Y - \dots \dots - \frac{\partial X}{\partial y}\delta N\Big] = 0.\end{aligned}$$

Ora si osservi, in modo simile a quanto si è fatto più su, che:

$$\frac{\partial M}{\partial z}\delta X = -M\delta\,.\,\frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}(M\delta X)$$

11 equazioni analoghe si potrebbero scrivere, sicchè, sostituendo, si ottiene:

$$\begin{aligned}&\Big[\iiint dv\,(A\varepsilon X\delta X + A\varepsilon Y\delta Y + \dots + A\mu N\delta N)\Big]_{t_0}^{t_1}\\ &-\int_{t_0}^{t_1} dt \iiint dv \Big[A\varepsilon X\delta\,.\,\frac{\partial X}{\partial t} + A\varepsilon Y\delta\,.\,\frac{\partial Y}{\partial t} + \dots + A\mu N\delta\,.\,\frac{\partial Z}{\partial t}\\ &\qquad -M\delta\,.\,\frac{\partial X}{\partial z} - N\delta\,.\,\frac{\partial Y}{\partial x} - \dots - Y\delta\,.\,\frac{\partial N}{\partial x}\\ &\qquad +\frac{\partial}{\partial z}(M\delta X) + \frac{\partial}{\partial x}(N\delta Y) + \dots + \frac{\partial}{\partial x}(Y\delta N)\\ &\qquad +N\delta\,.\,\frac{\partial X}{\partial y} + L\delta\,.\,\frac{\partial Y}{\partial z} + \dots + X\delta\,.\,\frac{\partial N}{\partial y}\\ &\qquad -\frac{\partial}{\partial y}(N\delta X) - \frac{\partial}{\partial z}(L\delta Y) - \dots - \frac{\partial}{\partial y}(X\delta N)\Big] = 0.\end{aligned}$$

Se si ammette che $X\,.\,Y \dots N$ siano nulle sulla superficie che racchiude il campo si possono cancellare i 12 termini dell'integrale che sono derivate parziali rispetto alle coordinate.



Ordinando ciò che resta rispetto ad $X\,.\,Y \dots N$ si trova:

$$\begin{aligned}&\Big[\iiint dv\,(A\varepsilon X\delta X + A\varepsilon Y\delta Y + \dots + A\mu Z\delta Z)\Big]_{t_0}^{t_1}\\ &-\int_{t_0}^{t_1} dt \iiint dv \Big[X\delta\,.\,\Big(A\varepsilon\frac{\partial X}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial z} + \frac{\partial N}{\partial y}\Big)\\ (*)\qquad &\qquad + Y\delta\,.\,\Big(A\varepsilon\frac{\partial Y}{\partial t} - \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial z}\Big)\\ &\qquad + \dots\dots\\ &\qquad + N\delta\,.\,\Big(A\mu\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y}\Big)\Big] = 0.\end{aligned}$$

Le $X\,.\,Y \dots N$ sono ancora in nostro arbitrio, le assoggetteremo alle equazioni seguenti

$$\begin{aligned}A\varepsilon\frac{\partial X}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial z} + \frac{\partial N}{\partial y} &= -\frac{\varepsilon}{4\pi}X\\ A\varepsilon\frac{\partial Y}{\partial t} - \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial z} &= -\frac{\varepsilon}{4\pi}Y\\ \dots\dots\dots\\ A\mu\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} &= -\frac{\mu}{4\pi}Z.\end{aligned}$$

Ciò posto l'equazione (*) diventa:

$$\begin{aligned}&\Big[\iiint dv\,(A\varepsilon X\delta X + A\varepsilon Y\delta Y + \dots + A\mu Z\delta Z)\Big]_{t_0}^{t_1}\\ &+\delta\int_{t_0}^{t_1} dt \iiint dv \Big[\frac{\varepsilon}{8\pi}(X^2+Y^2+Z^2) + \frac{\mu}{8\pi}(L^2+M^2+N^2)\Big] = 0;\end{aligned}$$

se le variazioni ai limiti sono nulle la parte integrata rispetto al tempo si annulla da sè, quindi bisogna che sia

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} dt \iiint dv\Big[\frac{\varepsilon}{8\pi}(X^2+Y^2+Z^2) + \frac{\mu}{8\pi}(L^2+M^2+N^2)\Big] = 0$$

vale a dire

$$\delta\int_{t_1}^{t_0} W_{em}\,dt = 0,$$

cio che si voleva dimostrare.

Questo teorema si deve al prof. Vito Volterra [1].

---

[1] VITO VOLTERRA. Sopra le equazioni fondamentali della elettrodinamica. [Nuovo Cimento. (3). XXIX. 147].

## § 7.

Dalle equazioni d'Hertz:

$$A\,\varepsilon \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} \qquad\qquad A\,\mu \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \qquad\qquad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

si deducono subito due conseguenze importanti:

*a)* in primo luogo poichè le X . Y . Z . L . M . N hanno tutte le stesse dimensioni, l'omogeneità dei due membri esige che A sia il reciproco di una velocità, dunque « il rapporto fra l'unità elettromagnetica e l'unità elettrostatica di quantità d'elettricità è una velocità », come s'era annunziato;

*b)* di più le equazioni essendo lineari ed omogenee le perturbazioni che esse prevedono sono « capaci di interferire », appunto come succede delle perturbazioni che costituiscono la luce.

I due sistemi si corrispondono esattamente in tutto salvochè nei segni dei secondi membri; è facile vedere che questa differenza nei segni risponde a qualche cosa di reale.

Si immagini un sostegno circolare ed uno rettilineo, normale al piano del primo nel centro; sul sostegno rettilineo si possa muovere un corpo *e* carico d'elettricità positiva, sul circolare un polo magnetico nord, *m*. Se *e* si trasporta sul suo sostegno in un certo senso, *m* si muoverà a sua volta in un verso che è dato della legge d'Ampère.

Si supponga adesso che il corpo elettrizzato positivo *e*, sia sul cerchio, il polo magnetico nord, *m*, sulla retta; si sposti *m* nel senso in cui prima si era mosso *e*, la legge di Ampère combinata con quella di Lenz ci dice che *e* percorrerà il cerchio nel verso opposto a quello in cui andava *m* nella prima esperienza.

Le correnti di polarizzazione dielettrica sono definite dalle relazioni

$$u = \frac{\partial f}{\partial t} \qquad v = \frac{\partial g}{\partial t} \qquad w = \frac{\partial h}{\partial t},$$

similmente si possono definire, come *correnti di polarizzazione magnetica* tre quantità $\varphi . \chi . \psi$ per mezzo delle uguaglianze:

$$\varphi = \frac{\partial \alpha}{\partial t} \qquad \chi = \frac{\partial \beta}{\partial t} \qquad \psi = \frac{\partial \gamma}{\partial t}.$$

Date queste notazioni le equazioni d'Hertz si possono scrivere:



$$4\pi A u = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} \qquad\qquad 4\pi A \varphi = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}$$

$$4\pi A v = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} \qquad\qquad 4\pi A \chi = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}$$

$$4\pi A w = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} \qquad\qquad 4\pi A \psi = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y},$$

allora, ricordando un teorema ben noto di Stokes, si enunciano a parole nel modo seguente:

« Se in un campo elettromagnetico si conduce una superficie S finita e continua, interamente limitata da una curva *s*, in ogni istante:

*a)* l'integrale della corrente di spostamento dielettrico preso su S e moltiplicato per $4\pi A$ è uguale all'integrale della forza magnetica lungo *s*;

*b)* l'integrale della corrente di spostamento magnetico preso su S e moltiplicato per $4\pi A$ è uguale all'integrale della forza elettrica lungo *s* ».

## § 8.

Dalle equazioni d'Hertz si deducono immediatamente le due

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}\right) = 0,$$

se ad un dato istante X . Y ... N sono nulle in ogni punto del campo si avrà sempre:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0;$$

tali equazioni sono dette di *trasversalità*, vedremo il perchè di questa denominazione.

## § 9.

Le perturbazioni che costituiscono la luce sono certamente di carattere periodico, è quindi interessante di studiare le proprietà delle perturbazioni periodiche che soddisfano alle equazioni della teoria del Maxwell.

Si ponga:

$$\sigma = \pi_1 x + \pi_2 y + \pi_3 z .$$

$$\omega = \sigma - \frac{t}{A\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

e si faccia inoltre:

$$[*] \qquad \begin{aligned} X &= e_1\sqrt{\mu}\sin\omega, & L &= m_1\sqrt{\varepsilon}\sin\omega, \\ Y &= e_2\sqrt{\mu}\sin\omega, & M &= m_2\sqrt{\varepsilon}\sin\omega, \\ Z &= e_3\sqrt{\mu}\sin\omega, & N &= m_3\sqrt{\varepsilon}\sin\omega, \end{aligned}$$

Le quantità $\pi_1 . \pi_2 . \pi_3$ sono i tre coseni di direzione di una medesima retta *(direzione di propagazione)*, $e_1 . e_2 . e_3$ sono i coseni della forza elettrica, $m_1 . m_2 . m_3$ i coseni della forza magnetica; noi consideriamo i nove coseni $\pi_1 . \pi_2 . \pi_3 . e_1 . e_2 . e_3 . m_1 . m_2 . m_3$ come costanti.

Si sostituiscano i valori (*) nelle equazioni di trasversalità e in quelle d'Hertz: le prime danno

$$(**) \qquad \begin{aligned} e_1\pi_1 + e_2\pi_2 + e_3\pi_3 &= 0 \\ m_1\pi_1 + m_2\pi_2 + m_3\pi_3 &= 0, \end{aligned}$$

cioè « la forza elettrica e la forza magnetica sono normali alla direzione di propagazione ».

Quanto alle equazioni d'Hertz esse pongono fra le $\pi_1 . \pi_2 . \pi_3 . e_1 . e_2 . e_3 . m_1 . m_2 . m_3$ sei relazioni che, date le (**), sono soddisfatte identicamente quando sia ancora

$$e_1 m_1 + e_2 m_2 + e_3 m_3 = 0$$

dunque « la forza elettrica è perpendicolare alla forza magnetica ».

Per un dato valore del tempo hanno una medesima condizione elettromagnetica i punti per cui

$$\sigma = \text{costante},$$



si ha dunque « un sistema d'onde piane normali alla direzione di propagazione ».

Dipendentemente dal tempo si trovano in uguali condizioni i punti per cui

$$\omega = \sigma - \frac{t}{A\sqrt{\varepsilon\mu}} = \text{costante},$$

derivando rispetto a $t$ s'ottiene:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{A\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

cioè « le cose succedono come se le onde piane elettromagnetiche si propagassero secondo la direzione di propagazione, con velocità uniforme $\frac{1}{A\sqrt{\varepsilon\mu}}$ ».

La velocità $V_0$ delle onde elettromagnetiche nel vuoto s'ottiene ponendo $\varepsilon = \mu = 1$, dunque

$$V_0 = \frac{1}{A}$$

è però « la velocità delle onde elettromagnetiche nel vuoto è quella stessa della luce ».

Per un altro mezzo si ha sensibilmente

$$V = \frac{1}{A\sqrt{\varepsilon}},$$

si può definire come indice di rifrazione, N, dei raggi elettromagnetici per un dato mezzo il rapporto

$$\frac{V_0}{V} = \frac{\frac{1}{A}}{\frac{1}{A\sqrt{\varepsilon}}} = \sqrt{\varepsilon},$$

allora

$$N^2 = \varepsilon$$

cioè « la velocità nelle onde elettromagnetiche è in ogni mezzo quella stessa della luce ».

Si potrebbe continuare questo studio e il risultato sarebbe che « la perturbazione elettromagnetica definita dalle uguaglianze (*) ha tutte le proprietà di un raggio di luce polarizzata rettilinea ».

## § 10.

Dal riconoscere questo fatto all'ammettere che *la luce è un fenomeno elettromagnetico* non v'è che un passo, ma per avere il diritto di farlo bisogna prima dare delle ipotesi e delle conseguenze principali della teoria una verifica sperimentale; è ciò che è stato fatto in questi ultimi tempi, per opera specialmente di Enrico Herz.

La più importante ipotesi della teoria è quella che consiste nell'ammettere l'esistenza delle correnti di polarizzazione dielettrica e nel supporre la loro azione elettrodinamica uguale a quella delle correnti che si producono per conduzione nei conduttori: Hertz ha provato che l'una e l'altra cosa è vera.

La teoria conduce a conchiudere che « masse d'elettricità in moto esercitano forze magnetiche », e Rowland ha mostrato che un disco elettrizzato in rapido movimento ha un'azione sull'ago magnetico.

William Thomson aveva indicato fino dal 1853 la possibilità di ottenere in conduttori di forma conveniente delle correnti sinussoidali: ma una corrente sinussoidale deve dare origine in ogni punto dello spazio ad una forza magnetica e quindi ad una forza elettrica pure sinussoidale: reciprocamente l'esistenza in un punto dello spazio d'una forza elettrica periodica produrrà in ogni circuito in presenza una corrente periodica.

L'azione del primo circuito sul secondo, giusta le idee di Maxwell, non sarà istantanea, ma si propagherà « come un raggio di luce ».

Hertz ha provato che è veramente così; egli ha ottenuto dei *raggi di forza elettrica* polarizzati in un piano capaci di riflettersi e rifrangersi appunto come i raggi delle vibrazioni luminose, egli ha trovato che la riflessione segue secondo la legge d'Euclide, la rifrazione secondo la legge di Des Cartes; ha misurato l'indice di rifrazione con un prisma d'asfalto: era prossimamente quello che la teoria richiedeva.

Hertz poteva conchiudere a buon diritto che egli aveva sperimentato sopra un raggio di luce di grande lunghezza d'onda (66 cm.).

Blondlot ripetendo le esperienze d'Hertz ha dimostrato che la velocità delle onde elettromagnetiche nell'aria « è quella della luce », come vuole la teoria (1).

(1) BLONDLOT ha misurato veramente la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche trasmesse da un filo conduttore, ma fu dimostrato da SARASIN e DE LA RIVE che quella velocità è la stessa che la velocità delle onde nell'aria.



Così il ponte che riunisce il dominio dell'elettricità a quello dell'ottica è valicato, il cammino ridiventa facile.

Le vedute di Maxwell vengono a gettare una luce inaspettata sul problema della costituzione della materia.

Un circuito suscettibile di corrente oscillante possiede un periodo di vibrazione che dipende dalla sua forma e dalla sua grandezza: dà quindi luogo ad onde di lunghezza determinata.

Sappiamo che i gas incandescenti danno uno spettro di poche linee brillanti, dunque è ragionevole ammettere che le loro molecole agiscono « come circuiti elettrici adatti alle onde luminose ».

Calcolando in base a questa ipotesi le dimensioni delle molecole si trovano dei numeri dell'ordine di quelli trovati per vie affatto differenti.

L'esperienza prova che uno strato di circuiti o, come si dice, di *risonatori*, riflette le onde elettromagnetiche: questo fatto dà ragione del meccanismo della riflessione della luce e costituisce ad un tempo una verifica diretta del principio di Huyghens.

L'esperienza dimostra che uno strato di risonatori assorbe le onde che è capace d'emettere e ciò costituisce una prova della legge di Kirchhoff e mostra come si formino gli spettri d'assorbimento.

L'esperienza attesta che se due risonatori sono tenuti vicini la corrente oscillante è smorzata in entrambi: ma correnti smorzate, secondo le ricerche di Sarasin e de la Rive danno origine a radiazione multipla: questo spiega perchè gli spettri dei liquidi e dei solidi siano continui.

Da questo punto di vista anche l'occhio è un apparato elettrico, i tre sistemi di fibre d'Helmholtz sono tre sistemi di risonatori.

Nelle sue prime esperienze il BLONDLOT calcolava il periodo di vibrazione dei risonatori con una formola di THOMSON, vi era dunque ancora nella sua ricerca un presupposto teorico.

In una nuova serie di esperienze non ancora pubblicate ma delle quali il prof. BLONDLOT mi ha cortesemente informato, egli ha rifatto la misura con un metodo indipendente da ogni teoria; il risultato ottenuto è soddisfacente, la media dei numeri trovati per la velocità delle onde lungo un filo di rame è

$$303,0 \,.\, 10^{8}\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}}\,.$$

## Sugli insegnamenti di matematica superiore nelle Università italiane

*di* E. Pascal *a Pavia.*

Quistioni sul genere di quelle che io imprendo ora a trattare, non sono affatto nuove in questi tempi in Italia; solo che generalmente la cosiddetta quistione universitaria viene trattata e considerata da un punto di vista assai più ampio. Io qui mi propongo uno scopo più modesto; io voglio trattare solo degli insegnamenti di matematica.

Sembrerà in ogni modo grande ardimento il mio, l'intraprendere una discussione nella quale io non posso avere nessuna autorità, e uomini consumati nella vita degli studii e dell'insegnamento la potrebbero trattare con una competenza di gran lunga maggiore; ma mi conforta il pensiero che le idee che io qui sosterrò sono accettate più o meno da una gran parte dei miei colleghi.

Certo non mancheranno dei lettori che, abituati per lunga serie di anni a veder le cose sempre stabilite in una certa maniera, hanno acquistato il pregiudizio di considerare come essenziali nella natura degli studii certi ordinamenti e certe disposizioni, di cui invece potrebbe farsi a meno.

In tutte le cose è così: non sempre abbiamo avuto l'occasione di pensare su certi argomenti, e siamo sempre stati inclinati ad accettare senza discutere quello che abbiamo trovato; e appena sentiamo dire qualcosa che si scosti dall'ordinario, la prima idea che ci viene è di ripulsa; ma molte volte poi succede, e ciascuno lo avrà provato per conto proprio, che, pensandoci meglio, ci accorgiamo che la ripulsa dipende più da pregiudizii che abbiamo inconscientemente acquistati e accettati sulla natura di quell'oggetto, che non da un profondo esame o da una minuta critica che abbiamo forse altre volte avuto occasione di fare su di esso.

***

Lascio da parte l'ordinamento degli studii matematici nei primi due anni di corso universitario. In questi due anni, il corso è fatto in comune da giovani che vorranno poi percorrere la carriera della scienza pura, e da quelli che vorranno poi diventare ingegneri.



Io voglio occuparmi solo dei primi. Essi, prima di tutto, son pochi; ed è bene che sia così. Il paese ha bisogno di molti ingegneri, ma non ha bisogno di molti matematici. Sino a pochi anni fa, il numero dei giovani che si davano alla matematica pura in Italia e in Germania era cresciuto notevolmente; io non voglio spiegare per qual ragione avvenne questo fenomeno, ma il fatto è certo, e le statistiche lo provano.

Vi fu una produzione di laureati in matematica, superiore al bisogno. In Germania dei giovani dovettero andare a trovar posto in America; in Italia ad ogni concorso per scuole secondarie si presenta un centinaio di giovani quasi tutti mediocri, ma tutti laureati.

Per parte mia, l'ho già detto, credo che in tempi normali, in un ben armonizzato equilibrio delle forze intellettuali del paese, il numero dei cultori di scienze astratte deve esser piccolo.

Quando questo numero cresce è segno che la società non è nello stato normale, è sintomo che la società è in un modo o in un altro travagliata da mali; negli anni che seguono a grandi calamità pubbliche, o in tempi di grandi e prolungate crisi economiche, il numero dei cultori e appassionati di scienze astratte cresce rapidamente.

Io parlo naturalmente della gran massa dei mediocri, e non di quei pochissimi che eccellono. Questi son sempre in un numero tale che non dipende affatto nè dalla molteplicità delle scuole, nè dalle condizioni della società. Per eccellere in quelle discipline così astratte, occorrono tante e così squisite qualità di intelletto che non si possono costruire se già non ci sono.

Io parlo dunque di quelli dei quali può dirsi solo che sono laureati in matematica e null'altro, ed essi debbono essere solo tanti per quanti il paese ne richiede.

Aumentarne il numero è come distrarre tanti giovani da professioni in cui avrebbero potuto rendersi più utili alla società per condurli ad oziare in campi in cui mai nulla di utile produrranno.

Quindi p. es. è stato un male l'accrescimento di tante nuove facoltà matematiche; perchè esse a nulla serviranno se si tratterà di produrre un altro vero matematico dippiù; sono invece una lusinga e un incentivo potente per creare tanti nuovi laureati dippiù.

Lusinga pei giovani cui si offre un'occasione più facile per darsi a studii elevati ai quali li spinge, per natura, fallace vaghezza di novità e di astrazioni, e che credono che in ogni modo ci sarà sempre tempo per passar poi a studii più pratici, senza sapere che quando nei lunghi anni giovanili il loro cervello si è adattato a pensare in un modo, non sempre sarà poi agevole ridargli quella elasticità che ha perduta.

Ed infine, bisogna pur dirlo, lusinga da parte dei professori, che essendo lì, credono naturalmente loro nobile dovere il far degli scolari.

***

Presentemente nel secondo biennio di matematica, oltre l'insegnamento di meccanica razionale che lo considererei piuttosto come un complemento degli insegnamenti del 1° biennio, si impartiscono in generale i seguenti altri insegnamenti.

1° Geometria superiore; 2° Meccanica superiore; 3° Astronomia; 4° Analisi superiore; 5° Geodesia; 6° Fisica matematica.

Ora io non mi oppongo a chi voglia sostenermi semplicemente che in *alcune* delle grandi Università italiane questi insegnamenti ci stanno bene, ed è bene mantenerli.

Ma quello di cui mi lamento è questo, che si sia svisato il concetto vero per correr dietro ad un concetto falso e artificiale; che si sia creduto che non possa esistere una facoltà matematica senza che l'insegnamento sia suddiviso in quella speciale maniera e con quelle proporzioni.

In altri termini si immagina oggidì la formazione di una facoltà di studii superiori, pressochè come la formazione di un Ginnasio, che per fondarsi ha bisogno necessariamente dell'insegnante di lingua latina, di quello di lingua italiana, di quello di storia e così via discorrendo; quando il legislatore vuole stabilire una scuola secondaria, egli prima stabilisce gli insegnamenti che vi si debbono dare, e poi nomina gli insegnanti.

Ora non è da questo medesimo punto di vista che bisogna considerare un ordinamento di studii superiori; io per questi farei precisamente il cammino inverso; cioè prima nominerei gli insegnanti scegliendoli fra i sommi del paese, e poi domanderei loro quali corsi vogliano sviluppare.

Questo che dico per gli studii di matematica superiore, potrebbe ripetersi per tanti altri degli insegnamenti universitarii, e propriamente per tutti quelli insegnamenti di carattere speciale; così p. es. intendo che in una facoltà di lettere non possa mancare il professore di lingua latina; ma non intendo affatto che, non essendoci in vista un gran geografo o un grande archeologo si voglia fabbricare alla meglio un professore di geografia o di archeologia solo per parere di non mancarne; e così comprendo che in una facoltà medica sia indispensabile l'insegnante di anatomia, ma non capirei affatto che una tal facoltà si ostinasse a chiedere la nomina di un professore di istologia quando non vi fosse un istologo di gran merito che potesse aspirare a quel posto.



Insomma io sostengo che per insegnamenti speciali ed elevati, bisogna creare i posti per gli uomini e non gli uomini per i posti, altrimenti si fa servire la scienza a fini, cui essa non era destinata.

A partecipare però ad idee così larghe, certamente si oppongono molti interessi e di varia natura. Prima di tutto quell'amore di simmetria, da cui sembrano in ispecial modo dominati gli italiani, cosicchè se un ordinamento è fatto in una certa maniera in un luogo, pare che in altro luogo non possa farsi che nella stessa maniera.

Quando a Pisa si fondò e fiorì la scuola normale, ai professori delle Università italiane parve strano che a Pisa fosse una cosa che non vi era altrove; e non si dettero pace fino a quando ciascuna Università non ebbe la sua brava scuola normale o di magistero tutte tagliate sullo stesso modello.

Commisto a questo sentimento di simmetria, che dipenderà forse dalla conformazione speciale del cervello italiano, c'e n'è un altro che dipende da altra ragione, ed è quell'egoismo regionale, da cui par tanto difficile liberarsi.

Si ragiona così: nella tale Università c'è quel tale insegnamento; dunque perchè non deve esserci anche nella nostra Università? ragionamento che non sarebbe dannoso, se non ne andasse di mezzo la dignità della scienza.

Ognuno sa in che modo son venuti su e si son venuti allargando tanti di questi insegnamenti speciali. Essi son sorti prima in qualche Università perchè c'era una persona eminente in quella speciale disciplina; sparita la persona, la cattedra è rimasta, che invece non dovea rimanere. Rimasta la cattedra, è restato svisato il concetto, certamente elevato mediante cui essa era stata creata, e di qui poi al porne una simile in ciascuna delle altre Università c'è stato un passo solo.

Poco più di una ventina di anni fa, i corsi di analisi e geometria superiore, e fisica matematica non c'erano che in tre o quattro Università, ed ora invece non c'è nessuna di quelle minuscole per quanto pareggiate Università che non abbia i suoi bravi insegnamenti d'analisi superiore, geometria superiore e fisica matematica. Mi ricordo di un giovine valoroso che fu inviato a insegnare una disciplina elevata in una di quelle Università pareggiate, e che stette per alcuni anni senza avere scolari, e ora non so se ne abbia.

Ma parliamoci schietti: Con che coscienza si può sostenere che in Italia possano trovarsi tanti astronomi, tanti cultori di geometria superiore, tanti di analisi superiore, tanti fisici matematici, ecc. per quante sono le numerose Università italiane?

Ma mi si domanderà: E allora, se non suppliamo in qualunque modo ai posti vacanti, come diamo la laurea?

E io rispondo, prima di tutto, che non vedo la ragione per la quale una ventina di Università italiane debbano essere tutte autorizzate a dare la laurea in matematica, cioè una laurea che bisognerebbe mantenere ad un livello molto alto, e che invece molte volte cade ad un livello molto basso.

Certo sarebbe una bella cosa che si potessero trovare in Italia una ventina di fisici matematici, e una ventina di geometri e analisti di valore riconosciuto, ma quando questo non è possibile, quando questo desiderio eccede la potenzialità del Paese perchè ostinarsi, con offesa al decoro della scienza e con danno stesso dei giovani?

A noi parrebbe di scadere nel concetto degli altri, se con tutta lealtà riconoscessimo che il nostro Paese non può darci tutto quello che chiediamo. Piuttosto che riconoscere questo noi abbassiamo il concetto elevato da cui eravamo partiti, e cerchiamo poi di persuadere noi stessi che non ci siamo abbassati affatto e che siamo quelli stessi di prima.

Se muore o lascia l'insegnamento un grande maestro, la prima idea che ci viene è quella di porre a concorso il suo posto, senza farci altre domande e senza guardarci attorno. Al concorso si presenterà forse (come è successo qualche volta, trattandosi di insegnamenti assai speciali) una sola persona e di valore discutibile; ebbene la Commissione proporrà al ministro, come eleggibile, quell'unico concorrente. E non era meglio lasciare vacante il posto, e aspettare che si formi quello specialista che possa degnamente occuparlo?

***

Oggidì si discorre molto di una possibile soppressione degli esami speciali e della istituzione di esami di Stato. Ora, senza inoltrarmi in una quistione così complessa riguardante tutto l'intero ordinamento universitario, a me pare però fuor di dubbio che nel caso di quella speciale laurea che è la laurea in matematica, questa innovazione si potrebbe e dovrebbe fare.

Esaminiamo prima di tutto quali sono i giovani che sono iscritti al secondo biennio per la laurea in matematica.

Si sa che al primo anno delle scuole di Applicazione, non si è, per legge, ammessi senza aver prima ottenuta la cosidetta licenza, mentre, anche senza di questa, si può essere iscritti al 3° anno di matematica (*).

(*) Nella Facoltà di scienze della Università di Torino, come gentilmente mi comunica il mio egregio amico prof. Peano, il regolamento per l'iscrizione al 3° anno di matematica, è stato interpretato da alcuni anni con maggior rigore.



Nelle scuole di Applicazione in cui quel regolamento è applicato con coscienza, ne risulta l'esclusione di parecchi giovani che sono, per conseguenza, i più negligenti o i più tardi d'ingegno fra i loro compagni. Molti di questi giovani si iscrivono allora al 3° anno di matematica sia colla speranza di potere prima o poi tornare alle scuole di applicazione senza perdere anni di corso, sia colla determinazione di mutar carriera.

Ora, a parte qualche nobile eccezione, io mi appello a tutti i miei colleghi per sapere con lealtà da essi, se un tal rifiuto delle scuole di applicazione possa reputarsi l'ideale d'uno studente di scienza pura. Eppure tutti sanno che sono gli studenti di tal genere che formano molte volte la maggioranza della studentesca del 2° biennio di matematica. Ma io questi studenti li metterò fuori causa, perchè nessuno penserà che le scuole di matematica sieno istituite per essi.

Tutti gli altri giovani e che considererò come i veri studenti, sono in generale quei pochi che hanno mostrato speciali tendenze per gli studii astratti, e che son venuti man mano acquistando un vero amore per essi. Ma son così pochi che non si capisce proprio la ragione per la quale in tutta Italia si debbano mantenere tante facoltà matematiche per tanti pochi giovani, che riuniti invece meglio fra loro, potrebbero progredir meglio negli studii.

Che il vero studente di matematica sia in generale amante della scienza, per quanto, s'intende, lo può essere un giovine, non è una mia fantasia, ma un fatto, perchè tutti sanno che c'è una differenza grandissima fra la massa di tutti gli studenti, e quei pochi di scienza pura.

Per quelli, gli studii in generale sono un peso di cui farebbero a meno, ma vi sono obbligati dalle loro famiglie, questi invece cedendo agli ideali della loro giovinezza ed affascinati dal miraggio della scienza, il più delle volte fanno quelli studii contro la volontà dei loro parenti che vorrebbero indurli a studii più lucrativi; quelli sanno che ottenuto in qualunque modo il diploma entreranno in un mondo dove in generale la loro fortuna non dipenderà dalla robustezza degli studii da loro fatti, ma dalla loro avvedutezza e da tutte quelle altre doti che nella scuola non si acquistano, questi invece sanno bene che la carriera da loro scelta è una carriera di abnegazione e che non aprirà loro l'adito a grandi fortune, e che se qualche modesta fortuna potranno aspettarsi dal mondo, questa dipenderà quasi tutta dalla precisione delle prime idee da loro acquistate nella scuola; quelli infine per esser troppi sono troppo lontani dai loro maestri e ne risentono troppo poco l'influenza, questi invece sono più o meno a contatto coi loro maestri, li amano dippiù, e assai più facilmente sono docili ai loro consigli.

Io credo perciò che se si sopprimesse l'obbligo degli esami nel secondo biennio di matematica, e si mantenesse solo un esame di laurea ben fatto, non si avrebbe nessun contraccolpo nella severità degli studii.

È infondato affatto il timore che i giovani non andrebbero più alle lezioni; chè anzi ci andrebbero con più amore.

Fra i miei scolari di matematica superiore ve ne sono sempre alcuni che non dovranno sostenere l'esame, e ciascuno dei miei colleghi delle altre Università potrà certamente attestare altrettanto per conto proprio. Tutti sanno che non c'è quasi nessun studente in matematica pura che non assista ad altri corsi oltre quelli di obbligo, ed è raro il caso di chi si presenta all'esame di laurea dopo solo i quattro anni regolamentari di corso.

In Germania il sistema che vige è proprio quello di cui parlo io.

Ma parliamoci francamente. Che cosa è quest'esame di matematica superiore?

Il professore di geometria superiore p. es. in un anno svilupperà un corso su di una speciale teoria. Egli andrà a leggere le Memorie di questo e quello autore, le coordinerà fra loro, ne mostrerà le lacune, mostrerà ai giovani la relazione che per avventura quelle ricerche geometriche potranno avere con ricerche analitiche e così via discorrendo. Insomma egli si proporrà di condurre i giovani sino alle ultime porte della scienza in quello speciale argomento che ha scelto per tema del suo corso. Ed è su questo che volete fare l'esame? E dopo che il giovine ha superato l'esame su quella speciale parte della geometria superiore, potrete dire che il giovine conosce la geometria superiore?

Questo incubo dell'esame genera tanti mali. Lo stesso professore, a detrimento della coltura dei giovani, non dà tutta quell'estensione che potrebbe dare al suo corso, perchè capisce che non è possibile che quello che a lui è costato anni di fatica per mettere assieme, i giovani lo possano poi tener tutto presente in un giorno.

D'altra parte è impossibile evitare nei giovani una certa reazione contro tutta quella roba cacciata a forza in tante pallottole nel loro cervello, che va naturalmente a danno dell'entusiasmo e dell'amore che essi potrebbero acquistare per la scienza, per modo che succede spesso un fatto che è sintomatico ed è che i giovani che cominciano a compor dei lavori, non ne scelgono il tema fra le discipline cui hanno dovuto assistere per obbligo e per sostenerci su l'esame, ma per lo più fra quelli cui hanno assistito per proprio genio, liberamente.

Per parte mia posso dire che negli anni dei miei studii, i corsi cui assistetti per obbligo mi lasciarono un peso, un'uggia, da cui neanche adesso, dopo tanti anni, ho potuto liberarmi e gli altri, che pure eran dati dagli stessi maestri, cui assistetti per mia libera elezione, furon quelli che mi fecero acquistare amore per la matematica.



Ho detto già che il metodo attuale è a detrimento della vera coltura dei giovani, e ci insisto.

A me pare che un corso di matematica superiore debba avere un obbiettivo completamente diverso dal corso p. es. di calcolo infinitesimale o di geometria analitica.

Qui si tratta di sgrossare, dirò così, il cervello dei giovani e renderlo atto alle concezioni matematiche, e innestargli lo spirito di quei metodi classici che durano da secoli e che nel fondo sono immutabili, e che variamente modificati, sono quelli stessi che si applicheranno poi in tutte le parti della matematica superiore; lì invece si tratta di condurre il giovine a esaminare gli indirizzi che la scienza ha preso negli ultimi tempi, e che domani forse cangerà; qui si conduce il giovine alla risoluzione di problemi che da secoli, son sempre quelli e che hanno applicazioni pratiche; lì invece si espongono e risolvono problemi che sono importanti oggi, e che ieri forse non esistevano, e che domani forse avranno perduta importanza per cederla ad altri, e che in ogni modo non hanno che un valore puramente ideale.

Io paragonerei l'opera del maestro nel secondo caso a quella dello scultore che sgrossa il marmo per crearne una statua, e nel primo caso la paragonerei all'opera dell'artista che dal marmo, già sgrossato, ne trae un'opera d'arte.

La prima operazione sul marmo la può fare anche chi sia appena edotto delle regole fondamentali dell'arte, ma la seconda operazione non la può fare che lo scultore di genio; la prima operazione è sempre la stessa sia che quel marmo è destinato a raffigurare una Venere Capitolina, sia che è destinato a divenire una modesta statua da giardino.

Fra le due specie d'insegnamenti c'è dunque proprio una differenza di sostanza. Nelle Università tedesche quasi sempre i professori espongono solo dei corsi di matematiche superiori, e gli insegnamenti fondamentali, che noi chiameremmo di primo biennio, son tenuti dai liberi docenti.

Se dunque differenza c'è, è naturale che non sieno trattati nella stessa maniera i due insegnamenti, e quindi gli esami mantenuti negli uni, possono essere soppressi negli altri, perchè così il richiede lo spirito e lo scopo di questi, senza di che la coltura dei giovani, ristretta in tante pallottole classificate e numerate, non potrà mai da noi acquistare quella larghezza e quell'elasticità che ha altrove.

***

E non è neanche poi fuor di luogo un'altra considerazione.

L'ordinamento attuale è di nocumento alla coltura dei giovani per un altro lato di molto rilievo.

Tutti sanno che a svolgere con larghezza e con intenti moderni una qualunque teoria di matematica superiore non può bastare un anno solo. L'insegnante si trova davanti a giovani che appena conoscono le nozioni fondamentali della geometria analitica e del calcolo, e quindi egli per svolgere un corso superiore, deve cominciare molto addietro, e svolgere quasi completamente teorie che sono da molte decine di anni già stabilite nella scienza. Ma il più delle volte per svolgere quelle teorie se ne trascorre l'intero anno, e si è obbligati ad interrompere il corso nel momento appunto in cui si stava per raggiungere la meta, e senza aver quindi potuto condurre i giovani sino alle ultime porte della scienza.

Il rimedio migliore a tale inconveniente sarebbe che il professore potesse nell'altro anno ricominciare il corso proprio al punto in cui lo ha interrotto l'anno precedente, come fanno appunto molti dei professori delle Università tedesche. Ma invece questo da noi non si può fare perchè l'uditorio nell'altro anno è quasi tutto cangiato; i giovani, seguito che hanno per un anno quel corso e superato quell'esame scappano da quel maestro per andare a seguire altro corso forse meno proficuo, e per apparecchiarsi a sostenere altri esami; il risentire per un altro anno il medesimo maestro, è cosa che dal punto di vista dei nostri regolamenti non porta alcun utile ai giovani, e se uno o due giovani hanno l'abnegazione e la diligenza di farlo, non si può pretendere da tutti la stessa abnegazione.

Ognuno che per poco ci pensi, o che ci abbia già pensato, vede la gravità di questo inconveniente.

Un corso di matematica superiore da noi non può in generale avere tutta quella larghezza di sviluppo di cui ha bisogno; esso è troppo serrato fra le angustie del regolamento, degli esami, e della ristrettezza dell'anno scolastico, e il maestro che vuole svolgere largamente una teoria, costretto com'è di cominciare dai primissimi risultati non ha il tempo di giungere sino agli ultimi.

***

Stabilita la libertà degli studii, resta anche completamente inutile quella arbitraria divisione dell'insegnamento di matematica superiore in tante cattedre distinte.

Ogni professore potrebbe avere il titolo di professore di *matematica superiore*, come già si è incominciato a fare in alcune Università.

Ridotte le facoltà di matematiche, potrebbero riunirsi in un minor numero di centri i migliori cultori delle matematiche; ma dovrebbe anche smettersi l'idea che il loro numero in ciascuna Università debba essere stabilito *a priori*.



Io non vedo il danno che ne risulterebbe, se in un luogo ce ne fossero quattro, e in un altro cinque; il loro numero può variare di tempi in tempi; esso deve risultare come conseguenza di tante cose, fra cui, prima di tutto, dalla potenzialità del Paese. Noi non possiamo venire a patti colla Provvidenza e chiedere che, morto un matematico di grido, ce ne mandi subito un altro.

Ho detto che quella divisione dell'insegnamento superiore in quelle sei cattedre è arbitraria e artificiale, e non mi darà torto infatti chi è appena informato dei nuovi indirizzi che negli ultimi anni hanno preso le matematiche; una distinzione netta fra geometria e analisi non può più farsi senza render monche l'una e l'altra; i problemi della fisica matematica e della meccanica si trovano intimamente legati con quelli della teoria delle funzioni analitiche, e così di seguito.

Il presente ordinamento dunque non è neanche conforme alle esigenze ultime della scienza, e io ho fede che verrà tempo in cui esso sarà mutato.

*Milano, autunno del 1893.*

---

## Deduzione del postulato del segmento da quello dell'angolo

*di* S. Sbrana *a Pistoia.*

In tutti i moderni trattati di Geometria elementare si trovano enunciati, dopo quelli del movimento, della retta e del piano, i due postulati seguenti:

Ogni segmento è rovesciabile, cioè, i suoi due estremi possono prendere contemporaneamente l'uno il posto dell'altro.

Ogni angolo è rovesciabile, cioè, i suoi due lati possono prendere contemporaneamente l'uno il posto dell'altro.

Scopo della presente nota è di dimostrare che la 1ª di queste due proposizioni non è indipendente dalla 2ª, come s'è ritenuto finora, ma ne è logica conseguenza (1).

(1) Un tentativo di dimostrare la stessa cosa si trova nella 6ª ed. (1888) degli eccellenti Elementi del prof. Faifofer, e precisamente in una nota alla pag. 28, che dice: « Fondandosi sul postulato dell'angolo si può dimo- « strare quello del segmento per ogni segmento che abbia le estremità sui « lati d'un angolo e a egual distanza dal vertice. »

Per fare questa deduzione, mi valgo, oltre che delle nozioni fondamentali che precedono in tutti i testi i due postulati surriferiti, anche delle seguenti prime nozioni sul cerchio:

*Definizione.* Quando un piano scorre su se stesso rotando attorno un suo punto A, ogni altro suo punto B descrive un *cerchio.*

*Cor.* Ogni retta del piano che passa per A incontra il cerchio in due punti e due soli.

*Postulato.* Il cerchio è una linea *completa,* tale cioè, che *divide* il piano in due parti; la parte limitata, che contiene i punti *interni,* è percorsa dal segmento AB; e quella indefinita, che contiene i punti *esterni,* è percorsa dal prolungamento di esso che è dalla parte dell'estremo B.

*Cor.* Ogni linea del piano che passa per un punto di AB, escluso B, e per un punto di detto prolungamento, ha col cerchio un punto almeno in comune.

Queste prime nozioni non sono diverse da quelle che s'incontrano in tutti i buoni testi; in esse non entra affatto il concetto di segmenti eguali e differenti, concetto che deve essere stabilito e utilizzato soltanto dopo di aver dimostrata la proprietà del segmento, della quale appunto ci occupiamo, e che andiamo, senz'altro, a dedurre da quella dell'angolo.

Sia AB un segmento arbitrario. Rotando prima attorno ad A e poi attorno a B esso descrive le superficie di due cerchi, i quali incontrano i prolungamenti della sua posizione iniziale in due punti, l'uno esterno a un cerchio e l'altro all'altro; questi due cerchi hanno dunque un punto in comune C, fuori della retta dei loro centri.

Si tirino i segmenti AC e BC; poichè AC e AB, conservando l'estremo A in comune, sono sovrapponibili, se si rovescia l'angolo BAC, il punto B va in C e C in B e perciò anche il segmento BC

Trattandosi qui soltanto d'una classe speciale di segmenti, l'osservazione non ha alcun valore, come ha mostrato di riconoscerlo l'autore stesso col sopprimere questa nota dalle edizioni successive. E invero di classi speciali è facile il costruirne di estesissime, tanto di segmenti che di angoli, pei quali le due proposizioni in questione, non dipendano affatto l'una dall'altra, ma discendano direttamente dai postulati della retta e del piano. Esempi: Si fissino sopra una retta due punti ad arbitrio A e B, e poi con una rotazione attorno ad A si facciano scambiare di posto i due raggi; il punto B andrà in un punto C, che nella rotazione inversa torna in B; il segmento BC è dunque rovesciabile. Analogamente, preso un angolo qualunque ABC, una mezza rotazione del suo piano attorno ad AB porta BC in BD, che nella rotazione inversa torna in BC: l'angolo ABD è dunque rovesciabile.



viene a essere rovesciato: ma BC e AB sono sovrapponibili, dunque anche il segmento dato AB è rovesciabile.

Dopo ciò, le prossime nuove edizioni dei nostri buoni trattati di Geometria potranno contenere un postulato di meno.

*Pistoia, gennaio 1893.*

S. Sbrana.

---

# RECENSIONI

---

Dottor M. Chini. — *Esercizi di calcolo infinitesimale.* — Livorno, tip. di Raffaele Giusti.

È un buon libro che l'autore dichiara di aver pubblicato perchè possa riuscire di qualche vantaggio a coloro che intraprendono lo studio di questa parte della matematica. Lo scopo è raggiunto, perchè gli esercizi sono scelti con intelligenza e criterio, sviluppati con semplicità e chiarezza, e la lettura di questo libro gioverà certamente agli studenti di calcolo.

Nella prima parte « *Calcolo differenziale* » gli esercizi vertono sugli infinitesimi dei vari ordini, massimi e minimi, derivate $n^e$, sviluppi in serie, applicazioni geometriche alle curve piane, gobbe ed alle superfici. — Nella seconda parte « *Calcolo integrale* » vi sono esercizi di integrali di funzioni razionali, irrazionali, trascendenti, e le applicazioni geometriche. — Nella terza parte « *Equazioni differenziali* » si integrano equazioni di 1° e di 2° ordine, ed alcune di ordine superiore.

Dalla lettura del libro ho rilevato alcuni punti, e sono pochi, in cui l'opera dell'autore mi è parsa meno perfetta per semplicità e chiarezza, e sono i seguenti:

Pag. 3 - Es. 7. Le coordinate di due punti sono dedotte sotto la forma:

$$P_1\left(3+\sqrt{2}, \frac{1}{3+2\sqrt{2}}\right), \quad P_2\left(3-\sqrt{2}, \frac{1}{3-2\sqrt{2}}\right)$$

e sarebbe stato meglio porre $P_1(3+\sqrt{2}, 3-2\sqrt{2})$, $P_2(3-\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2})$.

Pag. 26 - Es. 41. Il $\lim\left(1+\frac{r}{100\,n}\right)^{nt}=e^{\frac{rt}{100}}$ per $n=\infty$, è dedotto col metodo delle derivate, ma era bene osservare che lo stesso limite si otteneva molto facilmente riducendo l'espressione al tipo $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mx}$.

Pag. 30 - Es. 46. Per ottenere $D^{(n)} \operatorname{arc\,tang} x$, l'autore pone

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-ix}+\frac{1}{1+ix}\right)$$

e poi deriva $(n-1)$ volta. Il calcolo risulta più semplice ponendo

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right]$$

Nella ricerca degli asintoti il metodo seguito è quello di determinare $a=\lim\frac{y}{x}$ e $b=\lim(y-ax)$ per $x=\infty$ nella equazione $y=ax+b$. L'autore avrebbe fatto bene di applicare a qualche esempio anche l'altro metodo più moderno (1) dello sviluppo di $y=ax+b+\ldots$ secondo le potenze discendenti di $x$.

Pag. 124 - Es. 189. « $\int\frac{f(x)\,dx}{(x^2+px+q)^n}$ con $f(x)$ di grado inferiore a $2n$ e $p^2<4q$ è sempre decomponibile in due parti ecc. ... » Si può supporre $p^2$ non uguale a $4q$.

Pag. 195 - Es. 140. Si usa la dicitura « fattori primi reali ed altri immaginari » invece di fattori lineari. È molto meglio nel caso accennato parlare di fattori primi di 1° e 2° grado.

Pag. 144 - Es. 166. Si vuole $\int\frac{\operatorname{sen}^3 x\cos x\,dx}{1-3\operatorname{sen}^3 x}$ ed è detto: « Essendo l'integrale proposto dalla forma $\int f(\operatorname{sen} x,\ \cos x)\,dx$ ecc., si ponga $\operatorname{sen} x=z$ ». Ora agli allievi si deve insegnare che $\int f(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$ dove $f$ è segno di funzione razionale in $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, si calcola (come è detto dopo) ponendo $\operatorname{tang}\frac{1}{2}x=z$; e ciò per evitare l'introduzione di irrazionali. Nel caso speciale si pone $\operatorname{sen} x=z$ perchè l'integrale proposto è delle forma

$$\int f(\operatorname{sen} x)\,d\operatorname{sen} x.$$

Mancano esercizi sulla derivazione degli integrali.

Questi pochi punti che mi paiono meno perfetti, non infirmano la bontà del libro. Esso riuscirà di non lieve aiuto ai giovani che studiano il Calcolo per la prima volta.

*Torino, ottobre 1893.* F. CASTELLANO.

(1) PEANO, *Lezioni di analisi infinitesimale*, vol. 1°, 1893. Lo stesso metodo è indicato nel Trattato di calcolo del Serret.



G. GARBIERI — *Teoria e applicazioni dei determinanti.* — Reggio nell'Emilia, 1893. (Prezzo L. 6).

È uscita recentemente la 2ª edizione della Teoria dei determinanti del chiar. prof. Garbieri « interamente rifatta sulle lezioni date nelle Università di Padova e Genova »: è un libro di 100 pagine in 8° grande. L'autore espone le proprietà fondamentali dei determinanti, basandosi sulle prime proposizioni relative alle inversioni ed alle permutazioni. Ne fa applicazione ai sistemi di n equazioni lineari con n incognite. Si occupa dei determinanti reciproci e delle matrici nulle. Fa alcune applicazioni geometriche. Discute i sistemi di equazioni lineari, omogenee e non omogenee. Relativamente ad un sistema n-k volte indeterminato osserva che « *La scelta delle* n-k *incognite, che si possono lasciare arbitrarie non ha nessun'influenza sulle soluzioni: così pure la scelta del sistema risolvente* » (1). Si occupa dell'eliminazione di un'incognita comune a due equazioni. In un capitolo intitolato « Generalizzazione di teoremi sui determinanti » dà le prime proprietà dei determinanti simmetrici ed emisimmetrici, lo sviluppo d'un determinante secondo i minori compresi in matrice formata di sue linee parallele, il teorema generale di moltiplicazione delle matrici, quello relativo al valore d'un minore del determinante reciproco di un determinante dato. Dà poi lo sviluppo di un determinante secondo gli elementi di due linee perpendicolari fra loro; considera la forma quadratica aggiunta d'una forma quadratica di determinante nullo. S'occupa della scomposizione di un determinante in determinanti a diagonali vuote, e dello sviluppo secondo le potenze di una parte comune a tutti gli elementi principali. Consacra l'ultimo capitolo ai determinanti funzionali.

Il chiar. prof. Garbieri è conosciutissimo anche come valente scrittore di libri didattici per cui non mi fermo a mettere in evidenza la chiarezza e la semplicità con cui sono esposti i diversi argomenti trattati nel libro di cui ho detto brevemente.

F. GIUDICE.

(1) Per la dimostrazione di questo teorema e di altri che completano le proprietà dei sistemi d'equazioni lineari rimanda ad una sua memoria. Per pura ragione storica, osservo che il teorema qui riprodotto fu anch'esso enunciato e dimostrato la prima volta, almeno in forma esplicita, nella mia pubblicazione citata favorevolmente dal prof. Garbieri nella memoria accennata: V. F. GIUDICE: *Sulle equazioni simultanee.* Rivista di matematica elementare, Novara, 1883. Vi si trova quindi anche la nozione di sistema risolvente; vi manca quella di caratteristica, che semplifica qualche enunciato. V. A. CAPELLI: *Rivista di Mat.*, 1892, pag. 54. — V. G. GARBIERI: *Giornale di Mat.*, 1892, pag. 43.

A. ZIWET — *An elementary treatise on theoretical mechanics.* Part I. *Kinematics.* — New Jork, Macmillan, 1893, pag. VIII + 181.

Il titolo stesso spiega la natura e l'indole del libro, destinato agli studenti dei collegi e Università d'America. Il libro è diviso in due capitoli. Il I è intitolato: Geometria del moto. Vi sono studiati i moti di traslazione, di rotazione, il moto piano, il moto attorno ad un punto, ed il moto generale d'un corpo rigido nello spazio.

Le traslazioni si rappresentano mediante *vettori*, su cui si definiscono le ordinarie operazioni geometriche. Le rotazioni, specialmente infinitesime, vengono rappresentate mediante *rotori* (rotors) (*).

Nel capitolo II, Cinematica, si comincia colla misura del tempo, e si passa ai concetti di velocità e di accelerazione, prima pel moto rettilineo, poi pel moto nel piano, e infine pel moto nello spazio. Fra i moti piani sono studiati gli armonici e la loro composizione, il moto pendolare, il moto dei pianeti, il moto d'una figura piana nel proprio piano, i poligoni snodati, ecc. Nello spazio si studia dapprima il moto d'un punto, e poi quello d'un corpo rigido.

Tutto il libro è scritto con molta chiarezza e con tutta quell'arte che esige la didattica; le varie teorie sono accompagnate da numerosi esempi colle loro risposte. Sicchè siamo certi che esso sarà di utile giovamento agli studenti ai quali è destinato, ma potrà essere anche una utile guida ai nostri insegnanti.

È ancora a notarsi il lusso tipografico con cui il libro è stampato, e al quale pur troppo noi siamo poco abituati. (P.).

(*) Questi enti sono identici a quelli che nelle mie Lezioni di Analisi chiamai $p^2$.



# Sul Formulario di Matematica.

*Nota.* Preghiamo vivamente i lettori di inviarci tutte quelle aggiunte e correzioni che possono farsi sia al *Formulario* che alle *Note storiche.*

CORREZIONI ED AGGIUNTE.

[1] I §2 si aggiunga: $\left[\binom{-b}{b} \mathrm{P}25 = \mathrm{P}25'\right]$

25'. $a \supset b \cup c . = . a - b \supset c$

28'. $ac \supset b . a \supset b \cup c . \supset . a \supset b$

36. $a \supset c . \cup . b \supset c . \supset . ab \supset c$

37. $c \supset a . \cup . c \supset b . \supset . c \supset a \cup b.$

[2] I §3 si corregga la P28 come segue:

28. $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

[3] II §2 si aggiunga:

42'. $a/b = c/d . = . ad = bc$ .

[4] II §3 P12 si corregga come segue:

$\mathrm{mod}\,(a^m) = (\mathrm{mod}\,a)^m$.

[5] II §3 P14 si corregga:

$a \,\varepsilon - \mathrm{Q} . \supset .$ ecc.

[6] II §4 si aggiunga:

66. $a^3 + b^3 = 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + 6\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

67. $a^4 + b^4 = 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^4 + 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^4 + 12\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

[7] II §5 P27 invece di $\left(\frac{a+b}{2}\right)$ si legga $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

[8] II §9 P17 si corregga:

$n \,\varepsilon\, \mathrm{N} . \supset .$ ecc. (P.)

[9] II §1 P56 invece di $p-1+\mathrm{Z}_{q-p}$ si legga $p-1+\mathrm{Z}_{q+1-p}$ (F. GIUDICE)

## Note storiche alla parte II del Formulario.

§ 2.

6. EUCLIDES, VII, 16:

*Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β. καὶ ὁ μὲν Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω, ὁ δὲ Β τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· λέγω, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ Γ τῷ Δ*

8, 46. EUCLIDES, II, 1. — ID. V, 1, 2.

18-20. DIOPHANTUS, *Arith.* I, 9:

*Λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα, ποιεῖ ὕπαρξιν. Λεῖψις δὲ ἐπὶ ὕπαρξιν, ποιεῖ λεῖψιν.*

36. EUCLIDES, V, 16. — 37. ID. 18. — 39. ID. 12. — 40. ID. 22. — 41. ID. 23. — 42. ID. 24. — 42'. ID. VII, 19.

§ 3.

7. EUCLIDES, IX, 11. — 8. ID. VIII, 13; IX, 3, 9. — 9. ID. VIII, 11, 12; IX, 4.

§ 4.

4. EUCLIDES, II, 4:

*Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.*

6. EUCLIDES, II, 9.

7. EUCLIDES, II, 5.

47. DIOPHANTUS, *Arith.* III, 22. — 48. ID. II. 8, 9.

51. LAGRANGE, *Démonstration d'un théorème d'Arithmétique* (Nouv. Mém. de Berlin, 1770, pag. 133).

52. EULER, *Demonstratio theoremi Fermatiani* (Novi Comm. Petrop. 1760, p. 53-54).

66, 67. CAVALIERI, *Exercitationes geometricae*, pag. 269.

§ 5.

24. EUCLIDES, V, 25.

§ 6.

21. EUCLIDES, X, 42. — 22, 23. ID. X, 54-59, 91-96.



§ 7.

21-31. *Mirifici logarithmorum canonis descriptio, ejusque usus, in utraque Trigonometria, ut etiam in omni Logistica Mathematica, Amplissimi, Facillimi, et expeditissimi explicatio.* Authore et Inventore IOANNE NEPERO, Barone Merchistonii, etc. Scoto. Edinburgi, ex officina Andreæ Hart, Bibliopólæ CIↃ.DC.XIV.

Pag. 20.

*Ex his praelibatis judicent eruditi quantum emolumenti adferent illis logarithmi: quandoquidem per eorum additionem multiplicatio, per substractionem divisio, per bipartitionem extractio quadrata, per tripartitionem cubica, et per alias faciles prostaphaereses omnia graviora calculi opera evitantur.*

$$\left[\log \text{nep}\, x = -10^7 \log_e\left(\frac{x}{10^7}\right)\right]$$

§ 8.

6. DIOPHANTUS, I, 1. — 7. ID. I, 2, 4. — 8. ID. I, 16. — 9. ID. I, 18, 19.

23. EUCLIDES, II, 5, 6. Cfr. LORIA, *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, Libro I, pag. 44, 45.

LEONARDO PISANO, de filiis Bonaccii, *Liber abbaci*, 1202. (Publicato da B. Boncompagni, pag. 497).

*(Si) volueris invenire quantitatem census* [$x^2$], *qui cum datis radicibus* [$+px$] *equetur numero dato* [$=-q$], *sic facias: accipe quadratum medietatis radicum* [$p^2/4$], *et adde eum super numerum datum* [$p^2/4-q$]; *et eius, quod pervenerit, radicem accipe* [$\sqrt{p^2/4-q}$]; *de qua numerum medietatis radicum tollè* [$\sqrt{p^2/4-q}-p/2$]; *et quod remanserit erit radix quesiti census.*

24. EUCLIDES, VI, 28, 29.

25. DIOPH. I, 30. — 26. ID. I, 31, 33. — 27. ID. I, 32.

28. BACHET, *Commentaria in Diophantum,* I, 33, quaestio 1ª.

§ 9.

7. CAUCHY, *Analyse algébr.*, c. 7 (1821).

§ 10.

1-2. EUCLIDES.

3. NEWTON, *Epistola ad D. Henricum Oldenburg*, 13 junii 1676.

5, 14. PYTHAGORAS (V. M. CANTOR, *Geschichte der Mathematik*, I, 135).
6. ARCHIMEDES, *Spiral*. 10.
7. NICOMACUS, *Arith*. II, 20.
8, 9. FERMAT. JAC. BERNOULLI, *Ars conjectandi*, p. 27.
10-12. FERMAT, *Oeuvres*, I, 341.
10. ARIABHATTAS, 21.

## Note sioriche alla parte III del Formulario.

§ 1.

29. EUCLIDES, VIII, 6, 7, 14-17, 22-25.

§ 3.

6-7. EUCLIDES, VII, 1-2.
9. EUCLIDES, VII, 2:
. . . ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.
13. EUCLIDES, VII, 3. — 16. ID. VII, 25, 27; VIII, 2, 3. — 17. ID. VII, 20-21. — 19. ID. VII, 23, 24. — 19'. ID. VII, 26.

§ 4.

5. EUCLIDES, VII, 34. — 8, 9. ID. VII, 35. — 11. ID. VII, 36, 37.

§ 5.

4. EUCLIDES, VII, 31-32. — 6. ID. VII, 29. — 9. ID. VII, 30. — 10. ID. IX, 12. — 11. ID. IX, 13.
12. FERMAT, *Opera Math.*, Tolosae 1679. — EULER, *Comm. Petrop.*, t. 8, p. 143, 1736; *N. C. Petrop.* t. 8, p. 70.
13. WILSON; V. WARING, *Med. Alg.* 1782, p. 380; LAGRANGE, *Berlin, Mém.* 1771; EULER, *Opusc. anal.* t. I, p. 329; *Petrop.* 1783.
15, 16. EUCLIDES, IX, 20.
17, 18. LEGENDRE, *Théorie des nombres*, prop. XX.



## LISTA BIBLIOGRAFICA DELLA TEORIA DEGLI AGGREGATI

*di* G. VIVANTI *in Mantova* (*).


I. G. CANTOR. *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*. Math. Ann., T. 5, 1872, p. 123-132. Trad. fr. in Acta Math., T. 2, 1883, p. 336-348.

II. G. CANTOR. *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen*. Journ. für Math., T. 77, 1874, p. 258-272. Trad. fr. in Acta Math., T. 2, 1883, p. 305-310.

III. G. CANTOR. *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*. Journ. für Math., T. 84, 1877, p. 242-258. Trad. fr. in Acta Math., T. 2, 1883, p. 311-328.

IV. U. DINI. *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, Pisa 1878. Deutsche Uebersetzung von J. Lüroth und A. Schepp, Leipzig 1892.

V. J. THOMAE. *Sätze aus der Functionentheorie*. Nachr. von der Ges. der Wiss. zu Göttingen, 1878, p. 466-468.

VI. J. LÜROTH. *Ueber gegenseitig eindeutige und stetige Abbildung von Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen auf einander*. Sitzungsberichte der phys.-med. Societät zu Erlangen, T. 10, 1878, p. 190-195.

VII. G. CANTOR. *Ueber einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten*. Nachr. von der Ges. der Wiss. zu Göttingen, 1879, p. 127-135.

VIII. G. CANTOR. *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, I. Math. Ann., T. 15, 1879, p. 1-7. Trad. fr. in Acta Math., T. 2, 1883, p. 349-356.

IX. E. NETTO. *Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*. Journ. für Math., T. 86, 1879, p. 263-268.

X. G. CANTOR. *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, II Math. Ann, T. 17, 1880, p. 355-358. Trad. fr. in Acta Math., T. 2, 1883, p. 357-360.

XI. G. CANTOR. *Id.*, III. Math. Ann., T. 20, 1882, p. 113-121. Trad. fr. in Acta Math., T. 2, 1883, p. 361-371.

XII. G. CANTOR. *Id.*, IV. Math. Ann., T. 21, 1882, p. 51-58. Trad. fr. in Acta Math., T. 2, 1883, p. 372-380.

XIII. G. MITTAG-LEFFLER. *Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable*. Comptes rendus des séances de l'Ac. des Sc. de Paris, T. 94, 1882, p. 414-416, 511-514, 713-715, 781-783, 938-941, 1040-1042, 1105-1108, 1163-1166; T. 95, 1882, p. 335-336.


(*) Questa teoria costituisce la parte VI del *Formulario*, in corso di stampa.

XIV. P. DU BOIS REYMOND. *Die allgemeine Functionentheorie*, I, Tübingen 1882. Tr. fr. di G. Milhaud e A. Girot, Paris 1887.
XV. W. VELTMANN. *Ueber die Anordnung unendlich vieler Singularitäten einer Function*. Zeitschr. für Math. und Ph., T. 27, 1882, p. 176-179.
XVI. W. VELTMANN. *Die Fourier'sche Reihe*. Zeitschr. für Math. und. Ph., T. 27, 1882, p. 193-235.
XVII. W. VELTMANN. *Zur Theorie der Punktmengen*. Zeitschr. für Math. und Ph., T. 27, 1882, p. 313-314,
XVIII. G. CANTOR. *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, V. Math. Ann., T. 21, 1883, p. 545-596. Pubblicato anche a parte sotto il titolo: *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre*, Leipzig 1883. Estratto in francese: Acta Math., T. 2, 1883, p. 381-408.
XIX. G. CANTOR. *Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situés dans un espace continu à* n *dimensions. Première communication.* Acta Math., T. 2, 1883, p. 409-414.
XX. I. BENDIXSON. *Quelques théorèmes de la théorie des ensembles de points.* Acta Math., T. 2, 1883, p. 415-429.
XXI. I. BENDIXSON. *Några studier öfver oändliga punktmängder.* Ofvers. af. vet. akad. förhandlingar (Stockholm), T. 40, 1883, n° 2, p. 31-35.
XXII. M. GUICHARD. *Théorie des points singuliers essentiels.* Ann. sc. de l'éc. norm. sup., S. II, T. 12, 1883, p. 301-394.
XXIII. G. CANTOR. *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, VI. Math. Ann., T. 23, 1884, p. 453-488.
XXIV. G. MITTAG-LEFFLER. *Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante.* Acta Math., T. 4, 1884, p. 1-79.
XXV. G. CANTOR. *De la puissance des ensembles parfaits de points.* Acta Math., T. 4, 1884, p. 381-392.
XXVI. E. PHRAGMÉN. *Beweis eines Satzes aus der Mannigfaltigkeitslehre.* Acta Math., T. 5, 1884, p. 47-48.
XXVII. E. PHRAGMÉN. *En ny sats inom teorien för punktmängder.* Ofvers. af vet. ak. förh. (Stockholm), T. 41, 1884, n° 1, p. 121-124.
XXVIII. L. SCHEEFFER. *Allgemeine Untersuchungen überRectification der Curven.* Acta Math. T. 5, 1884, p. 49-82.
XXIX. L. SCHEEFFER. *Zur Theorie der stetigen Functionen einer reellen Veränderlichen.* Acta Math., T. 5, 1884, p. 183-194, 279-296.
XXX. I. BENDIXSON. *Sur la puissance des ensembles parfaits de points.* Bihang till vet. ak. handlingar (Stockholm), T. 9, 1884, n° 6.
XXXI. I. BENDIXSON. *Un théorème auxiliaire de la théorie des ensembles.* Bihang till vet. ak. handlingar (Stockholm), T. 9, 1884, n° 7.
XXXII. P. TANNERY. *Note sur la théorie des ensembles.* Bull. de la soc. math. de France, T. 12, 1884, p 90-96.
XXXIII. G. ASCOLI. *Le curve limite di una varietà data di curve.* Mem. dell'Acc. dei Lincei, Serie III, T. 18, 1884, p. 521-586.



XXXIV. O. STOLZ. *Ueber einen zu einer unendlichen Punktmenge gehörigen Grenzwerth.* Math. Ann., T. 23, 1884, p. 152-156.
XXXV. A. HARNACK. *Notiz über die Abbildung einer stetigen linearen Mannigfaltigkeit auf eine unstetige.* Math. Ann., T. 23, 1884, p. 285-288.
XXXVI. M. LERCH. *Prispevek k nauce o mnozinach bodu v rovine.* Sitzungsb. d. böhmischen Ges. der Wiss. (Prag), 1884, p. 176-178.
XXXVII. E. PHRAGMÉN. *Ueber die Begrenzungen von Continua.* Acta Math., T. 7, 1885, p. 43-48.
XXXVIII. G. CANTOR. *Ueber verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen in einem n-fach ausgedehnten stetigen Raume* $G_n$. Acta Math., T. 7, 1885, p. 105-124.
XXXIX. A. HARNACK. *Ueber den Inhalt von Punktmengen.* Math. Ann., T. 25, 1885, p. 241-250.
XL. C. GUTBERLET. *Das Problem des Unendlichen.* Zeitschr. für Philosophie (Halle), T. 88, 1885, p. 179-223.
XLI. F. MEYER. *Elemente der Arithmetik und Algebra*, Halle 1885.
XLII. B. KERRY. *Ueber G. Cantor 's Mannigfaltigkeitsuntersuchungen.* Vierteljahrssch. für wissenschaftliche Philosophie, T. 9, 1885, p. 191-232.
XLIII. P. TANNERY. *Le concept scientifique du continu: Zénon d'Élée et Georg Cantor.* Revue philosophique, octobre 1885.
XLIV. G. ENESTRÖM. *Om G. Cantor 's uppsats: Ueber die verschiedenen Ansichten in Bezug auf die actual unendlichen Zahlen.* Ofvers. af vet. ak. förh., T. 42, 1885, n° 10, p. 69-70.
XLV. G. CANTOR. *Ueber die verschiedenen Ansichten in Bezug auf die actual unendlichen Zahlen.* Bihang till vet. akad. handlingar T. 11, 1886, n° 19. Il principio di questo scritto fu riprodotto in Zeitschr. für Phil., T. 88, 1886, p. 224-233, e in Natur und Offenbarung (Münster), T. 32, 1886, p. 46-49. La fine fu pubblicata a parte sotto il titolo: *Zur Frage des actualen Unendlichen.*
XLVI. M. LERCH. *O soustavách bodu a jich vyznamu v analysi.* Casopis pro pestovani mathem. (Praga), T. 15, 1886, p. 211.
XLVII. O. BIERMANN. *Theorie der analytischen Functionen*, Leipzig 1887.
XLVIII. G. LORIA. *La definizione dello spazio a* n *dimensioni e l'ipotesi di continuità del nostro spazio secondo le ricerche di Giorgio Cantor.* Giorn. di mat., T. 25, 1887, p. 97-108.
XLIX. G. CANTOR. *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten.* Zeitschr. für Phil., T. 91 e 92, 1887.
L. K. BECKMAN. *Om dimensionsbegreppet och dess betydelse för matematiken*, Upsala, 1888.
LI. H. SCHWARZ. *Ein Beitrag zur Theorie der Ordnungstypen*, Halle 1888.
LII. R. BETTAZZI. *Su una corrispondenza fra un gruppo di punti ed un continuo ambedue lineari.* Annali di mat., Serie II, T. 16, 1888, p. 49-60.
LIII. R. DEDEKIND. *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig 1888.
LIV. G. ASCOLI. *Riassunto della mia memoria: « Le curve limite di una varietà data di curve », ed osservazioni critiche alla medesima.*

Rendiconti dell'Ist. Lomb., Serie II, T. 21, 1888, p. 226-239, 257-265, 294-300, 365-371.

LV. G. Vivanti. *Fondamenti della teoria dei tipi ordinati.* Ann. di mat., Serie II, T. 17, 1889, p. 1-35.

LVI. C. Arzelà. *Funzioni di linee.* Rend. dell'Acc. dei Lincei, Serie IV, T. 5, 1889, 1° sem., p. 342-348.

LVII. G. Peano. *Arithmetices principia, nova methodo exposita,* Torino 1889.

LVIII. R. de Paolis. *Teoria dei gruppi geometrici e delle corrispondenze che si possono stabilire tra i loro elementi.* Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), Serie III, T. 3, 1890.

LIX. G. Peano. *Sur une courbe qui remplit toute une aire plane.* Math. Ann., T. 36, 1890, p. 157-160.

LX. G. Peano. *Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires.* Math. Ann., T. 37, 1890, p. 182-228.

LXI. D. Hilbert. *Ueber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flachenstück.* Naturf. Ges. Bremen, 1890, p. 11-12; Math. Ann., T. 38, 1891, p. 459-460.

LXII. S. Dickstein. *Pojeçia i metody matematyki,* I, Warszawa 1891.

LXIII. G. Veronese. *Fondamenti di geometria,* Padova 1891.

LXIV. G. Vivanti. *Notice historique sur la théorie des ensembles.* Bibliotheca mathem., T. 6, 1892, p. 9-25.

LXV. L. Milesi. *Sulla impossibile coesistenza della univocità e della continuità nella corrispondenza che si può stabilire fra due spazi continui ad un numero differente di dimensioni.* Rivista di Matematica, T. 2, 1892, p. 103-106.

LXVI. G. Cantor. *Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre.* Jahresbericht d. deutsch. Mathematiker-Vereinigung, T. 1, 1892, p. 75-78. Tr. it. di G. Vivanti in Riv. di mat., T. 2, 1892, p. 165-167.

LXVII. E. Amigues. *La théorie des ensembles et les nombres incommensurables.* Ann. de la Fac. des Sc. de Marseille, T. 2, 1892, p. 33-43.

LXVIII. F. Giudice. *Subfiniti e transfiniti dal punto di vista di G. Cantor.* Rend. del Circ. Mat. di Palermo, T. 1, 1892, p. 161-164.

LXIX. C. Jordan. *Cours d'analyse de l'École Polytechnique, II éd., T. I,* Paris 1892-93.

LXX. G. Peano. *Lezioni di analisi infinitesimale,* Torino 1893.

Fine del Volume III