RIVISTA

DI

MATEMATICA

EDITA

DA

G. PEANO

Professore di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino

Volume V

TORINO

FRATELLI BOCCA

LIBRAI DI S. M.

1895

INDICE

RIVISTA DI MATEMATICA
Vol. V. — 1895

Sulla Parte IX del Formulario
Contributo alla teoria dei numeri algebrici.

Proprietà generali dei numeri algebrici. - Corpo di numeri.

Teoria generale dei moduli.

Teoria degli ideali in un dato corpo di numeri (*h*)
secondo DEDEKIND

La Parte IX del *Formulario* ha per iscopo di portare un primo contributo alla teoria importantissima dei *numeri algebrici*. Le proposizioni raccolte furono prese in gran parte dall'ultimo Supplemento (XI) alle *Vorlesungen über Zahlentheorie* di DIRICHLET-DEDEKIND (4te Aufl., Braunschweig, 1894) (1). Qua e là (e specialmente nei §§ 1-6) mi sono state di grande aiuto anche le lezioni sulla teoria dei numeri algebrici dettate dal Prof. H. WEBER nell'Università di Gottinga durante il semestre invernale 1893-94 (alle quali io ho avuta la fortuna di poter assistere).

Delle denominazioni nuove che compaiono in questa teoria alcune soltanto furono definite nel Formulario, omettendosi invece tutte quelle la cui introduzione non sarebbe stata quivi di alcun vantaggio. Fra queste ultime ricorderò le seguenti:

Divisibilità dei numeri algebrici interi. — Si dice che di due numeri algebrici interi x, y l'uno è divisibile per l'altro, quando il primo è uguale al prodotto del secondo per un terzo numero algebrico intero.

$$x\,,y\,\varepsilon\,\mathrm{A}\,.\supset:x\,\varepsilon\ \text{divisibile per}\ y\,.=.\,x\,\varepsilon\,\mathrm{A}\times y$$

Si può parlare anche del *massimo comun divisore* di due numeri algebrici interi x, y. E questo numero $\mathrm{D}(x\,,y)$ non potrà essere che il z di cui la P11 del § 3 afferma l'esistenza:

$$x\,,y\,\varepsilon\,\mathrm{A}:z\,\varepsilon\,\mathrm{A}\,.\,x\,,y\,\varepsilon\,\mathrm{A}\times z\,.\supset_z.\,z\,\varepsilon\,\mathrm{A}\times x+\mathrm{A}\times y:\supset.\,z=\mathrm{D}(x\,,y)\,.$$

Discriminante (di un sistema di n numeri algebrici contenuti in un $\Omega' x$, dove x è un alg_n). — È il quadrato del determinante della matrice, che si può formare con questi stessi numeri e coi loro coniugati (opportunamente disposti). Il DEDEKIND lo indica colla lettera Δ noi ci siamo limitati a scrivere $\mathrm{Det}^2 y$, $\mathrm{Det}^2 z$, ... (§6 . P1 e seg.). Se gli n numeri scelti in $\Omega' x$ sono in particolare le potenze $x^0=1$, x^1, x^2, ... x^{n-1}, questo discriminante coincide col discriminante dell'equazione irriduttibile $fx=0$, di cui x è radice.

Minimo multiplo comune di due (o più) moduli. — È l'insieme di tutti i numeri comuni a questi stessi moduli.

$$a\,,b\,\varepsilon\,\mathrm{Mod}\,.\supset.\,\mathrm{m}(a\,,b)=a\frown b.$$

Il DEDEKIND usa la scrittura $a-b$, che noi non avremmo avuto ragione di sostituire all'altra $a\frown b$.

Massimo comun divisore di due (o più) moduli. — È l'insieme di tutte le somme di numeri contenuti rispettivamente nei moduli proposti.

$$a\,,b\,\varepsilon\,\mathrm{Mod}\,.\supset:\mathrm{D}(a\,,b)=\overline{z\,\varepsilon}\,(x\,\varepsilon\,a\,.\,y\,\varepsilon\,b\,.\,z=x+y\,.-=_{x,y}\Lambda)\,.$$

(1) Quest'opera si troverà citata in seguito e nel *Formulario* colla semplice indicazione DEDEKIND.

Il DEDEKIND usa per $\mathrm{D}(a\,,b)$ la scrittura $a+b$, alla quale noi pure ci siamo attenuti (1). Questa notazione fu già introdotta del resto, in generale, nell'*Introduction au Formulaire,* § 4. L'operazione ivi indicata non appartiene alla logica pura, ma all'algebra; si può però collegarla coll'operazione logica $\smile$, perchè, indicato con $\mathrm{Mod}'\,k$ il *minimo modulo contenente la classe k,* si ha:

$$a+b=\mathrm{Mod}'(a\smile b)\,.$$

Divisibilità dei moduli. — Si dice che un modulo è divisibile per un altro, quando è contenuto in quest'ultimo (nel senso che ogni numero del primo appartiene anche al secondo).

$$a\,,b\,\varepsilon\,\mathrm{Mod}\,.\supset:a\,\varepsilon\ \text{divisibile per}\ b\,.=.\,a\supset b\,.$$

Il DEDEKIND usa la scrittura $a>b$.

Molte proposizioni sulla teoria dei *moduli,* che hanno pure la loro importanza, si sono quindi omesse nel Formulario, riducendosi esse, coll'uso delle notazioni $a\frown b$, $a\supset b$, a proposizioni di logica pura, già enunciate nella Parte I. Così p. e. (colle notazioni del DEDEKIND):

$a\,,b\,\varepsilon\,\mathrm{Mod}\,.\supset:a>b\,.\,b>a\,.=.\,a=b\,.$	(F. I . § 1 . P3)
$a-b>a\,.$	(» P5)
$a-b=b-a\,.$	(» P8)
$a>b\,.\supset.\,a-b=a\,.$	(» P33)
$a\,,b\,,c\,\varepsilon\,\mathrm{Mod}\,.\,c>a\,.\,c>b\,.\supset.\,c>a-b\,.$	(» P34)

Congruenze rispetto a un dato modulo. — Due numeri (algebrici) $x\,,y$ si dicono *congruenti* rispetto a un modulo a (e si scrive $x\equiv y\,.(\mathrm{Mod}\,.\,a)$) quando la loro differenza appartiene a questo modulo. Si ha dunque:

$$x\,,y\,\varepsilon\,\mathrm{alg}\,.\,a\,\varepsilon\,\mathrm{Mod}\,.\supset:x\equiv y\,(\mathrm{Mod}\,.\,a)\,.=.\,x-y\,\varepsilon\,a\,.$$

Di queste due notazioni equivalenti, la prima è però meno semplice della seconda, e perciò non ce ne siamo serviti affatto. L'introduzione di essa avrebbe permesso soltanto di dare nuova forma a proposizioni già enunciate, p. e.

$$x\,\varepsilon\,\mathrm{alg}\,.\,a\,\varepsilon\,\mathrm{Mod}\,.\supset.\,x\equiv x\,(\mathrm{Mod}\,.\,a)\,.\qquad(\S7\,.\,\mathrm{P3})$$

o di enunciarne anche qualche altra, apparentemente nuova, ma già contenuta sostanzialmente nella definizione di modulo; p. e.

(1) Di questa, e dell'altra $a-b$, DEDEKIND aveva già fatto uso nella «*Festschrift*»: *Ueber die Anzahl der Ideal-Classen* ... (Braunschweig, 1877).

$$x\,,\,y\,,\,z\,\varepsilon\,\mathrm{alg}\,.\,a\,\varepsilon\,\mathrm{Mod}\,.\,x \equiv y\,,\,y \equiv z\,(\mathrm{Mod}\,.\,a)\,.\supset.\,x \equiv z\,(\mathrm{Mod}\,.\,a)\,.$$
$$x,y,x',y'\,\varepsilon\,\mathrm{alg}\,.\,a\,\varepsilon\,\mathrm{Mod}.x \equiv x',\,y \equiv y'\,(\mathrm{Mod}.a).\supset.\,x \pm y \equiv x' \pm y'\,(\mathrm{Mod}\,.\,a)\,.$$

Il concetto primo di *congruenza* introdotto da GAUSS viene a rientrare precisamente in quello così definito; perchè, se x, y, a sono numeri naturali, la scrittura $x \equiv y\,(\mathrm{Mod}\,.\,a)$ significa che la differenza $x - y$ è un multiplo di a, e appartiene perciò al modulo (n a) formato da questi multipli.

La notazione delle congruenze si potrebbe forse usare con qualche vantaggio nel § 16, scrivendo p. e.

$$x \equiv y\,(\mathrm{id}\,.\,a)\,.=.\,o\,(x-y) \supset a\,.\ (^1)$$

La P1 assumerebbe allora quest'altra forma:

$$x \equiv y\,,\,x' \equiv y'\,(\mathrm{id}\,.\,a)\,.\supset.\,xx' \equiv yy'\,(\mathrm{id}\,.\,a)\,;$$

ossia: *Congruenze rispetto a uno stesso* IDEALE *si possono anche moltiplicare membro a membro* (e, in particolare, si possono elevare a una potenza qualunque intera e positiva). E la P2:

$$xy \equiv xy'\,(\mathrm{id}\,.\,a)\,.\,ox + a = o\,.\supset.\,y \equiv y'\,(\mathrm{id}\,.\,a)\,.$$

Si può dividere cioè tutta una congruenza per un numero che sia primo coll'ideale (caso particolare del *modulo*); e la P4 direbbe poi ancora che: *Una congruenza* $xu \equiv y\,(\mathrm{id}\,.\,a)$ *ammette sempre una soluzione* u *quando il coefficiente* x *è primo coll'ideale* a.

Ideali primi fra loro (*relative Primideale*). — Si chiamano così due (o più) ideali (di un corpo h) aventi per massimo comun divisore lo stesso ideale $o = h \frown \mathrm{A}$ (ideale *unità*) (§11 . P9). Possiamo scrivere:

$$a\,,\,b\,\varepsilon\,\mathrm{id}'\,h\,.\supset.\,a\,\pi\,b\,.=.\,a + b = o\,.$$

La P1 del §13 dice allora che il minimo multiplo comune di due ideali primi fra loro è lo stesso loro prodotto, e inversamente. E altre analogie colla teoria dei numeri primi ordinari si troveranno anche facilmente.

Un ideale a (del corpo h) e un numero x (contenuto in $o = h \frown \mathrm{A}$) si potranno dire *primi fra loro* quando sono primi fra loro gli ideali a e ox, quando cioè $a + ox = o$. È in questo senso appunto che abbiamo usata poc'anzi (a proposito del § 16) questa stessa locuzione.

E la P12 del § 13 dice allora che due numeri algebrici interi x, y

(1) In queste congruenze scriviamo semplicemente id (rispetto all'ideale...) anzichè id'h.

di un corpo h sono primi fra loro, secondo la definizione del § 3 . P4 (1), quando sono primi gli ideali ox e oy (essendo sempre $o = h \frown \mathrm{A}$).

Ideali equivalenti fra loro. — Alla definizione di *equivalenza* data nel § 17 . P1 conviene aggiungere a volte la condizione, che il quoziente dei due numeri x, y di cui alla successiva P3 abbia norma positiva (cfr. anche DEDEKIND, p. 578). Allora ciascuna delle classi I si spezza in due altre.

A quanto ho detto finora aggiungerò poche altre osservazioni.

Il concetto di *numero algebrico* è il primo e il più semplice fra quelli che si spingono più in là di quello semplicissimo di *numero razionale.* La definizione di numero algebrico fu già data nella Parte VI del Formulario (§1 . P8) per cura dell'egregio Dr. G. VIVANTI; e questa definizione coincide anche sostanzialmente con quella ch'io ora ne ho data al § 1 . P3 (cfr. anche la successiva P4'). Io scrivo soltanto, per brevità, alg invece di N alg.

Nel § 1 . P22, dove è accennato il quoziente x/y, è supposto esplicitamente y diverso da zero. Eguale ipotesi è fatta anche, più avanti, nella definizione di *Corpo* (per non includere in quest'ultimo degli infiniti). — La P22 del § 1 dice anche, implicitamente, che è numero algebrico ogni funzione razionale, a coefficienti razionali, di uno o più numeri algebrici.

Le P11, 12 del § 3 trovano in questo § il loro posto naturale, ma non si possono dimostrare che coll'aiuto di altre proposizioni, che compariranno solo più avanti, negli ultimi §§ (cfr. anche DEDEKIND, pp. 534 e 577).

Nella definizione di *Corpo* (§4 . P1) — e così in quella di *Modulo* (§ 7 . P1) — si è introdotta la condizione K alg, che cioè i numeri del *Corpo* (rispett. *Modulo*) siano tutti algebrici. Ma molte delle proposizioni enunciate pei *Corpi* e *Moduli* continuerebbero a sussistere anche quando detta condizione fosse tolta; noi l'abbiamo messa, perchè erano appunto i corpi e moduli di numeri algebrici quelli che più ci interessavano, e ai quali poi avremmo dovuto limitarci.

Il concetto di *Corpo* è uno di quelli che hanno maggiore importanza e compaiono più spesso in tutta la matematica moderna. « *Dieser Name* », dice il DEDEKIND, « *soll, ähnlich wie in den Naturwissenschaften, in*

(1) Coll'avvertenza che anche i numeri u e v, di cui in questa definizione, devono ora essere contenuti in $o = h \frown \mathrm{A}$.

« *der Geometrie, und im Leben der menschlichen Gesellschaft, auch* « *hier ein System bezeichnen, das eine gewisse Vollständigkeit, Voll-* « *kommenheit, Abgeschlossenheit besitzt, wodurch es als ein organisches* « *Ganzes, als eine natürliche Einheit erscheint* ». Dal DEDEKIND infatti anche KLEIN ha preso il nome di *Corpo*, per indicare l'insieme degli enti che nascono da una data figura qualsiasi, applicandole successivamente le diverse trasformazioni di un certo *gruppo* (cfr. l'opuscolo: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*; Erlangen, 1872; o anche la traduzione italiana negli Annali di Matematica, s. 2ª, t. XVII, nota a pag. 320). Il concetto di *Corpo* coincide anche sostanzialmente con quello di *Rationalitätsbereich* (campo di razionalità) introdotto da KRONECKER nella sua « *Festschrift* »: *Grundzüge einer arithm. Theorie der algebraischen Grössen* (Journal de Crelle, t. 92, 1882). E l'osservazione acutissima, che il sistema delle funzioni algebriche sopra una data *superficie di Riemann* si può anche considerare come un corpo, informa tutta la Memoria: *Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen* dei Sigg. DEDEKIND e WEBER (Journal de Crelle, t. 92).

La P5 del § 4 definisce anche il *numero algebrico rispetto a un dato corpo di numeri*, e la P6′ (altra forma della §1 . P23) dice che *un numero algebrico rispetto al corpo dei numeri algebrici è anche algebrico nel senso ordinario.* — Si potrebbe definire in modo analogo anche il *numero algebrico di ordine n rispetto a un dato corpo h* $= \mathrm{alg}'_n h$. Ma, per semplicità, possiamo ricorrere a un'altra notazione, introdotta più avanti (§ 5 . P3), e scrivere:

$$n \varepsilon \mathrm{N} . h \varepsilon \Omega_n . \supset . \mathrm{alg}'_n h = \mathrm{alg}' h \frown \overline{x \varepsilon} [(1, x, \ldots x^{n-1}) \varepsilon \mathrm{irr}' h . (1, x, \ldots x^n) - \varepsilon \mathrm{irr}' h].$$

Allora si hanno anche le due proposizioni seguenti:

$$n \varepsilon \mathrm{N} . \supset . \mathrm{alg}'_n \mathrm{r} = \mathrm{alg}_n .$$
$$h \varepsilon \Omega . \supset . \mathrm{alg}'_1 h = h .$$

Al *Corpo normale* (§ 4 . P23) si dà a volte anche il nome di *Corpo di* GALOIS.

Nella definizione di *Modulo* (§ 7 . P1) possiamo limitarci a far comparire la differenza $x - y$ di due numeri in esso modulo contenuti, omettendo la somma, e scrivendo perciò:

$$\mathrm{Mod} = \mathrm{K}\,\mathrm{alg} \frown \overline{k \varepsilon} \,(x, y \varepsilon k . \supset_{x,y} . x - y \varepsilon k).$$

Infatti da questa definizione segue tosto, supposto $y = x$, la P3:

$$a \varepsilon \mathrm{Mod} . \supset . 0 \varepsilon a .$$

E quindi:

$$a \varepsilon \mathrm{Mod} . x \varepsilon a . \supset . [0 - x = -x] \varepsilon a .$$
$$a \varepsilon \mathrm{Mod} . x, y \varepsilon a . \supset . [x - (-y) = x + y] \varepsilon a ;$$

la parte cioè di definizione che avevamo omessa.

Il modulo n viene indicato dal DEDEKIND colla lettera tedesca $\mathfrak{z}$.

Il modulo $a^0 = a/a$ vien detto *ordine di a*. Le ultime proposizioni del § 8 mostrano che le moltiplicazioni e divisioni di potenze di un *modulo proprio* (P64), o anche di più moduli proprii, purchè aventi uno stesso *ordine*, godono di proprietà analoghe a quelle delle operazioni corrispondenti sui *numeri* (reali o complessi).

Scriviamo (§ 9 . P3 e seg.) R (b, a) invece di (b, a) (cfr. DEDEKIND, p. 509), perchè, secondo le convenzioni già adottate, (b, a), con o senza parentesi, rappresenta semplicemente la *coppia di enti b ed a*. — Siccome la classe rappr (b, a) (§ 9 . P1) non può essere nulla, così il numero degli individui in essa contenuti o è un N, o è infinito; il simbolo R (b, a) risulta quindi definito dalle P3 e P4 in tutti i casi. La convenzione contenuta nella P4 è opportuna ad evitare eccezioni nelle proposizioni successive.

La definizione di *modulo finito di ordine n* (§ 10 . P7) non coincide perfettamente con quelle date dal DEDEKIND a pag. 494. Stando a quest'ultima, un modulo finito di ordine n potrebbe sempre considerarsi anche come di un ordine qualunque superiore a n. Più avanti però anche il DEDEKIND trova opportuna una definizione più precisa (come la nostra).

Le P4 e P5 del § 11 non formano in sostanza che una proposizione sola, enunciabile nei due modi indicati. Si potrebbe anche aggiungere che le y, di cui alla P5, sono funzioni razionali delle x; proprietà questa che non abbiamo fatta risultare dalla formula, per evitare l'introduzione di troppi concetti (polinomio intero, funzione razionale di più variabili, ...) che qui sarebbero stati necessarî, ma non ci avrebbero poi servito ulteriormente.

I termini *numero decomponibile* e *numero primo*, di cui al § 11 . P24 e seg., si riferiscono soltanto (per così dire) al corpo h, e quindi al modulo $o = h \frown \mathrm{A}$, dal quale ora non vogliamo escire. Di numeri algebrici *primi* (e quindi anche *indecomponibili*) in senso veramente *assoluto*, non ne esistono (cfr. anche DEDEKIND, p. 534).

È notevole la P28: *Nel modulo o possono esistere dei numeri indecomponibili* (rispetto allo stesso modulo) *e in pari tempo non primi.* Questa proposizione fa cadere (per i numeri contenuti in *o*) quella sull'unicità della scomposizione in fattori indecomponibili; non si può cioè escludere l'esistenza (in *o*) di numeri, per i quali detta scomposizione possa effettuarsi in due modi essenzialmente diversi. Questo fatto non si presenta invece nel sistema dei numeri naturali (quando cioè il corpo h sia quello dei numeri *razionali*), e in ogni altro caso in cui i concetti di *numero primo* e di *numero indecomponibile* vengano a coincidere.

Fu Kummer il primo ad accorgersi di questa differenza importantissima, differenza che a lui riescì di sopprimere mercè l'introduzione dei suoi *numeri ideali* (Journ. de Crelle, t. 35). Allo stesso scopo mira anche la *teoria degli ideali* di Dedekind, alla quale sono dedicati i §§ 12-17 di questa parte IX; e questo scopo viene qui raggiunto sostituendo alla considerazione dei singoli numeri quella di *interi sistemi di numeri* (i nostri *ideali*; § 12 . P1). Ma la P32 del § 17 dice poi, che ogni ideale può considerarsi come il sistema dei numeri contenuti in o e divisibili per un certo numero x, che può anche essere un così detto *numero ideale* (P31), ma è in ogni caso qualcosa di ben definito, sicchè, dalla considerazione degli *ideali*, torniamo infine a quella dei *numeri*; ma di numeri formanti un sistema opportunamente ampliato, e che più non presenta l'inconveniente prima riscontrato.

Altre ricerche in questo stesso senso furono fatte dal Kronecker; di queste il Prof. Weber si è occupato nelle lezioni dello scorso semestre estivo.

Osserverò ancora, infine, che le due ultime proposizioni del § 16 estendono rispettivamente l'ordinario *teorema di* Fermat, e il *teorema di* Fermat *generalizzato*.

Colognola ai Colli (Verona), ottobre 1894.

G. Fano.

Notazioni

(oltre quelle già in uso).

Il segno	G_n	si legga	funzione intera di grado n a coefficienti interi, senza fattor comune, il cui primo coefficiente è positivo (§1 P1).
»	G	»	funzione intera a coefficienti interi, id. id. (§1 P2).
»	G_n irr	»	funzione intera di grado n, ... irriduttibile (§1 P6).
»	G irr	»	funzione intera ... irriduttibile (§1 P7).
»	grad	»	grado di (una G) (§1 P 13).
»	coeff_0	»	primo coefficiente di (una G_n) (§1 P19).
»	coeff_n	»	ultimo » » »
»	coeff_r	»	coefficiente di x^{n-r} » »
»	alg	»	numero algebrico (§1 P3).
»	alg_n	»	» » di ordine n (§1 P10).
»	A	»	» » intero (§2 P1).
»	U	»	unità (§2 P7).
»	conj	»	coniugato di (§ 1 P15, § 4 P16).
»	conj′	»	corpo coniugato di (un $\Omega' x$) (§ 4 . P18).
»	norm	»	norma di.
»	π	»	è primo con (§3 P4).
»	Ω	»	corpo (§4 P1).
»	Ω'	»	corpo di (§4 P7, 8).
»	Ω^n	»	» di grado n (§ 5 P4).
»	Ω norm	»	corpo normale (§4 P23).
»	alg′	»	numero algebrico rispetto a (un Ω) (§ 4 P5).
»	irr′	»	sistema irriduttibile rispetto a (un Ω)(§5.P3)
»	B	»	base di (§5 P1, §10 P3).
»	B irr	»	base irriduttibile di (§10 P6).
»	B int	»	base intera di (un Ω) (§6 P7).
»	alg dec	»	numero algebrico decomponibile (in un Ω) (§11 P24).
»	alg pr	»	» » primo (in un Ω)(§11 P26).
»	alg id	»	» » ideale (in un Ω) §17 P31).

»	Mod	»	modulo (§7 P1).
»	Mod prop	»	modulo proprio (§8 P64).
»	Mod fin	»	modulo finito (§10 P1).
»	Mod fin_n	»	modulo finito di ordine n (§ 10 P7).
»	rappr (b, a)	»	rappresentante di b rispetto a(l modulo) a (§9 P1).
»	R (b, a)	»	numero degli elementi di un rappr (b, a) (§9 P3, 4).
»	Δ	»	discriminante di (un Mod) (§ 11 P7).
»	id'	»	ideale di (un Ω) (§12 P1).
»	H'	»	ideale principale di (un Ω) (§12 P15).
»	id pr'	»	» primo di (un Ω) (§14 P1).
»	eq	»	equivalente (due id' fra loro) (§17 P1).

$a \, \varepsilon \, \mathrm{r\,f}(Z_n, Z_n)$ (opp. $\mathrm{n\,f}(Z_n, Z_n), \ldots$) significa che a è una corrispondenza fra coppie di numeri interi variabili da 1 ad n, e numeri razionali (rispett. interi, ecc.). Esso si può leggere: a è una matrice ad elementi razionali (interi, ...) con n orizzontali ed n verticali, nella quale a_{ij} rappresenta l'elemento corrispondente agli indici i e j.

Det a significa allora « Il valore del determinante formato cogli elementi a. ».

F. Castellano. *Lezioni di Meccanica razionale*, Torino, 1894, pag. 512.

Lo scrivere un trattato di meccanica razionale ad uso di allievi che se ne servono al solo scopo di studiare meccanica applicata, è al giorno d'oggi un'impresa che presenta gravi difficoltà.

I concetti e i principii fondamentali della Meccanica diedero luogo ad infinite discussioni che non sono punto esaurite; anzi frequentissime sono le pubblicazioni in cui si propone di schiarirli, ovvero di fondare la meccanica su nuove basi. Per dare un'idea della varietà di opinioni basta citare il parallelogrammo delle forze, che da una schiera di valenti matematici vien dimostrato; mentrechè un'altra schiera di egualmente valenti matematici lo ritiene come un postulato, e qualche volta lo si dà come definizione. Lo stesso è a dirsi del principio delle velocità vistuali (*).

A questa prima difficoltà si ovvia adottando, nelle questioni soggette a controversia, l'opinione più diffusa, e così fa il nostro autore. Ma difficoltà d'altra natura, e non lievi, si presentano ancora a chi voglia scrivere un trattato scolastico. Le scienze su cui la Meccanica basa, quale il calcolo infinitesimale, subirono in questi anni più trasformazioni. Ad es. nel calcolo furono messe in dubbio molte proposizioni prima ritenute vere; e queste stesse proposizioni furono poi riconosciute esatte, purchè più liberamente intese, e non secondo le definizioni e restrizioni, qualche volta artificiose, imposte solo più tardi; tuttavia molte proposizioni di calcolo sono oggigiorno accompagnate da condizioni restrittive minute, e che non si sanno sostituire con altre più semplici, nè si possono togliere senza rendere inesatti i teoremi.

Il prof. Castellano ebbe la ventura di essere, durante la sua carriera d'insegnamento, successivamente assistente di Algebra, di Geometria analitica, di Calcolo infinitesimale e di Meccanica razionale presso

(*) Veggasi ad es. Hertz, *Die Prinzipien der Mechanik*, 1894. L'A. dopo aver fatte a pag. 8 le osservazioni che precedono, conchiude: « In una scienza logicamente completa, nella matematica pura una tale differenza di opinioni è inconcepibile ». Veggasi pure Mach, *The science of mechanics*, 1893, dove sono accuratamente esaminate tutte le dimostrazioni date da Archimede in poi, per provare le leggi fondamentali della meccanica, e vi si nota dappertutto la loro origine sperimentale.

l'Ateneo torinese; potè così farsi una chiara idea dei metodi scientifici e didattici più moderni. In seguito da vari anni professa Meccanica razionale presso la R. Accademia militare, sicchè fu in caso di pubblicare pei suoi allievi l'attuale trattato di meccanica, che soddisfa sia sotto l'aspetto scientifico che quello didattico ad ogni più minuta esigenza.

Questo trattato è preceduto da una introduzione di 8 pagine, in cui sono richiamate le operazioni sui vettori, delle quali si fa nel seguito ampio uso. È appunto questa la caratteristica che più differenzia questo libro dai comuni trattati di meccanica; e non esitiamo punto ad affermare, che ciò costituisce nel libro del nostro Autore uno dei più notevoli progressi che si siano fatti in questi anni nella esposizione della Meccanica. E siccome questo è il punto capitale del libro, sarà bene arrestarci alquanto, senza pretendere di fare qui la storia del Calcolo geometrico, da cui derivano queste notazioni (*).

Da quasi mezzo secolo l'Hamilton introdusse il nome nuovo *vettore* per indicare un ente geometrico speciale già studiato dal nostro Bellavitis; oltre alle operazioni già note, definì il quoziente di due vettori che chiamò *quaternione*, sul quale introdusse un gruppo di operazioni (scalare, vettore, tensore, versore,...) e ne rilevò l'utilità con elegantissime applicazioni a questioni geometriche, e specialmente di meccanica razionale e superiore.

L'Hamilton era, oltre che valente matematico, valente insegnante, ed espose con chiarezza le sue teorie; quindi numerosi autori lo seguirono per la via indicata, e basti menzionare il Maxwell che espresse coi quaternioni tutte le formule del suo celeberrimo libro sull'elettricità e sul magnetismo.

E qualche anno prima di Hamilton, H. Grassmann fondava la scienza dell'estensione. Limitandoci alla geometria, egli introdusse degli enti geometrici formati con legge uniforme e di cui i vettori sono caso particolare, e su questi in sostanza due sole operazioni, l'addizione e la moltiplicazione; sicchè il calcolo di Grassmann è estremamente semplice e analogo al calcolo algebrico sui monomii e polinomii.

Il Grassmann diede alla Meccanica uno strumento di ricerca potentissimo, e ben a ragione il Mach, nel libro citato, comincia con Archimede l'elenco delle persone che diedero un notevole impulso alla Meccanica, e lo termina con Grassmann. Ma la forma nebulosa e di difficilissima lettura, con cui il Grassmann espose le sue teorie, non ne

(*) Nel libro dell'Hagen, *Synopsis der höheren Mathematik*, t. II, a. 1894, p. 128-156 trovasi una esposizione chiara e completa, quantunque concisa, dei varii metodi di calcolo geometrico finora proposti.

attirò i lettori; durante la sua vita i suoi libri furono poco stimati, ed egli non potè nemmeno veder soddisfatto il suo desiderio di venir nominato insegnante in una Università, onde poter insegnare le sue teorie a menti giovanili, più aperte alle teorie nuove e sintetiche. Solo in quest'ultimo decennio i libri del Grassmann furono più ampiamente studiati, lasciando una viva ammirazione in quanti compirono il faticoso lavoro di penetrarvi dentro. È numerosa sempre più si fa la schiera delle persone che applicano i metodi di Grassmann a varie teorie, e specialmente a questioni di Meccanica.

Ma se numerosissime sono le persone che ritengono utilissimi alla Meccanica il calcolo di Hamilton o quello di Grassmann, e lo provarono con tante applicazioni, finora quei metodi non penetrarono nell'insegnamento nè nei libri scolastici.

La maggior parte dei trattati di Meccanica, copiandosi l'uno sull'altro, rimasero estranei ad ogni idea nuova. Però già numerosi sono quelli in cui si introducono i vettori. Ma spesso si usano metodi ibridi e notazioni difettose. Così mentre Hamilton coniò il nome nuovo *vettore* per distinguere l'ente geometrico, oggetto dei suoi calcoli, da ogni altro affine, ottenendo così una gran chiarezza, il sig. Appell (*Traité de Mécanique rationnelle,* Paris 1893) chiama vettore un ente che non è il vettore di Hamilton, ma bensì l'insieme d'un punto e d'un vettore, e fa su questi enti delle operazioni più complicate di quelle di Hamilton e di Grassmann, e finisce per farne pressochè nessun uso nel suo libro.

I vettori dell'Appell coincidono cogli *angeheftete Vectoren* del Budde (*Allgemeine Mechanik*, Berlin, 1890-91). Questi considera inoltre i *freie Vectoren* (I pag. 11) e i *linienflüchtige Vectoren* (II pag. 168), introducendo tre specie di addizioni, indicate con tre segni diversi, e in conseguenza pure tre specie di sottrazioni, ed a rigore avrebbe altresì dovuto introdurre tre specie di eguaglianze, rendendo estremamente complicato quello che è semplicissimo. Osservazioni analoghe si possono fare sul trattato dello Schell, *Th. d. Bewegung*, ecc., 2ª ediz.

Il Resal (*Traité de cinématique pure*, a. 1862, pag. 18) indipendentemente dagli autori menzionati, introduce una notazione pei vettori e loro somma, la quale è seguita dal Somoff (*Theoretische Mechanik*, 1878) pag. 10. Ma questa notazione è difettosa. Invero si indica con u la lunghezza d'un segmento, e con $\overline{u}$ il segmento considerato in grandezza, direzione e verso, cioè il vettore. Ora la lunghezza d'un vettore è funzione del vettore, ma non viceversa; quindi è permesso, indicando un vettore con un segno, di indicare colla combinazione di questo stesso segno e di un altro, la lunghezza del vettore, ma non viceversa; altrimenti, essendo 2 la lunghezza d'un vettore, si potrà avere la scrittura $\overline{2}$ che non ha alcun senso determinato. Quindi benchè questi autori si servano elegantemente delle loro notazioni, senza mai cadere in equivoci, pure questi si possono produrre, e si produrrebbero certamente in un insegnamento scolastico.

Se adunque da tanti indizi risultava chiaramente la possibilità di trattare la meccanica con metodo semplice ed uniforme colla teoria dei vettori, spetta al Castellano il merito di aver tradotto questa possibilità in atto. Il nostro Autore non si servì di tutti gli enti geometrici introdotti dal Grassmann, ma semplicemente dei vettori, dei prodotti di due vettori, o bivettori, e loro indici, e dei prodotti di tre vettori, o trivettori. In conseguenza se a e b sono vettori, $a|b$ e $|ab$ rappresentano rispettivamente ciò che nella teoria dei quaternioni chiamasi *scalare cambiato di segno*, e *vettore* del prodotto dei vettori a e b; queste due operazioni $a|b$ e $|ab$ si presentano continuamente nella meccanica ed è già stato osservato che ciò che si presenta naturalmente è $a|b$, cioè lo scalare cambiato di segno, e non lo scalare col proprio segno (*).

Nulla si può immaginare di più semplice di queste idee; però se esse derivano dalla teoria generale del Grassmann, limitate a quanto precede sono gloria italiana, poichè a meno del nome, dobbiamo i vettori al BELLAVITIS, ed i bivettori al CHELINI (**).

Usando, con quella precisione che è necessaria nella matematica, di queste poche operazioni, l'A. sviluppa l'intera meccanica con notevole semplicità rispetto ai trattati precedenti, in cui si fa uso costante delle coordinate. Se in problema di meccanica si presentano naturalmente tre assi, ci sarà convenienza di scomporre i vari vettori secondo questi tre assi, ed il metodo dei vettori coinciderà con quello delle coordinate. In ogni altro caso il metodo seguito dal nostro Autore è più semplice di quello ordinario. Questa semplicità si manifesta apparentemente col fatto che Egli in generale scrive una sola equazione invece di tre, e che quella sola è più breve di ognuna di queste tre. Ma il vantaggio reale è assai più importante di questa semplificazione di scrittura; e sta nel fatto che sempre si ragiona sugli enti che compaiono nel problema, senza aver bisogno di introdurre nel ragionamento assi estranei alla questione. Le formule ottenute hanno tutte la proprietà invariantiva; nè questa proprietà ha bisogno di prova; siccome si sono ottenute senza introdurre assi coordinati, esse risultano indipendenti dalla scelta di questi.

Ad esempio paragoniamo le definizioni di velocità e di accelerazione d'un punto mobile date dal Castellano con quelle date dal KIRCHHOFF

(*) Vedi nota in fine.

(**) *Saggio di Geometria analitica trattata con nuovo metodo*, Roma, 1838, pag. 39 e 44.

(*Mechanik*, Leipzig, 1883). Il primo (pag. 20) determina la velocità e l'accelerazione mediante la derivata prima e seconda del punto; e la derivata è sempre il limite del rapporto dell'incremento della funzione all'incremento della variabile. Il secondo (pag. 2-6), per introdurre questi enti, comincia a riferire il punto ad assi cartesiani ortogonali, e dette x, y, z le sue coordinate, chiama (pag. 3) grandezza della velocità il valore aritmetico di

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

e sua direzione, la direzione della retta che fa cogli assi coordinati angoli aventi per coseni

$$\frac{\dfrac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\ldots}}, \ldots$$

e poi fa una trasformazione di assi e un lungo calcolo per provare che la velocità così definita dipende solo dal moto del punto, e non dal sistema di coordinate. E la stessa questione si ripresenta nelle successive pagine per l'accelerazione. Così si vede che due righe del Castellano bastano ad esprimere chiaramente e completamente ciò che il Kirchhoff esprime in più pagine; colla prima via non c'è nulla a dimostrare, nella seconda sonvi lunghi calcoli a giustificare le definizioni date. La stessa questione si presenta una terza volta a pag. 15 del Kirchhoff, e così via.

Il Kirchhoff si mette per una via lunghissima, però la percorre rigorosamente. Ma sonvi altri Autori, anche di Calcolo infinitesimale, che dànno definizioni p. es. per la lunghezza d'un arco o per l'area di una superficie, nelle quali entrano esplicitamente gli assi coordinati, e si dimenticano poi di provare che ciò che è definito è un ente collegato colla sola figura oggettiva, e indipendente dagli assi coordinati.

Possiamo pure paragonare il primo esempio di moto studiato dal Kirchhoff (pag. 6, 7) colla trattazione del Castellano. Esso è il moto d'un punto pesante supposta costante la gravità. Il primo sceglie tre assi, quello delle z verticale, integra le tre equazioni differenziali; eliminando convenientemente il tempo, trova che la traiettoria è piana; riferisce allora la curva a due assi in questo piano, e continua il suo ragionamento. Il Castellano (pag. 28) invece scrive l'equazione

$$P'' = \alpha,$$

che integrata dà successivamente

$$P' = P'_0 + \alpha t$$

$$P = P_0 + t P'_0 + \frac{\alpha}{2} t^2$$

la quale equazione esprime tutte le proprietà cercate del moto.

Il lettore può consultare la teoria del moto centrale data dal Kirchhoff a pag. 7 e segg. con quella del Castellano a pag. 30 e segg.; e si possono indefinitamente moltiplicare gli esempi, poichè non c'è pagina del libro del prof. Castellano che non porti una notevole semplificazione rispetto alla trattazione comune, e non solo una semplificazione di scrittura, ma essenzialmente una semplificazione di concetti e di ragionamenti. Mai prima di questo libro si è così ben applicato il principio meccanico del minimo sforzo all'insegnamento della meccanica stessa.

Daremo ancora un rapido cenno della distribuzione della materia. La parte I è dedicata alla Cinematica. Sono a notarsi (Cap. I) la facilità con cui si ottengono le proprietà delle accelerazioni tangenziale e normale del moto odografo. Le considerazioni sulle derivate, sulle tangenti, piani osculatori, ecc., che nei trattati di meccanica (e anche in qualche trattato di calcolo) sono fatte in generale un po' all'ingrosso, sono invece qui sviluppate con rigore insuperabile. Nel Cap. II, cinematica dei corpi rigidi, si può notare la semplicità con cui si ottengono le formule di Eulero per la rotazione dei corpi solidi; nel cap. III si trovano per via elegante le coordinate dell'accelerazione d'un corpo rotante attorno ad un punto (pag. 85); nel cap. IV si ottengono per via semplicissima le velocità ed accelerazioni del moto composto.

La parte II è la statica e dinamica del punto materiale. La relazione fra la risultante di più forze e il baricentro di più punti è ridotta ad una identità (pag. 173). Si può notare l'eleganza del problema a pag. 174 sul moto centrale d'un punto per mezzo del suo odografo, lo studio del moto d'un grave in un mezzo resistente (pag. 191), l'equazione di Binet (pag. 212).

La parte III è la meccanica dei sistemi materiali. Sono semplici le formule generali pei volumi materiali a pag. 281, ed elegante è la determinazione del potenziale a pag. 284. La teoria dei baricentri è tutta notevolmente semplificata (pag. 291); come pure la riduzione d'un sistema di forze applicate ad un corpo rigido (pag. 350), il significato geometrico dell'invariante (pag. 378, 380), la teoria dei poligoni funiculari (pag. 397), delle curve funiculari (pag. 401), la dinamica dei sistemi (pag. 409); nel cap. XIX l'A. sviluppa la dinamica dei sistemi rigidi, il moto d'un corpo avente un punto fisso; integra le equazioni nel caso in cui è nullo il momento delle forze rispetto al punto fisso, ecc. Il cap. XX tratta delle percosse e degli urti, e il cap. XXI tratta del principio dei lavori virtuali e finisce colle equazioni del moto di Lagrange.

Si può indicare qualche menda al libro; trovansi errori di stampa e di scrittura; molti sono rilevati nell'errata-corrige, ma alcuni sono ancora sfuggiti, e potranno essere corretti in un'errata supplementare. Indicherò quello a pag. 275, linea 15ª, dove invece di *coordinate cartesiane* si deve leggere *distanze mutue* (POINSOT, *Statique*, 1836, p. 303) ovvero *coordinate di configurazione* (HERTZ, l. c., pag. 58), poichè questo errore di scrittura può far fraintendere il libro da chi lo legga un po' sommariamente. Ma tutto insieme questi errori di stampa e di scrittura sono meno numerosi di quello che si possa temere in una prima edizione di un libro di oltre 500 pagine.

La parte III tratta dei sistemi materiali e dei vincoli andando dal particolare al generale; e questa via che ha i suoi vantaggi quando si debbano trattare pochi casi particolari, come probabilmente farà l'A. nel suo insegnamento, si presenta, a mio avviso, meno comoda del cammino inverso, avendosi a trattare l'intera materia, come ha finito di fare il Castellano nel suo libro.

In conclusione, trattando la meccanica per via nuova, il Castellano fece l'importante lavoro di semplificare non solo le formule, ma gran parte dei ragionamenti; in tal modo egli, pure sviluppando minutamente i singoli passaggi, e specialmente quei punti su cui maggiormente si deve fermare l'insegnante, potè nel suo volume raccogliere grande quantità di proposizioni ed esempi. Noi siamo certi che il libro del Castellano avrà un onorevole posto nello sviluppo della meccanica, specialmente sotto l'aspetto didattico.

G. PEANO.

Nota.

Le operazioni considerate sui vettori si presentarono direttamente a molti studiosi; e ne risultò una varietà di denominazioni e notazioni, di cui qui diremo qualche cosa.

Il bivettore ab chiamasi anche da Grassmann *prodotto esterno* dei vettori a e b, il quale lo indicò pure con $a.b$ e con $[ab]$.

L'operazione $a\,|\,b$ fu chiamata dal Grassmann *prodotto interno*; esso si può definire direttamente, come il prodotto delle lunghezze dei due vettori pel coseno dell'angolo compreso; ovvero si può considerare come il prodotto esterno del vettore a per l'indice del vettore b. Sotto il primo punto di vista il segno | figura come segno di moltiplicazione; sotto il secondo punto, esso figura come segno d'operazione distributiva, e nei calcoli si comporta come fattore un costante; ad es. se a e b sono vettori funzioni di t, si ha:

$$\frac{d|(ab)}{dt} = \left|\left(a\frac{db}{dt} + \frac{da}{dt}b\right).\right.$$

Le notazioni usate dal Castellano, che sono quelle stesse del Grassmann, oltre all'essere semplici, presentano ancora il vantaggio che nella loro esposizione è lecito di arrestarsi quando si vuole. Si può definire direttamente il prodotto interno di due vettori; oppure farlo dipendere dal prodotto esterno e dall'operazione | . Presentandosi l'occasione, si può parlare delle forme geometriche di varia specie, dei prodotti di punti, di linee, di superficie, prodotti progressivi o regressivi, fare la teoria delle trasformazioni lineari, appena accennata dal Grassmann, e che acquista ai nostri giorni sempre maggiore importanza, trattare dei numeri complessi d'ordine qualunque, della loro moltiplicazione alternata (onde provengono i determinanti), e delle varie altre specie di moltiplicazione; e così via. A qualunque punto uno si arresti momentaneamente, e da cui voglia poi ripartire, non avrà mai a cambiare le notazioni; poichè queste notazioni sono derivate dalla teoria vastissima e profonda studiata dal Grassmann. Sicchè mai alcuna ambiguità sarà a temersi. Però, estendendosi le definizioni, in uno sviluppo successivo possono comparire come teoremi delle proposizioni che in una teoria parziale si davano come definizioni.

Però il Grassmann stesso, in circostanze speciali, usa varie notazioni. Nella sua *Geometrische Analyse* invece di $a|b$ scrive $a \times b$. Il Macfarlane (*Algebra of Physics*) scrive $\cos ab$ e $\mathrm{Sin}\, ab$ rispettivamente al posto di $a|b$ e $|ab$. Queste due operazioni, specialmente dagli elettricisti, sono pure chiamate prodotto scalare e prodotto vettoriale di a e di b, con termini derivati dai quaternioni.

Intorno ad alcune identità algebriche.

Continuazione e fine.

§ 7.

Nell'ipotesi che m sia un numero pari, si considerino i polinomi

$$A_1 a^m + A_2 a^{m-1} b + \dots + A_m ab^{m-1} + A_{m+1} b^m \tag{15}$$

e

$$A_1 a^m - A_2 a^{m-1} b + \dots - A_m ab^{m-1} + A_{m+1} b^m, \tag{16}$$

ove $A_1, A_2, \dots A_{m+1}$ sono $m+1$ coefficienti arbitrari.

Poichè i polinomi (15) e (16) si permutano l'uno nell'altro se si cangia a in $-a$ o b in $-b$, se n'argomenta che il loro prodotto dovrà contenere solamente potenze pari di a e di b, e che perciò si potrà porre

$$\begin{aligned}(A_1 a^m + A_2 a^{m-1} b + \dots + A_m ab^{m-1} + A_{m+1} b^m)(A_1 a^m - A_2 a^{m-1} b + \dots \\ - A_m ab^{m-1} + A_{m+1} b^m) = \\ C_1 a^{2m} + C_2 a^{2(m-1)} b^2 + C_3 a^{2(m-2)} b^4 + \dots + C_{\frac{m}{2}} a^{m+2} b^{m-2} + C_{\frac{m+2}{2}} a^m b^m \\ + C_{\frac{m+4}{2}} a^{m-2} b^{m+2} + \dots + C_{m-1} a^4 b^{2(m-2)} + C_m a^2 b^{2(m-1)} + C_{m+1} b^{2m}.\end{aligned} \tag{17}$$

È facile poi stabilire che i valori delle C_r sono dati da:

$$C_1 = A_1^2$$
$$C_2 = 2 A_1 A_3 - A_2^2$$
$$C_3 = 2 A_1 A_5 - 2 A_2 A_4 + A_3^2$$

. . . .

$$C_{\frac{m}{2}} = 2 A_1 A_m - 2 A_2 A_{m-1} + 2 A_3 A_{m-2} - \dots - (-1)^{\frac{m}{2}} A^2_{\frac{m}{2}}$$

$$C_{\frac{m+2}{2}} = 2 A_1 A_{m+1} - 2 A_2 A_m + 2 A_3 A_{m-1} - \dots - (-1)^{\frac{m+2}{2}} A^2_{\frac{m+2}{2}}$$

$$C_{\frac{m+4}{2}} = 2\,A_3\,A_{m+1} - 2\,A_4\,A_m + 2\,A_5\,A_{m-1} - \ldots - (-1)^{\frac{m+4}{2}}\,A^2_{\frac{m+4}{2}}$$

. . . .

$$C_{m-1} = 2\,A_{m-3}\,A_{m+1} - 2\,A_{m-2}\,A_m + A^2_{m-1}$$
$$C_m = 2\,A_{m-1}\,A_{m+1} - A^2_m$$
$$C_{m+1} = A^2_{m+1}\,.$$

La formula (7) del § 5 è un caso particolare della (17), da cui si deduce supponendovi $A_1 = A_2 = \ldots = A_{m+1} = 1$.

Se nella (17) si pone $m = 2$ e s'invertono i due membri, si ha la formula (18)

$$A_1^2 a^4 + (2A_1A_3 - A_2^2)a^2b^2 + A_3^2 b^4 = (A_1a^2 + A_2ab + A_3b^2)(A_1a^2 - A_2ab + A_3b^2)$$

di cui un solo caso speciale è registrato nel *Formulario*. Ed invero, posto $A_1 = 1$, $A_2 = A_3 = 2$, si trova

$$a^4 + 4\,b^4 = (a^2 + 2\,ab + 2\,b^2)\,(a^2 - 2\,ab + 2\,b^2)$$

che è la formula n° 59 della pag. 14.

Ma se non si richiede che i coefficienti A_1, A_2, A_3 siano reali, i valori numerici ora trovati non sono i soli che rendono $A_1^2 = 1$, $2\,A_1\,A_3 - A_2^2 = 0$, $A_3^2 = 4$, giacchè queste equazioni sono altresì soddisfatte da $A_1 = 1$, $A_2 = 2\sqrt{-1}$, $A_3 = -2$; onde si ha pure

$$a^4 + 4\,b^4 = (a^2 + 2\,ab\sqrt{-1} - 2\,b^2)\,(a^2 - 2\,ab\sqrt{-1} - 2\,b^2)\,.$$

Ed in questa formula, o nella precedente, si ricade anche assegnando ad A_1, A_2, A_3 i valori contrari a quelli testè loro dati.

§ 8.

Allorchè m è un numero dispari, e si considerano i polinomi

(19) $$A_1\,a^m + A_2\,a^{m-1}\,b + \ldots + A_m\,ab^{m-1} + A_{m+1}\,b^m$$

e

(20) $$A_1\,a^m - A_2\,a^{m-1}\,b + \ldots + A_m\,ab^{m-1} - A_{m+1}\,b^m$$

trovasi, in corrispondenza della (17), la formula analoga:

(21) $$(A_1\,a^m + A_2a^{m-1}\,b + \ldots + A_m\,ab^{m-1} + A_{m+1}\,b^m)\,(A_1a^m - A_2a^{m-1}\,b + \ldots + A_m\,ab^{m-1} - A_{m+1}\,b^m) =$$
$$C_1\,a^{2m} + C_2\,a^{2(m-1)}\,b^2 + C_3\,a^{2(m-2)}\,b^4 + \ldots + C_{\frac{m+1}{2}}\,a^{m+1}b^{m-1} - C_{\frac{m+3}{2}}\,a^{m-1}\,b^{m+1} - \ldots - C_{m-1}\,a^4\,b^{2(m-2)} - C_m\,a^2\,b^{2(m-1)} - C_{m+1}b^{2m}\,,$$

nella quale le C_r hanno i seguenti valori:

$$C_1 = A_1^2$$
$$C_2 = 2\,A_1\,A_3 - A_2^2$$
$$C_3 = 2\,A_1\,A_5 - 2\,A_2\,A_4 + A_3^2$$

. . . .

$$C_{\frac{m+1}{2}} = 2\,A_1\,A_m - 2\,A_2\,A_{m-1} + 2\,A_3\,A_{m-2} - \ldots - (-1)^{\frac{m+1}{2}}\,A^2_{\frac{m+1}{2}}$$

$$C_{\frac{m+3}{2}} = 2\,A_2\,A_{m+1} - 2\,A_3\,A_m + 2\,A_4\,A_{m-1} - \ldots + (-1)^{\frac{m+3}{2}}\,A^2_{\frac{m+3}{2}}$$

. . . .

$$C_{m-1} = 2\,A_{m-3}\,A_{m+1} - 2\,A_{m-2}\,A_m + A^2_{m-1}$$
$$C_m = 2\,A_{m-1}\,A_{m+1} - A_m^2$$
$$C_{m+1} = A^2_{m+1}\,.$$

È ovvio che la formula (11) del § 6 è un caso particolare della (21), e che da questa si possono trarre altre formule, limitando l'arbitrarietà delle A_r. Così, per esempio, se si suppone $m = 3$, e si domanda inoltre che i coefficienti C_1, C_2, C_3, C_4 verifichino le relazioni $C_1 = C_4 = 1$, $C_2 = C_3 = 0$, viene dimostrata direttamente la verità della eguaglianza

$$a^6 - b^6 = (a^3 + 2\,\rho\,a^2\,b + 2\,\rho^2\,ab^2 + b^3)\,(a^3 - 2\,\rho\,a^2\,b + 2\,\rho^2\,ab^2 - b^3)$$

in cui ρ è nullo, oppure è radice dell'equazione $\rho^3 - 1 = 0$.

§ 9.

Per valori pari o dispari di m, le potenze

$$P_1^k = (A_1\,a^m + A_2\,a^{m-1}b + \ldots + A_m\,ab^{m-1} + A_{m+1}\,b^m)^k$$
$$P_2^k = (A_1\,a^m - A_2\,a^{m-1}b + \ldots \pm A_m\,ab^{m-1} \mp A_{m+1}\,b^m)^k$$

con k intero e positivo, sono polinomi omogenei del grado mk, il secondo dei quali non differisce dal primo in altro che nell'avere alternativamente i termini positivi e negativi. Se si pone dunque

$$P_1^k = \sum_{n=1}^{n=mk+1} C_n\,a^{mk-n+1}\,b^{n-1}$$

$$P_2^k = \sum_{n=1}^{n=mk+1} (-1)^{n-1}\,C_n\,a^{mk-n+1}\,b^{n-1}$$

dove le C_n indicano coefficienti che hanno leggi di formazione ben conosciute, si comprende subito che saranno identità notevoli quelle provenienti dalla

$$(22)\quad P_1^k \pm P_2^k = \sum_{n=1}^{n=mk+1} C_n\, a^{mk-n+1}\, b^{n-1} \pm \sum_{n=1}^{n=mk+1} (-1)^{n-1}\, C_n\, a^{mk-n+1}\, b^{n-1}$$

effettuando nel secondo membro tutte le riduzioni che vi hanno luogo dipendentemente dal doppio segno e dalla distinzione della parità o disparità dei numeri m e k.

Così, per esempio, se si suppone $m=1$, e s'indica con k_n il coefficiente binomiale $\dfrac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{1\,.\,2\,.\dots n}$, si trova, nel caso in cui k è pari:

$$(A_1a+A_2b)^k+(A_1a-A_2b)^k=2(A_1^ka^k+k_2A_1^{k-2}A_2^2a^{k-2}b^2+ k_4A_1^{k-4}A_2^4a^{k-4}b^4+\dots+A_2^kb^k)$$

$$(A_1a+A_2b)^k-(A_1a-A_2b)^k=2A_1A_2ab(k_1A_1^{k-2}a^{k-2}+ k_3A_1^{k-4}A_2^2a^{k-4}b^2+\dots+k_{k-1}A_2^{k-2}b^{k-2})$$

e nel caso in cui k è dispari

$$(A_1a+A_2b)^k+(A_1a-A_2b)^k=2A_1a(A_1^{k-1}a^{k-1}+k_2A_1^{k-3}A_2^2a^{k-3}b^2+ k_4A_1^{k-5}A_2^4a^{k-5}b^4+\dots+k_{k-1}A_2^{k-1}b^{k-1})$$

$$A_1a+A_2b)^k-(A_1a-A_2b)^k=2A_2b(k_1A_1^{k-1}a^{k-1}+k_3A_1^{k-3}A_2^2a^{k-3}b^2+ k_5A_1^{k-5}A_2^4a^{k-5}b^4+\dots+A_2^{k-1}b^{k-1})\,.$$

Ed è evidente che alle prime due di queste quattro formule appartengono le identità $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$ ed $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$, registrate nel *Formulario* (pag. 12, nn. 6 e 7).

Anche dai casi di divisibilità del binomio $P_1^k \pm P_2^k$ per $P_1 \pm P_2$ o per $P_1^r \pm P_2^r$, possono essere tratte identità meritevoli di considerazione. Per esempio, se P_1 e P_2 sono i polinomi (15) e (16), la formula $P_1^2-P_2^2=(P_1-P_2)(P_1+P_2)$ dà l'identità:

$$(23)\quad (A_1a^m+A_2a^{m-1}b+\dots+A_mab^{m-1}+A_mb^{m+1})^2-(A_1a^m-A_2a^{m-1}b+ \dots-A_mab^{m-1}+A_{m+1}b^m)^2=4ab(A_2a^{m-2}+A_4a^{m-4}b^2+\dots+A_mb^{m-2}) (A_1a^m+A_3a^{m-2}b^2+\dots+A_{m+1}b^m)\,;$$

e se invece P_1 e P_2 sono i polinomi (19) e (20), dà:

$$(24)\quad A_1a^m+A_2a^{m-1}b+\dots+A_mab^{m-1}+A_{m+1}b^m)^2-(A_1a^m-A_2a^{m-1}b+\dots +A_mab^{m-1}-A_{m+1}b^m)^2=4ab(A_2a^{m-1}+A_4a^{m-3}b^2+\dots+A_{m+1}b^{m-1}) (A_1a^{m-1}+A_3a^{m-3}b^2+\dots+A_mb^{m-1})\,.$$

L'identità

$$(a^2+ab+b^2)^2-(a^2-ab+b^2)^2=4\,ab\,(a^2+b^2)$$

(v. *Formulario*, pag. 13, n° 57) è un caso specialissimo della (23) che si ottiene supponendo $m=2$ ed $A_1=A_2=A_3=1$; mentre con $m=2$, $A_1=A_2=1$ ed $A_3=-1$, si trova:

$$(a^2+ab-b^2)^2-(a^2-ab-b^2)^2=4ab(a^2-b^2)\,,\ \text{ecc.}$$

È manifesto, infine, che si avranno altre identità uguagliando al secondo membro della (22) la decomposizione in fattori del binomio $P_1^k \pm P_2^k$.

§ 10.

Alle surriferite identità generali, alle quali dànno luogo i polinomi (15) e (16) o (19) e (20), ne possono essere unite altre che provengono dai polinomi stessi, quando per particolari relazioni tra i coefficienti A_1, A_2, ... A_{m+1}, avviene che l'una o l'altra coppia di polinomi ammettono divisori comuni.

Sono vere, per un esempio, le seguenti proposizioni:

1ª) *I polinomi* (15) *e* (16), *moltiplicati per* A_2^2 *hanno per massimo comun divisore il polinomio*

$$A_2\,a^{m-2}+A_1\,a^{m-4}b^2+\dots+A_{m-2}\,a^2\,b^{m-4}+A_m\,b^{m-2}$$

se tra i coefficienti A_1, A_2, ... A_{m+1} *sussistono le relazioni:*

$$(25)\quad \frac{A_2A_3-A_1A_4}{A_2}=\frac{A_2A_5-A_1A_6}{A_4}=\dots=\frac{A_2A_{m-1}-A_1A_m}{A_{m-2}}=\frac{A_2\,A_{m+1}}{A_m}\,.$$

2ª) *I polinomi* (19) *e* (20), *moltiplicati per* A_2, *hanno per massimo comun divisore il polinomio*

$$A_2\,a^{m-1}+A_4\,a^{m-3}b^2+\dots+A_{m-1}\,a^2\,b^{m-3}+A_{m+1}\,b^{m-1}$$

se tra i coefficienti A_1, A_2, ... A_{m+1} *sussistono le relazioni:*

$$(26)\quad \frac{A_1}{A_2}=\frac{A_3}{A_4}=\dots=\frac{A_{m-2}}{A_{m-1}}=\frac{A_m}{A_{m+1}}\,.$$

In virtù di questi teoremi, facili a dimostrare, si verifica che si ha, per m pari:

$$A_1 a^m + A_2 a^{m-1} b + \ldots + A_m a b^{m-1} + A_{m+1} b^m =$$
$$\frac{1}{A_2{}^2}\left[A_1A_2a^2 + A_2{}^2ab + (A_2A_3 - A_1A_4)b^2\right](A_2a^{m-2} + A_4a^{m-4}b^2 + \ldots$$
$$+ A_{m-2}a^2b^{m-4} + A_mb^{m-2})$$

$$A_1 a^m - A_2 a^{m-1} b + \ldots - A_m a b^{m-1} + A_{m+1} b^m =$$
$$\frac{1}{A_2{}^2}\left[A_1A_2a^2 - A_2{}^2ab + (A_2A_3 - A_1A_4)b^2\right](A_2a^{m-2} + A_4a^{m-4}b^2 + \ldots$$
$$+ A_{m-2}a^2b^{m-4} + A_mb^{m-2})$$

e per m dispari:

$$A_1 a^m + A_2 a^{m-1} b + \ldots + A_m a b^{m-1} + A_{m+1} b^m =$$
$$\frac{1}{A_2}(A_1a + A_2b)(A_2a^{m-1} + A_4a^{m-3}b^2 + \ldots + A_{m-1}a^2b^{m-3} + A_{m+1}b^{m-1})$$

$$A_1 a^m - A_2 a^{m-1} b + \ldots + A_m a b^{m-1} - A_{m+1} b^m =$$
$$\frac{1}{A_2}(A_1a - A_2b)(A_2a^{m-1} + A_4a^{m-3}b^2 + \ldots + A_{m-1}a^2b^{m-3} + A_{m+1}b^{m-1}).$$

Si può dunque affermare che:

1°) *Se m è un numero pari, si ha, qualunque sia l'esponente n:*

$$(27)\quad (A_1a^m + A_2a^{m-1}b + \ldots + A_{m+1}b^m)^n \pm (A_1a^m - A_2a^{m-1}b + \ldots + A_{m+1}b^m)^n =$$
$$\frac{1}{A_2{}^{2n}}\Big(\left[A_1A_2a^2 + A_2{}^2ab + (A_2A_3 - A_1A_4)b^2\right]^n \pm \left[A_1A_2a^2 - A_2{}^2ab +\right.$$
$$\left.(A_2A_3 - A_1A_4)b^2\right]^n\Big)\left(A_2a^{m-2} + A_4a^{m-4}b^2 + \ldots + A_mb^{m-2}\right)^n$$

supposto che le A_1, A_2, ... A_{m+1} verifichino le relazioni (25).

2°) *Se m è un numero dispari, si ha, per qualsivoglia esponente n:*

$$(28)\quad (A_1a^m + A_2a^{m-1}b + \ldots + A_{m+1}b^m)^n \pm (A_1a^m - A_2a^{m-1}b + \ldots - A_{m+1}b^m)^n =$$
$$\frac{1}{A_2{}^n}\left([A_1a + A_2b]^n \pm [A_1a - A_2b]^n\right)\left(A_2a^{m-1} + A_4a^{m-3}b^2 + \ldots\right.$$
$$\left. + A_{m+1}b^{m-1}\right)^n$$

nell'ipotesi che le A_1, A_2, ... A_{m+1} verifichino le relazioni (26).

È inteso che ognuna delle formule (27) e (28) ne comprende solamente due, perchè in ambo i membri vanno presi ad un tempo i medesimi segni.

Roma, novembre 1894.

ELCIA SADUN.

Sopra una generalizzazione del teorema di Fermat.

1. In una nota presentata all'Accademia delle Scienze di Parigi (*), il sig. Lucas dimostrava una proposizione, la quale generalizzava il teorema di Fermat, che serve di base alla teoria delle congruenze. La stessa proposizione era già stata ottenuta dal sig. Serret, almeno in un caso particolare, come conseguenza della sua teoria delle congruenze irriducibili secondo un modulo primo; e poi dal sig. Picquet con considerazioni geometriche. Il teorema, come lo concludeva il sig. Lucas, è il seguente:

Siano x e n due numeri interi, primi fra loro, e siano $a, b, c, \ldots l$ i numeri primi differenti che entrano in n. La funzione

$$F(x, n) = x^n - \Sigma\, x^{\frac{n}{a}} + \Sigma\, x^{\frac{n}{ab}} - \ldots \pm x^{\frac{n}{ab\,.\,l}}$$

(in cui le sommatorie devono estendersi rispettivamente a tutti gli esponenti che si possono formare, combinando in tutti i modi possibili 1 a 1, 2 a 2, ... i numeri a, b, ... l) è sempre divisibile per n.

Così enunciato il teorema si riferisce esclusivamente al caso in cui i numeri x e n sono primi tra loro; ma esso è vero ugualmente quando x e n non sono primi tra loro. Questo ci proponiamo anzitutto di far vedere, completando la dimostrazione del sig. Lucas; e quindi indicheremo una ulteriore generalizzazione del teorema.

2. Per semplicità considereremo il caso in cui il numero n sia della forma $n = a^\alpha b^\beta$, a e b essendo numeri primi differenti. Sia poi $x = \rho\, a^{\alpha'} b^{\beta'}$, ρ essendo un numero intero primo con n, α' e β' numeri interi positivi. Il caso in cui è ad un tempo $\alpha' = 0$ $\beta' = 0$, fu già considerato dal sig. Lucas; quindi supporremo che uno almeno dei numeri α' e β' sia diverso da 0.

(*) Seduta del 16 aprile 1883.

1° Caso. — Uno dei numeri α' e β' è nullo; è, ad esempio, $\beta' = 0$. Allora la funzione

$$(1)\qquad F(x, n) = (\rho a^{\alpha'})^n - (\rho a^{\alpha'})^{\frac{n}{a}} - (\rho a^{\alpha'})^{\frac{n}{b}} + (\rho a^{\alpha'})^{\frac{n}{ab}}$$

può scriversi

$$(1')\, F(x,n) = a^{\alpha}\left\{\rho^n a^{\alpha' n - \alpha} - \rho^{\frac{n}{a}} a^{\alpha'\frac{n}{a} - \alpha} - \rho^{\frac{n}{b}} a^{\alpha'\frac{n}{b} - \alpha} + \rho^{\frac{n}{ab}} a^{\alpha'\frac{n}{ab} - \alpha}\right\}$$

e i numeri

$$\alpha' n - \alpha \;,\quad \alpha'\frac{n}{a} - \alpha \;,\quad \alpha'\frac{n}{b} - \alpha \;,\quad \alpha'\frac{n}{ab} - \alpha$$

sono positivi, perchè si ha, qualunque siano a e α,

$$a^{\alpha - 1} \geqq \alpha$$

e a fortiori

$$\alpha' a^{\alpha} b^{\beta} \geqq \alpha \;,\quad \alpha' a^{\alpha-1} b^{\beta} \geqq \alpha \;,\quad \alpha' a^{\alpha} b^{\beta-1} \geqq \alpha \;,\quad \alpha' a^{\alpha-1} b^{\beta-1} \geqq \alpha.$$

Dunque la funzione (1') è divisibile per a^{α}.

Si ha poi pel teorema di Fermat generalizzato

$$(\rho a^{\alpha'})^{b^{\beta}} \equiv (\rho a^{\alpha'})^{b^{\beta-1}} \qquad (\mathrm{mod}\ b^{\beta})$$

quindi

$$(\rho a^{\alpha'})^{a^{\alpha} b^{\beta}} \equiv (\rho a^{\alpha'})^{a^{\alpha} b^{\beta-1}} \qquad (\mathrm{mod}\ b^{\beta})$$

od anche

$$(2)\qquad \rho^{n} a^{\alpha' n - \alpha} \equiv \rho^{\frac{n}{b}} a^{\alpha'\frac{n}{b} - \alpha} \qquad (\mathrm{mod}\ b^{\beta}).$$

Similmente si trova

$$(3)\qquad \rho^{\frac{n}{a}} a^{\alpha'\frac{n}{a} - \alpha} \equiv \rho^{\frac{n}{ab}} a^{\alpha'\frac{n}{ab} - \alpha} \qquad (\mathrm{mod}\ b^{\beta}).$$

Sottraendo membro a membro le (2) e (3), e radunando tutti i termini nel 1° membro si conclude

$$\rho^{n} a^{\alpha' n - \alpha} - \rho^{\frac{n}{a}} a^{\alpha'\frac{n}{a} - \alpha} - \rho^{\frac{n}{b}} a^{\alpha'\frac{n}{b} - \alpha} + \rho^{\frac{n}{ab}} a^{\alpha'\frac{n}{ab} - \alpha} \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ b^{\beta}).$$

Dunque la funzione (1) è divisibile ad un tempo per a^{α} e per b^{β}, e perciò per $a^{\alpha} b^{\beta} = n$. cvd.

2° Caso. — Nessuno dei numeri α' e β' è nullo.

Poichè si ha qualunque siano a e α, b e β

$$a^{\alpha-1} \geqq \alpha \qquad b^{\beta-1} \geqq \beta$$

e a fortiori

$$\alpha' a^{\alpha-1} b^{\beta-1} \geqq \alpha \qquad \beta' a^{\alpha-1} b^{\beta-1} \geqq \beta$$

tutti i termini della funzione (1) sono divisibili per $a^{\alpha} b^{\beta} = n$; ne consegue $F(x, n) \equiv 0 \pmod n$. cvd.

3. *Teorema.* — Siano $M = p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \cdots p_{\lambda}^{\mu_{\lambda}}$, $r = q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} \cdots q_{\tau}^{\nu_{\tau}}$ dei numeri interi qualunque, $p_1, p_2, \ldots p_{\lambda}$ essendo numeri primi differenti, come pure $q_1, q_2, \ldots q_{\tau}$. Se si pone

$$\Phi_r(M) = M^r\left(1 - \frac{1}{p_1^r}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2^r}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_{\lambda}^r}\right) = M^r - \Sigma\left(\frac{M}{p_1}\right)^r + \Sigma\left(\frac{M}{p_1 p_2}\right)^r - \ldots + \ldots + (-1)^{\lambda}\left(\frac{M}{p_1 p_2 \cdots p_{\lambda}}\right)^r$$

si avrà

$$(4)\quad \Phi_r(M) - \Sigma\Phi_{\frac{r}{q_1}}(M) + \Sigma\Phi_{\frac{r}{q_1 q_2}}(M) - \ldots + (-1)^{\tau}\Phi_{\frac{r}{q_1 q_2 \cdots q_{\tau}}}(M) \equiv 0 \pmod r.$$

Questa proposizione non è che un semplice corollario della precedente. Infatti la (4) può scriversi:

$$(4')\quad G(r, M) = M^r - \Sigma M^{\frac{r}{q_1}} + \Sigma M^{\frac{r}{q_1 q_2}} - \ldots + (-1)^{\tau} M^{\frac{r}{q_1 q_2 \cdots q_{\tau}}} - \left\{\left(\frac{M}{p_1}\right)^r - \Sigma\left(\frac{M}{p_1}\right)^{\frac{r}{q_1}} + \Sigma\left(\frac{M}{p_1}\right)^{\frac{r}{q_1 q_2}} - \ldots + (-1)^{\tau}\left(\frac{M}{p_1}\right)^{\frac{r}{q_1 \cdots q_{\tau}}}\right\} + \ldots$$

$$+(-1)^{\lambda}\left\{\left(\frac{M}{p_1\dots p_\lambda}\right)^{r}-\Sigma\left(\frac{M}{p_1\dots p_\lambda}\right)^{\frac{r}{q_1}}+\Sigma\left(\frac{M}{p_1\dots p_\lambda}\right)^{\frac{r}{q_1 q_2}}-\dots+(-1)^{\lambda}\left(\frac{M}{p_1\dots p_\lambda}\right)^{\frac{r}{q_1\dots q_\tau}}\right\}$$

ovvero, ricordando la notazione di cui al N° 2

$$G(r,M)=F(r,M)-\left\{F\left(r,\frac{M}{p_1}\right)+F\left(r,\frac{M}{p_2}\right)+\dots+F\left(r,\frac{M}{p_\lambda}\right)\right\}+\dots$$
$$+(-1)^{\lambda}F\left(r,\frac{M}{p_1p_2\dots p_\lambda}\right)$$

E poichè si ha

$$F(r,M)\equiv 0\quad F\left(r,\frac{M}{p_1}\right)\equiv 0\quad F\left(r,\frac{M}{p_2}\right)\equiv 0\ \dots\ F\left(r,\frac{M}{p_1\dots p_\lambda}\right)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\, r)$$

ne risulta

$$G(r,M)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ r).\qquad \text{cvd.}$$

4. La funzione $\Phi_r(M)$ sopra definita coincide per $r=1$ colla funzione $\varphi(M)$ che esprime quanti numeri vi sono inferiori a M e primi con M; e gode d'una proprietà che può considerarsi come la generalizzazione d'un teorema noto di Gaus. Si ha infatti il seguente

« *Teorema. — Sia* r *un numero intero,* $M=p_1^{\mu_1}p_2^{\mu_2}\dots p_\lambda^{\mu_\lambda}$ *un altro numero intero, e* $\delta_1=1$, $\delta_2=\dots\ \delta_n=M$ *i suoi divisori. Si avrà*

$$\Phi_r(\delta_1)+\Phi_r(\delta_2)+\dots+\Phi_r(\delta_n)=M^r \qquad (6)\ » .$$

Uno qualunque degli $n=(\mu_1+1)(\mu_2+1)\dots(\mu_\lambda+1)$ divisori di M è della forma $p_1^{a_1}\,p_2^{a_2}\dots p_\lambda^{a_\lambda}$, a_1 essendo uno qualunque dei numeri $0, 1, 2, \dots \mu_1$, ecc. Dunque un divisore qualunque δ_i di M coincide con un termine del prodotto

$$\prod_{\nu=1}^{\nu=\lambda}\ \sum_{\rho=\nu}^{\rho=\mu_\nu} p_\nu^{\rho}=\left(1+p_1+p_1^2+\dots+p_1^{\mu_1}\right)\left(1+p_2+p_2^2+\dots+p_2^{\mu_2}\right)$$
$$\dots\left(1+p_\lambda+p_\lambda^2+\dots+p_\lambda^{\mu_\lambda}\right).$$

D'altronde si ha

$$\Phi_r(\delta_i)=\Phi_r\left(p_1^{a_1}\,p_2^{a_2}\dots p_\lambda^{a_\lambda}\right)=\Phi_r\left(p_1^{a_1}\right)\Phi_r\left(p_2^{a_2}\right)\dots\Phi_r\left(p_\lambda^{a_\lambda}\right).$$

Dunque una qualunque delle quantità $\Phi_r(\delta_i)$ è uguale ad un termine del prodotto

$$(8)\qquad \prod_{\nu=1}^{\nu=\lambda}\ \sum_{\rho=0}^{\rho=\mu_\nu}\Phi_r\left(p_\nu^{\rho}\right)=\left[1+\Phi_r(p_1)+\dots+\Phi_r\left(p_1^{\mu_1}\right)\right]\dots$$
$$\left[1+\Phi_r(p_\lambda)+\dots+\Phi_r\left(p_\lambda^{\mu_\lambda}\right)\right]$$

e la somma delle quantità $\Phi_r(\delta_i)$ al prodotto stesso. Ma l'espressione

$$\sum_{\rho=0}^{\rho=\mu_\nu}\Phi_r\left(p_\nu^{\rho}\right)=1+\Phi_r(p_\nu)+\Phi_r(p_\nu^{2})+\dots+\Phi_r\left(p_\nu^{\mu_\nu}\right)$$

è uguale a

$$1+\left(p_\nu^{r}-1\right)\left(1+p_\nu^{r}+p_\nu^{2r}+\dots+p_\nu^{(\mu_\nu-1)r}\right)=p_\nu^{\mu_\nu r}.$$

Dunque si conclude

$$\prod_{\nu-1}^{\nu-\lambda}\ \sum_{\rho=0}^{\rho=\mu_\nu}\Phi_r\left(p_\nu^{\rho}\right)=p_1^{\mu_1 r}\,p_2^{\mu_2 r}\dots p_\lambda^{\mu_\lambda r}=M^r. \qquad \text{crd}$$

5. La funzione $\Phi_r(M)$ sopra definita esprime il numero delle funzioni ridotte secondo un modulo $M=p_1^{\mu_1}\,p_2^{\mu_2}\dots p_\lambda^{\mu_\lambda}$ qualunque, e secondo una funzione intera di grado r, irriducibile secondo ciascuno dei moduli primi $p_1, p_2 \dots p_\lambda$ (*).

(*) Vedi una nostra memoria che comparirà prossimamente nel periodico *El Progreso Matemático* (Saragozza).

L'espressione $\frac{F(r, M)}{r}$ rappresenta poi il numero delle congruenze di grado r irriducibili secondo ciascuno dei moduli $p_1, p_2 \dots p_\lambda$ e perciò secondo il modulo composto M.

Casella (Genova), ottobre 1894.

GEROLAMO CORDONE.

VARIETÀ

Il principio delle aree e la storia d'un gatto.

Molti giornali si sono occupati della discussione avvenuta all'Accademia delle Scienze di Parigi, a proposito della questione citata; sicchè non sarà fuor di luogo il darne un cenno ai nostri lettori.

Come è noto, per studiare i moti degli animali, moti troppo celeri per potersi analizzare ad occhio, si fa con speciali apparecchi una serie di fotografie istantanee dell'animale in moto, ad intervalli vicinissimi fra loro.

Dall'esperienza popolare risulta che un gatto, comunque abbandonato, cade sempre sulle proprie zampe. Il signor Murley, distinto fisiologo, volle appunto studiare i movimenti d'un gatto abbandonato colle zampe all'insù, e presentò all'Accademia delle Scienze di Parigi, in seduta del 29 ottobre, 32 fotografie da lui fatte durante la caduta di questa bestiolina. Da esse risulta chiaramente che il gatto ha compiuto esattamente un mezzo giro.

Questa comunicazione diede luogo a discussioni cui presero parte parecchi Socii, poichè ciò pareva in contraddizione colla legge di meccanica chiamata principio delle aree. Invero il Delaunay (*) afferma che se un essere animato è abbandonato libero nello spazio, non solo non può spostare il suo centro di gravità, ma nemmeno darsi un moto di rotazione attorno a questo punto.

In conseguenza, chi spiegò il fenomeno che il gatto si è effettivamente voltato, ricorrendo alla resistenza dell'aria; altri suppose che il gatto, nell'istante che è abbandonato, si imprimesse un moto rotatorio appoggiandosi colle zampe contro le mani dell'esperimentatore. Ma queste spiegazioni non sono soddisfacenti, per ragioni che qui è inutile l'esporre. D'altra parte, esaminando meglio il principio delle aree ne risulta bensì che un corpo rigido non può di per sè mettersi a rotare, nè un corpo comunque deformabile non può, in virtù di forze interne,

(*) *Mécanique rationnelle*, p. 450.

anche per un solo istante, rotare come rota un corpo rigido; ma effettivamente un corpo non rigido può con moti relativi delle sue parti deformarsi in modo che in fine esso si è capovolto, o se vogliamo ha rotato, benchè effettivamente in nessun istante del suo movimento esso roti come un corpo rigido. E la possibilità di questo fenomeno fu spiegata dai sigg. Guyou, Levy, Mesny, Appel, Lecornu, ecc. Il Deprez fece costrurre un apparecchio il quale, in virtù di azioni interne poteva rotare d'un certo angolo.

Ma la spiegazione del moto del gatto parmi assai semplice. Questo animale abbandonato a sè, descrive colla sua coda un cerchio nel piano perpendicolare all'asse del suo corpo. In conseguenza, pel principio delle aree, il resto del suo corpo deve rotare in senso opposto al moto della coda; e quando ha rotato della quantità voluta, egli ferma la sua coda e con ciò arresta contemporaneamente il moto suo rotatorio, salvando in tal guisa sè ed il principio delle aree.

Questo movimento della coda si vede benissimo ad occhio nudo; risulta egualmente chiaro dalle fotografie fatte. In esse si vede che le zampe anteriori, avvicinate all'asse di rotazione, non influiscono nel movimento. Le zampe posteriori, pure distese in vicinanza dell'asse di rivoluzione forse descrivono dei coni, nello stesso senso della coda, e quindi contribuiscono alla rotazione del corpo in senso opposto. Ne risulterebbe che un gatto senza coda si capovolgerebbe con molto maggiore difficoltà. Avvertenza importantissima: fare queste esperienze con un gatto fidato!

Questo moto del gatto diventa così una elegante applicazione del principio delle aree. Altre conferme sperimentali sono facili ad immaginarsi. Così se un uomo si dispone in modo da poter rotare liberamente attorno ad un asse verticale, p. e. salendo su d'un'altalena appesa ad un punto, e se colla sua mano descrive delle curve chiuse orizzontali, il suo corpo roterà in senso opposto, come se la curva descritta dalla mano fosse una ruota che ingrani nel suo corpo. E se si fa rotare un lungo bastone in un piano orizzontale, il suo corpo roterà in senso opposto. Questo bastone corrisponde alla coda del gatto.

(P.)

Sull'insegnamento della Matematica nei Ginnasî e nei Licei.

Alcuni professori son d'avviso che mentre in Italia si hanno per i Licei eccellenti manuali di Geometria, non se ne hanno, generalmente parlando, di egualmente buoni riguardo all'Algebra. Ciò detto, si intende, rispetto alla parte didattica, rispetto all'efficacia che il professore si propone di conseguire nel suo insegnamento; imperciocchè in ordine alla parte scientifica, degli ottimi trattati, quantunque in esiguo numero, fortunatamente si hanno. Ma di fronte alle attuali scolaresche troppo numerose, e costituite in gran parte di giovani poco adatti alla serietà di ogni genere di studi, e specialmente degli studi di Matematica, con un orario brevissimo, e con l'obbligo che si fa agl'insegnanti di Matematica di non assegnare che rari esercizii come lavoro domestico, un professore di Liceo difficilmente troverà un libro che alle esigenze della scienza congiunga quelle della scuola.

Intanto in Italia professori che si occupano, con piena competenza di perfezionare i metodi d'insegnamento e di porre sopra basi rigorosissime ogni ramo di Matematica se ne hanno, ed alcuni di loro sono davvero valorosissimi, per la qual cosa la causa del difetto di adattati libri d'Algebra per le scuole liceali non deve attribuirsi a mancanza di persone che li sappiano scrivere. Esprimo qui il mio debole parere intorno ad una questione così importante.

Secondo me la causa del lamentato inconveniente è da attribuirsi al modo come l'insegnamento della Matematica è distribuito nel Ginnasio superiore e nel Liceo. Il prof. Cremona notò opportunamente che fare un libro elementare, che schiettamente si adatti alle scuole, è cosa difficilissima, e richiede molto tempo, e una volta che si sia riusciti, gloria non se ne avrà, e nemmeno dei lucri. Ma, osservo io, che chi scrive un libro che costa molto lavoro e non procura gloria, non ne abbia poi a risentire un danno finanziario, è cosa molto evidente, ond'è che i libri si fanno il più possibilmente rispondenti ai programmi, e quando questi non sono ben fatti, nemmeno i libri che li sviluppano possono essere eccellenti. Mettete p. es. gl'irrazionali in un trattato d'Aritmetica, e l'argomento dovrà di necessità essere contenuto in ristretti e modesti confini; mettetelo in un corso di Analisi algebrica, e vedrete se sarà possibile non trascendere, anzi se non sarà necessario che si trascenda.

Ecco, per tornare all'argomento, come io penso che debba essere distribuito ed impartito l'insegnamento dell'Aritmetica e dell'Algebra nel Ginnasio e nel Liceo.

Il primo libro di Euclide, come saviamente osservarono i chiarissimi Proff. Valeri e Bettazzi (*Periodico di Matematica*, anni V e VI), va tolto dal Ginnasio superiore e messo al Liceo. È evidente, essi notarono, che il professore di Liceo, nello svolgimento del suo programma di Geometria non può fare assegnamento alcuno sulla conoscenza, da parte degli scolari, della materia contenuta in quel primo libro, sia perchè si trova di fronte a giovani che la detta materia hanno svolta con metodi diversi, e sia anche perchè certi giovani provenienti da scuole private, non ne hanno che una imperfetta conoscenza.

Nei primi tre anni di Ginnasio si insegna l'Aritmetica pratica. Io non so che cosa intendano i professori di Ginnasio inferiore per Aritmetica pratica; escludo però che intendano un complesso irrazionale di regole e di enunciati di teoremi. Secondo me in questa Aritmetica pratica si dimostrerà che il prodotto di due fattori è commutativo e distributivo; si dimostreranno i teoremi principali sulla divisibilità, sul massimo comune divisore, sui numeri primi; si dimostreranno le regole relative al conteggio con numeri frazionarii, e così via. I teoremi meno semplici si daranno nel solo loro enunciato, badando di farne la verifica con numerosi casi particolari. Così alla fine dei tre anni di corso del Ginnasio inferiore i giovani avranno una mediocre preparazione per potere intraprendere un corso di Aritmetica razionale. Il professore di Aritmetica razionale non può avere il compito di indugiarsi a lungo per dimostrare agli scolari che p. es. la moltiplicazione e la divisione degl'interi, eseguite nel modo ad essi noto, conducono realmente ai risultati voluti. Egli non deve fare altro che mettere bene le basi della scienza dei numeri, toccando di volo tutto ciò che si riferisce alla materialità delle operazioni pratiche. E allora non si vede perchè alla quarta ginnasiale, pur lasciando l'attuale orario, non si possa fare insieme con l'Aritmetica dei numeri interi quella dei numeri frazionarii. Io non veggo perchè nell'Aritmetica dei numeri interi non si debbano considerare il prodotto di una somma per una differenza, e quello di due differenze, e come tali sviluppi non si debbano poi estendere ai numeri frazionarii. I teoremi relativi alle potenze possono benissimo essere trattati a quarta ginnasiale.

Alla quinta ginnasiale, fatto un riepilogo dei teoremi più importanti studiati a quarta, si incomincierebbe lo studio delle frazioni periodiche. Valenti professori hanno dimostrato come qui con molta semplicità si possa introdurre il concetto di limite e svolgere le principali proprietà che a tale concetto si riferiscono. Svolte queste proprietà con la dovuta

modestia e parsimonia, e si può fare, ed è stato fatto, io non veggo nessunissima ragione perchè alla quinta ginnasiale non si debba fare una modesta teoria dei numeri irrazionali, deducendola da quella dei limiti. Esteso così il concetto di numero, si estenderanno le definizioni delle operazioni aritmetiche, e si dimostrerà con alcuni esempi come certe proprietà dimostrate per i numeri interi e per i numeri frazionarii valgono pure per gl'irrazionali.

Può in questo momento essere fecondo un riepilogo, essere utile una classificazione delle operazioni aritmetiche, e dedurre la conseguente impossibilità di eseguire tutte le sottrazioni. I numeri negativi si potranno allora introdurre, e vi sono autori che ciò fanno nel modo più semplice che si possa immaginare.

Un libro d'Aritmetica che comprenda tutto ciò di cui si è parlato può avere l'estensione d'uno dei più voluminosi manualetti Hoepli da L. 1,50 il volume, e ai miei colleghi è noto appunto il preziosissimo volumetto Hoepli d'*Aritmetica razionale* del prof. F. Panizza.

Stabiliti i programmi del Ginnasio nel modo sopra indicato, il compito del professore di Liceo riguardo all'Algebra è molto semplificato. Fin dalle prime lezioni potrà parlare di monomi e di polinomi, e di conseguenti riduzioni di termini simili, e tutto il calcolo letterale potrà essere sviluppato in pochissime lezioni. Le lettere, fin dal principio, rappresenteranno numeri razionali o irrazionali, positivi o negativi, cosa didatticamente vantaggiosa per la generalità dei risultati a cui si vuole pervenire.

La compilazione d'un buono ed adattato libro d'Algebra per i Licei sarebbe allora agevolissima cosa. Definizioni scelte, semplicità nelle dimostrazioni, parsimonia, bando a tutte le prolissità che vogliono avere per iscopo la sostituzione del libro alla viva voce dell'insegnante (sostituzione che, specialmente nell'insegnamento secondario, è impossibile) dovrebbero essere le qualità essenziali d'un tal libro. Il Direttore del *Periodico di Matematica* per l'insegnamento secondario ebbe ad esprimere saviamente, a proposito della traduzione d'un libro, alla quale il traduttore aveva aggiunto del suo parecchie note, che oramai i libri si devevano migliorare *togliendo,* non *aggiungendo* a quello che essi contenevano. E il prof. Garbieri così termina un suo bellissimo articolo diretto agl'Insegnanti di Matematica delle scuole secondarie: « Per carità, meno pompa di erudizione, meno retorica di lezioni cattedratiche; ritorniamo alla semplicità dei vecchi, i quali, umili maestri, non si sforzavano di parere gonfi di scienza e di sbalordire con la dottrina i piccoli alunni, ma s'ingegnavano di riuscire chiari e sopratutto utili ». E il prof. Pincherle scrive un manualetto d'Algebra (manuale Hoepli da L. 1,50 il volume) da servire per le scuole secondarie, e il prof.

Pascal, in manuali Hoepli, necessariamente un po' più voluminosi, detta lezioni di Calcolo infinitesimale, e così via. Sarà senza dubbio fecondo di utili risultati quest'esempio che dànno valentissimi maestri, specialmente delle Università italiane, questo richiamo alla semplicità, alla parsimonia, alla modestia; ed i professori delle scuole secondarie accetteranno di buon grado i consigli, nascosti o palesi, che ci vengono da uomini che, mentre vivono ne' campi più elevati della Scienza, sanno stare eziandio nelle regioni più umili della medesima.

Catania, gennaio 1895.

S. Catania.

Nuove pubblicazioni.

Charles Henry, Bibliothécaire à la Sorbonne. — *Abrégé de la théorie des fonctions elliptiques.* Paris, Nony, 1895, pag. 126.

G. Maupin. — *Questions d'Algèbre.* Avec une préface de M. C. A. Laisant. Paris, Nony, 1894, pag. VIII+292.

A. Ziwet. — *An elementary treatise on theoretical mechanics.* Part II. *Introduction to dynamics;* Statics, a. 1893. Part III. *Kinetics;* a. 1894, New-York, Macmillan and Co.

Répertoire bibliographique des sciences mathématiques. Première série, Fiches 1 à 100. Paris, Gauthier-Villars, 1894; prix 2 fr.

O. Jacoangeli. — *Triangolazioni topografiche e triangolazioni catastali* Milano, Hoepli, 1895; prezzo L. 7,50.

Un capitolo di Calcolo differenziale

(sulla serie di Taylor-Maclaurin)

Nota di Ernesto Pascal, *a Pavia.*

Dopo la grande estensione data al concetto di funzione di una o più variabili, i principali teoremi e procedimenti del calcolo differenziale hanno perduto la loro validità, e quindi da parecchi anni e per opera di varii autori, è cominciato un lavorio per stabilire, per ciascuno di essi, le condizioni necessarie e sufficienti di validità.

Ora per alcuni pochi di tali teoremi il problema è risoluto in modo soddisfacente; per altri o non è stato risoluto, o lo è stato da alcuni autori in maniera che il risultato diventa quasi illusorio; inquantochè è chiaro che si potrà dire d'aver risoluto veramente il problema, quando le condizioni di cui si parla sono espresse sotto una forma facilissima, e tale da potersi applicare con poca difficoltà ai singoli casi speciali. Ma quando invece l'applicazione di quelle condizioni al caso singolo presenta difficoltà maggiori che non l'esaminare direttamente su quel caso la validità o meno del teorema, allora a buon diritto si può dire che il vantaggio e l'importanza del risultato ottenuto sono illusorii, e che non si è fatto un vero progresso nella scienza.

Ora ciò è accaduto per alcuni dei teoremi fondamentali del calcolo, ed è accaduto anche per la serie di Taylor, come dirò più sotto.

Perchè una funzione di variabile complessa sia sviluppabile in serie di Taylor nell'intorno di un punto, si sa da moltissimo tempo (sin da Cauchy) sotto qual forma semplice sono espresse le condizioni necessarie e sufficienti; ma non è più lo stesso per le funzioni di variabili reali, caso che non può ricavarsi dal primo, come caso particolare.

Dopo un lavoro di König, che a mio giudizio non risolveva affatto il problema, è comparso, in questi ultimi mesi, un lavoro di Pringsheim (1), il cui risultato è senza dubbio semplice ed elegante, e perciò

(1) Pringsheim. *Ueber die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen des Taylor' schen Lehrsatzes für Functionen einer reellen Variablen.* Math. Ann., vol. 44, p. 57.

suscettibile di entrare subito a far parte delle ordinarie lezioni di calcolo infinitesimale.

Ora io mi propongo con questa Nota di far conoscere e divulgare fra noi questo risultato del Pringsheim che rappresenta un vero progresso nella scienza, e di esporlo in un modo che mi sembra assai semplice, e dal punto di vista didattico, assai conveniente; aggiungendovi poi ancora qualche considerazione che mi è riuscito di fare sull'argomento stesso.

Sarà poi pregio del lavoro premettere alcune considerazioni generali sul problema che ci occupa, sui suoi affini e sulla sua storia.

§ 1.
Funzioni indefinitivamente derivabili.

S'intende facilmente come al problema dello sviluppo di una funzione in serie indefinita di Taylor, sia affine l'altro della derivabilità indefinita della funzione stessa.

Anzi Lagrange credette che i due problemi fossero la stessa cosa [1], che cioè per la sviluppabilità di una funzione in serie di Taylor bastasse che esistessero e fossero finite le derivate di qualunque ordine della funzione.

Anche l'Hankel nel suo celebre e relativamente recente lavoro sulle funzioni oscillanti [2] pare che abbia ammessa per vera l'asserzione di Lagrange.

Il Cauchy [3] però sin da moltissimo tempo riconobbe pel primo falsa l'asserzione di Lagrange e addusse l'esempio della funzione che per x diverso da zero è $e^{-\frac{1}{x^2}}$ e per $x=0$ è zero, come un esempio di funzione contraddicente a quella asserzione.

La legittimità, e, dirò così, la purezza di un tale esempio, è stata poi oppugnata da Du Bois Reymond [4] e da Pringsheim [5], i quali del resto hanno trovato migliori esempi di funzioni della specie indicata. La difficoltà cui dà luogo l'esempio di Cauchy consiste in ciò che il valore della funzione nel punto $x=0$ non è dato dalla

(1) Opere, vol. 9, p. 65; v. 10, p. 72.
(2) Math. Ann., v. 20 (1870).
(3) Leçons, etc., p. 152 (1823).
(4) *Gultigkeitsbereich des Taylor'schen Entwick.* Math. Ann., v. 21, v. p. 114.
(5) *Zur Theorie der Taylor'schen Reihe, etc.* Math. Ann., vol. 42, p. 153. — *Functionen mit endlichen differentialquot. etc.*, Math. Ann., v. 44.

stessa formola analitica che fornisce gli altri valori della funzione; il che del resto dal punto di vista del moderno e largo concetto di funzione non è una vera difficoltà. È sempre però desiderabile trovare esempii esenti da una siffatta obbiezione. Gli autori citati ne hanno trovati moltissimi, e ad essi può aggiungersi anche un'altra funzione presentata da Mittag Leffler [1] e che ha il vantaggio d'essere assai semplice.

Data una funzione indefinitivamente derivabile si può formare la serie di Taylor corrispondente riferita ad un certo punto x_0. Ora se la funzione è sviluppabile nell'intorno (a destra o a sinistra) di x_0, non solo deve accadere che tale serie così formata sia convergente, ma anche che il suo valore *per ogni* x dell'intorno di x_0 sia eguale al valore della funzione. Se non si verifica la seconda condizione, la funzione non sarà sviluppabile, ma la serie che abbiamo formata potrebbe ancora essere convergente.

A prescindere dall'esempio di Cauchy, è stato il Pringsheim, che ha trovato il primo esempio di una funzione non sviluppabile in serie mentre poi la serie di Taylor è convergente (v. Math. Ann., vol. 42).

Per completare queste indicazioni storiche possiamo notare che non solo si può trovare una funzione che pure avendo le derivate tutte finite, in tutti i punti di un segmento, non sia sviluppabile in serie di Taylor riferita ad un certo punto del segmento stesso, ma si può anche trovare, come ha fatto vedere il Du Bois Reymond (Math. Ann., vol. 21. pp. 115-116, §§ 7-8), una funzione che abbia la stessa singolarità rispetto a qualunque punto del segmento stesso.

§ 2.
Discussione generale sulla sviluppabilità di una funzione in serie di Taylor. Condizioni di König.

Il problema della sviluppabilità in serie di Taylor consiste in questo: Quali condizioni occorrono per la funzione $f(x)$ definita in tutto un intervallo da a sino ad $a+H$, perchè

1. La serie di Taylor formata nel solito modo mediante le derivate di $f(x)$ nel punto a sia convergente per ogni $h < H$.
2. Il suo valore per ogni $h < H$ sia il valore di $f(a+h)$.

Dai principii del calcolo si sa in che maniera si può esprimere la condizione necessaria e sufficiente, perchè ciò accada; è necessario ed è sufficiente (oltre naturalmente la derivabilità indefinita della funzione

(1) Acta Math., vol. 15, p. 279.

in tutto l'intervallo da a ad $a+\mathrm{H}$) che il cosidetto resto $\mathrm{R}_n(h, \vartheta)$ che è una funzione di h e di ϑ (numero compreso fra 0 e 1) converga a zero per $n = \infty$. Ora il numero ϑ dipende anche da n e da h, e quindi in generale varierà con n; non conoscendo la dipendenza di ϑ da n, non ci riesce sempre possibile verificare se R_n converge a zero. Nei casi più ordinarii può accadere che R_n converga a zero per qualunque ϑ, e che effettivamente questa sua convergenza a zero la possiamo verificare indipendentemente dalla conoscenza del valore di ϑ; ma se ciò non accade, il problema naturalmente resta irresoluto per questa via, almeno colle nozioni che abbiamo sino al presente.

E c'è da notare ancora che in generale altro è cercare il limite di R_n supponendo ϑ fisso, pure avente qualunque valore fra 0 e 1, e altro è cercarne il limite quando si suppone ϑ variabile con n; ciò risulta dalla teoria generale della continuità delle funzioni di due variabili; perchè può bensì immaginarsi una funzione di due variabili n, ϑ, tale che esista il limite di essa quando ci avviciniamo al punto rappresentativo dei valori limiti delle variabili in certe direzioni, e non esista quando ci avviciniamo in altre direzioni o in altra maniera.

Quindi il convergere a zero di R_n per qualunque valore fisso di ϑ (compreso fra 0 e 1) non lo possiamo riguardare a tutto rigore come una condizione sufficiente per il nostro problema. La difficoltà è però tolta se la convergenza a zero di R_n non è una convergenza semplice, ma una convergenza uniforme per qualunque ϑ, perchè allora R_n deve tendere a zero anche se ϑ varia in qualunque maniera con n.

Il risultato ultimo della ricerca di Pringsheim è appunto questo, che cioè se per espressione di R_n si considera quella cosiddetta di Cauchy, allora se esso deve convergere a zero per quello speciale valore di ϑ variabile con n, esso deve convergere a zero uniformemente; si può così fare assolutamente astrazione della conoscenza della dipendenza di ϑ da n; ciò costituisce una proprietà certamente singolare del Resto di Cauchy.

Vogliamo ora raccogliere qui ordinatamente, per chiarezza di esposizione, alcune osservazioni fondamentali facilmente deducibili dalla teoria ordinaria delle serie di potenze.

1). Supponiamo che per ogni valore di $h \leqq \mathrm{H}$, $\mathrm{f}(a+h)$ sia sviluppabile in serie di Taylor riferita al punto a, e ordinata secondo le potenze di h. Possiamo dire che per ogni $h < \mathrm{H}$, $\mathrm{f}^{(r)}(a+h)$ sarà anche sviluppabile in serie di Taylor.

2). Nelle stesse ipotesi del numero precedente, non possiamo dire che $\mathrm{f}(a-h)$ (mutando cioè il segno ad h) sia anche sviluppabile in serie di Taylor.

Dai noti principii della teoria delle serie di potenze si ricava bensì

che se $h < \mathrm{H}$ la serie che si deduce mutando $+h$ in $-h$, è anche convergente, ma non si può dedurre che il suo valore sarà $\mathrm{f}(a-h)$.

3). Nello stesso modo, se si sa che $\mathrm{f}(a+\mathrm{H})$ è sviluppabile in serie di Taylor riferita al punto a, si può bensì dedurre dalla teoria delle serie di potenze che la stessa serie per *ogni* $|h| < |\mathrm{H}|$ è anche convergente; ma non si può dedurre che il suo valore è $\mathrm{f}(a+h)$.

4). Nelle stesse ipotesi, se $\mathrm{f}(a+h)$ è sviluppabile in serie di Taylor riferita al punto a per ogni $h < \mathrm{H}$, sarà per i medesimi valori di h, sviluppabile in serie di Taylor riferita ad un qualunque altro punto $a+k$ fra a e $a+h$ ($|k| < |h|$; dove k, h sono del medesimo segno).

Ponendo $h - k = k'$, per le ipotesi fatte si ha che k' è del medesimo segno di h e quindi di k, e inoltre

$$f(a+h) - f(a+k+k') = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\,(k+k')^n$$

$$f(a+k) = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\,k^n$$

$$f^{(r)}(a+k) = \sum_r^\infty \frac{1}{n-r!} f^{(n-r)}(a)\,k^{n-r}$$

e quindi sviluppando e ordinando il primo di questi sommatorii secondo le potenze di k' (il che non altera la serie, perchè per $k+k' < \mathrm{H}$ la serie di potenze è *assolutamente* convergente (1)) si ha:

---

(1) S'incominci col notare che $k\,k'$ sono due numeri del medesimo segno per le nostre ipotesi; il secondo membro di $\mathrm{f}(a+h)$, sviluppandosi la potenza n^{ma} di $(k+k')$, può scriversi sotto forma di una particolare serie *doppia*

$$\left.\begin{array}{l} f(a) + f'(a)\,k + \frac{1}{2} f''(a)\,k^2 \; + \ldots \\ 0 \; + f'(a)\,k' + \quad f''(a)\,k\,k' + \ldots \\ 0 \; + \quad 0 \quad + \frac{1}{2} f''(a)\,k'^2 \; + \ldots \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \end{array}\right\} \text{(A)}$$

in cui se considero i valori assoluti di tutti i termini, e sommo per verticali ho la serie convergente $\sum_0^\infty \frac{1}{n!} |\mathrm{f}^n(a)|\,(k+k')^n$; per un teorema sulle serie doppie, si ha quindi che la serie doppia (A) è *convergente*, posso cioè sommare i termini per orizzontali invece che per verticali, ed il risultato è il medesimo. Non si potrebbero fare le stesse deduzioni se $k\,k'$ fossero di segno opposto.

$$f(a+h) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a+k)\, k'^n$$

la quale formola dimostra il nostro assunto.

5). Perchè $f(a+h)$ sia sviluppabile in serie di Taylor riferita al punto a, è evidentemente necessario che esistano e siano finite tutte le derivate di ordine finito di $f(x)$ prese nel punto a; perchè è naturale che se manca questa condizione, vien meno la stessa formazione della serie. Ora dalla considerazione del numero precedente risulta che per le stesse ragioni debbono esistere ed essere finite tutte le derivate $f^{(n)}(a+k)$ essendo k qualunque fra a e $a-\mathrm{H}$; quindi ricaviamo subito che la funzione $f(x)$ deve avere in ogni punto x dell'intervallo (escluso al più l'estremo $x=a+\mathrm{H}$) derivata finita di qualunque ordine.

Notiamo però che ciò non toglie che, crescendo n all'infinito, la derivata possa crescere oltre ogni limite (1).

6). Un'ultima osservazione finalmente ci dà argomento a parlare delle condizioni di sviluppabilità trovate da König e a cui abbiamo avanti accennato. La stessa considerazione del numero 4) ci fa vedere che la serie

$$\sum_0^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)\, k'^n$$

deve essere convergente per ogni x del campo, e per ogni k' tale che $x+k' < a+\mathrm{H}$.

Ora questa è appunto una delle condizioni trovate dal König (2), insieme all'altra condizione che la stessa serie dev'essere derivabile termine a termine rispetto ad x. Le condizioni enumerate dal König erano propriamente tre; lo Stolz poi nel suo corso di calcolo, riferendo sui risultati di König, aggiunge anche una quarta condizione (3). Ora chi non vede che le condizioni di sviluppabilità espresse così, non risolvono il problema, perchè lo riconducono ad altri problemi di natura anche più difficile che esso non sia?

Nè vale il notare, come fa il König in una noticina alla fine del suo lavoro, che quelle condizioni possono applicarsi facilmente alla

(1) Il Mansion (*Note sur quelques principes*, etc. Annales de la Société scient. de Bruxelles, 1879) e il König (*Nouvelles demonstr.*, etc. Nouv. Annales, 2ª serie, t. 13, p. 270), sono incorsi al proposito in errori.

(2) König. *Ueber die Bedingungen der Gültigkeit der Taylor' schen Reihe.* Math. Ann., vol. 23, p. 450.

(3) Stolz. *Grundzüge, etc.*, I, p. 110-111.

serie binomiale, perchè la serie binomiale può studiarsi con mezzi anche più facili che non siano quelli del König, e nel caso generale non si può sostenere essere agevole il riconoscere che una certa serie sia o no derivabile termine a termine. Ben si appone quindi il Pringsheim (1) quando qualifica di illusorie, almeno dal punto di vista pratico, le condizioni trovate dal König.

§ 3.

Teorema sulle serie i cui termini sono funzioni di una o più variabili.

Si sa dagli elementi del calcolo, che se una serie, i cui termini sono funzioni *continue* di una o più variabili, è *equiconvergente* per tutti i valori delle variabili compresi in un certo campo, allora essa è una funzione continua delle variabili in tutto quel campo. La equiconvergenza della serie non è però una condizione *necessaria* per la continuità, ma solo sufficiente; per modo che il teorema reciproco non è vero; si possono dare esempii di serie che sieno funzioni continue, senza essere serie equiconvergenti. È però vero il teorema reciproco se la serie data è a termini positivi per qualunque valore delle variabili.

Propriamente vogliamo dimostrare il teorema:

Si abbia una serie assolutamente *convergente in tutto un campo* (*compresi gli estremi*)

$$\sum_0^{\infty} u_n(x_1\, x_2 \ldots)$$

i cui termini sieno funzioni continue delle variabili, e la serie dei valori assoluti

$$\sum_0^{\infty} | u_n(x_1\, x_2 \ldots)|$$

sia una funzione continua delle variabili; allora questa seconda serie, e quindi anche la prima, è una serie equiconvergente (2).

Immaginiamo un punto del campo, di coordinate $x_1\, x_2 \ldots$ In questo punto la serie dei valori assoluti è convergente, e quindi, dato σ può sempre trovarsi un indice n in modo che sia

$$\mathrm{R}_n(x_1\, x_2 \ldots) < \sigma$$

(1) Math. Ann., vol. 44, p. 58 e p. 68.

(2) Pringsheim. Math. Ann., 44, p. 82.

indicando con R il resto della serie dei valori assoluti. D'altra parte essendo

$$R_n = \sum_0^\infty | u_n | - \sum_0^n | u_n |$$

ed essendo per ipotesi, il primo termine del secondo membro una funzione continua delle x, e anche il secondo termine del secondo membro, perchè somma d'un numero finito di funzioni continue, si ha che $R_n(x)$ è una funzione continua delle x, e quindi si possono sempre trovare dei valori finiti e diversi da zero $h_1\, h_2 \ldots$ in modo che

$$R_n(x_1 \pm \theta_1 h_1, x_2 \pm \theta_2 h_2, \ldots) - R_n(x_1\, x_2 \ldots) < \sigma$$

per qualunque sistema di valori delle $\theta_1\, \theta_2 \ldots$ comprese fra 0 e 1.

Quindi combinando colla precedente disuguaglianza, otteniamo

$$R_n(x_1 \pm \theta_1 h_1, \ldots) < 2\sigma$$

e osservando che R_n risulta di termini tutti positivi, possiamo anche conchiudere che, dato σ si può sempre trovare un indice n, e un sistema di valori $h_1\, h_2 \ldots$, cioè un intorno del punto, in modo che

$$R_{n+\nu}(x_1 \pm \theta_1 h_1, x_2 \pm \theta_2 h_2, \ldots) < 2\sigma$$

qualunque sia il valore di ν, purchè positivo, e qualunque sieno le $\theta_1\, \theta_2 \ldots$ purchè comprese fra 0 e 1.

Variando σ però evidentemente non solo varia n, ma variano anche le h.

Ad ogni σ certamente corrisponderà un valore di n, e un sistema di valori delle h; ma vi potrebbero corrispondere parecchi valori per le n, e in corrispondenza parecchi sistemi di valori per le h.

Partiamo allora da uno qualunque dei punti del supposto campo di convergenza assoluta della serie, e per esso troviamo l'indice n e le quantità h, che determineranno un certo *intorno* di quel punto.

Consideriamo un punto estremo di questo intorno, e ripetiamo rispetto ad esso la stessa considerazione; si troverà un nuovo indice n e un nuovo intorno che sarà una continuazione del primo; quello fra i due indici n, che sarà il maggiore, varrà evidentemente per ambedue quegli intorni; quindi possiamo conchiudere che si può trovare un n unico tale che per tutti i punti del campo totale costituito della somma dei due intorni sopra costruiti, sia sempre $R_{n+\nu} < 2\sigma$ qualunque sia ν positivo e qualunque sia il punto. Così continuando io dico che si può sempre fare in tal maniera la ricerca dei singoli campi parziali, che si giunga a riempire tutto il campo totale con un numero *finito* di campi parziali.

Infatti se si potesse continuare indefinitivamente l'indicato procedimento, e quindi trovare *infiniti* campi parziali, vi sarebbero anche infiniti punti che funzionano da centri di tali campi, e quindi questi infiniti punti dovrebbero ammettere almeno un punto limite

$$x' \equiv (x'_1\, x'_2 \ldots)$$

A questo punto x' anche apparterrà un intorno colla solita proprietà, e un indice n'. E inoltre per la sua stessa natura di punto limite, in questo intorno esisteranno infiniti punti, centri di campi parziali; sieno

$$x^{(k)} \equiv (x_1^{(k)}\, x_2^{(k)} \ldots)$$
$$x^{(k+1)} \equiv (x_1^{(k+1)}\, x_2^{(k+1)} \ldots)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Per la stessa ipotesi che dà luogo all'esistenza di tutti questi punti, è naturale che il campo parziale attorno $x^{(k)}$ non comprende i punti $x^{(k+1)}\, x^{(k+2)} \ldots x'$; ma invece tenendo presente la proprietà del costruito campo parziale relativo ad x', si vede che alterando, al massimo, il valore dell'indice $n^{(k)}$ relativo ad $x^{(k)}$, si può trovare un intorno dentro cui sieno compresi tutti quanti quegli infiniti punti; perchè se per valore dell'indice n relativo ad $x^{(k)}$ prendiamo quello già trovato per il punto x', cioè prendiamo n', allora poichè

$$R_{n'}(x^{(k+1)}) < 2\sigma$$
$$R_{n'}(x^{(k+2)}) < 2\sigma$$
$$\cdots\cdots$$
$$R_{n'}(x') < 2\sigma$$

si ricava che tutti i punti

$$x^{(k+1)} \ldots\ldots x'$$

possono racchiudersi nell'intorno relativo ad $x^{(k)}$.

Si vede dunque che alterando la costruzione che per avventura fosse stata già fatta, si potrà sempre sostituire un unico campo parziale, ad infiniti di essi; e quindi distruggere il supposto punto limite x'.

Ripetendo questo processo per tutti i punti limiti, resta dunque dimostrato l'assunto. Allora tutto il campo totale resta diviso in un numero *finito* di campi parziali ad ognuno dei quali corrisponde un indice n; il maggiore di tutti sia N; esso evidentemente varrà per tutti i campi parziali, e quindi per tutto il campo totale; concludiamo dunque che dato σ si può sempre trovare un indice N in modo che

$$R_N(x)$$

per un qualunque x del campo assegnato è sempre minore di 2σ; di qui si ricava la equiconvergenza della serie dei valori assoluti, e quindi, con più ragione, di quella data.

Di questo teorema ci interessa un corollario.

Essendo $R_N(x)$ composto di termini tutti positivi, con più ragione, ciascuno di essi sarà minore di 2σ, e ciò per qualunque punto x del campo; dunque:

Nelle stesse ipotesi del teorema precedente si può sempre trovare un indice n in modo che

$$u_n(x) < 2\sigma$$

qualunque sia il punto x, cioè il termine generale della serie converge a zero uniformemente.

Prima di terminare questo paragrafo vogliamo ricavare due importanti corollarii del teorema qui dimostrato:

1. *Se i termini di una serie convergente sono funzioni continue di un certo numero di variabili, e per qualunque sistema di valori di queste variabili, compresi in un certo campo (gli estremi inclusi), hanno sempre valori del medesimo segno allora condizione necessaria e sufficiente per la continuità della funzione rappresentata dalla serie, è che la serie stessa sia equiconvergente.*

2. *Se i termini di una serie convergente sono funzioni continue di una variabile, e sono inoltre in un certo punto o tutte funzioni crescenti o tutte funzioni decrescenti, per modo che la serie dei rapporti incrementali in quel punto risulta di termini tutti del medesimo segno, allora condizione necessaria e sufficiente perchè in quel punto sia possibile la derivazione per serie è che la serie dei rapporti incrementali sia equiconvergente in tutto un intorno del punto.*

§ 4.

Applicazione del teorema precedente alla serie di Taylor.

Supponiamo ora che per qualunque $h < H$ si abbia sempre

$$f(a+h) = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\, h^n .$$

Scegliamo *arbitrariamente* un limite superiore dei valori di h; e sia $r < H$. Abbiamo allora che la precedente relazione sussiste per ogni $h \leqq r$.

Nel § 2 abbiamo visto che come conseguenza necessaria se ne ricava che sarà ancora

$$f(a+h) = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} f^{(n)}(a+k)\, k'^n$$

dove

$$h = k + k' \leqq r < H$$

e la serie del secondo membro è convergente *assolutamente.*

Sarà poi ancora una serie derivabile termine a termine, cioè essendo

$$f'(a+h) = \frac{d f(a+h)}{d(a+h)} = \frac{\partial f(a+k+k')}{\partial k'}$$

si ha che

$$f'(a+h) = \sum_1^\infty \frac{1}{n-1\,!} f^{(n)}(a+k)\, k'^{n-1}$$

e la serie del secondo membro per i medesimi sistemi di valori di $k\,k'$ sarà anche assolutamente convergente. Applicando dunque il teorema del § 3 possiamo dire *che il termine*

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(a+k)\, k'_n$$

ovvero il termine

$$\frac{1}{n-1\,!} f^{(n)}(a+k)\, k'^{n-1}$$

devono essere uniformemente convergenti a zero per qualunque sistema di valori di $k\,k'$ soddisfacenti alla relazione $k + k' \leqq r < H$.

Poniamo

$$k = \vartheta h$$
$$k' = (1-\vartheta)\, h$$

che soddisfano alla relazione

$$k + k' = h \leqq r < H$$

per ogni $h \leqq r$ e per ogni ϑ compreso fra 0 e 1. *Si ha allora che*

$$\frac{(1-\vartheta)^{n-1}}{n-1\,!} f^{(n)}(a+\vartheta h)\, h^{n-1}$$

deve convergere a zero uniformemente per ogni $h \leqq r$ e per ogni ϑ compreso fra 0 e 1.

Ora questa espressione moltiplicata per h non è altro che il così detto *Resto di Cauchy* della serie di Taylor corrispondente allo sviluppo di $f(a+h)$ secondo le potenze intere positive di h; indicando quindi con $R_n(\vartheta, h)$ tale resto di Cauchy, possiamo conchiudere, che *per la sviluppabilità di $f(a+h)$ in serie di Taylor per ogni valore* *di* $h \leqq r < \mathrm{H}$ *è necessario che* $\mathrm{R}_n(\vartheta, h)$ *converga uniformemente a zero per tutti i* ϑ *e tutti gli* h *soddisfacenti alle solite condizioni.*

D'altra parte se questo si verifica, è chiaro che ha luogo appunto la sviluppabilità per ogni h, perchè allora fissato un qualunque h e fatto anche ϑ variabile con n, si potrà sempre trovare un n per cui R_n sia minore della quantità che più ci piace, e, come si sa dagli elementi del calcolo, ciò basta per conchiudere la sviluppabilità.

Nel § 2 abbiamo osservato che *non* si potrà ritenere una condizione sufficiente il tendere a zero di R_n per qualunque valore *fisso* di ϑ; ma che se la convergenza è invece uniforme, allora essa potrà sicuramente ritenersi come condizione sufficiente; ora dalle considerazioni fatte si ricava che una tale convergenza uniforme non solo è condizione *sufficiente*, ma è anche condizione *necessaria*.

Tenendo ora presente che la quantità r è arbitrariamente scelta minore di H, possiamo dunque dire che: *condizione necessaria e sufficiente perchè* $\mathrm{f}(a+h)$ *sia sviluppabile in serie di Taylor per ogni* $h < \mathrm{H}$, *è che il cosiddetto Resto di Cauchy*

$$\mathrm{R}_n = \frac{(1-\vartheta)^{n-1}}{n-1\,!} f^n(a + \vartheta h)\, h^n$$

sia convergente uniformemente a zero per ogni ϑ *(fra* 0 *e* 1) *e per ogni* $h \leqq r < \mathrm{H}$.

Per un $h = \mathrm{H}$ la convergenza a zero uniforme di R_n non è più una condizione necessaria, perchè la serie che si ottiene per $h = \mathrm{H}$ *può essere* non *assolutamente* convergente, e quindi allora cade il ragionamento fatto sopra. Quella condizione diventa necessaria anche per $h = \mathrm{H}$ se la serie che dà il valore di $\mathrm{f}(a + \mathrm{H})$ non solo deve essere convergente, ma deve essere *assolutamente* convergente.

Quindi possiamo dire:

Se $\mathrm{f}(a+h)$ *deve essere sviluppabile in serie di Taylor per ogni* h *minore od eguale ad* H, *e la serie corrispondente deve essere assolutamente convergente anche per* $h = \mathrm{H}$, *condizione necessaria e sufficiente è che* $\mathrm{R}_n(\vartheta h)$ *converga uniformemente a zero anche per* $h = \mathrm{H}$.

Si sa che una serie di potenze per il limite superiore o inferiore dei punti compresi nel suo campo di convergenza, può essere divergente, convergente semplicemente, o convergente assolutamente. Le stesse modalità quindi può subire la serie di Taylor.

Ne possiamo quindi dedurre *che se il resto di Cauchy per* $h = \mathrm{H}$ *non converge uniformemente a zero per tutti i valori di* ϑ, *non può cioè, dato* σ, *trovarsi un indice* n *in modo che per qualunque* ϑ *fra 0 e 1 (compresi gli estremi)* R_n *sia sempre minore di* σ, *allora certamente la serie di Taylor per* $h = \mathrm{H}$ *non sarà convergente assolutamente.*

Così p. es. nella serie logaritmica il resto di Cauchy è

$$\mathrm{R}_n = \frac{x^n}{1+\vartheta x}\left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)^{n-1}$$

che per ogni ϑ e per ogni x positivo minore di 1 è sempre minore di

$$(1-\vartheta)^{n-1} x^n$$

che col crescere di n può rendersi, per *qualunque* ϑ, minore di qualunque quantità assegnabile. Dunque R_n per ogni x minore di 1, converge uniformemente a zero per ogni ϑ, ma per $x = 1$ e $\vartheta = 0$, $\mathrm{R}_n = 1$ e quindi ne deduciamo che certamente la serie logaritmica per $x = 1$ non può essere assolutamente convergente; risultato notissimo.

Invece nella serie binomiale il resto è

$$\mathrm{R}_n = \frac{m\,.\,m-1\ldots m-n+1}{n-1\,!}\, x^n (1-\vartheta)^{n-1}(1+\vartheta x)^{m-n}$$

e si dimostra che

$$u_n = \frac{m\,.\,m-1\ldots m-n+1}{n-1\,!}\, x^n$$

per ogni m positivo e $x \overline{\overline{<}}\, 1$ converge sempre a zero. Si vede allora che anche per $x = 1$ R_n converge a zero per qualunque ϑ, e quindi ne deduciamo, come del resto è ovvio, che la serie binomiale per m positivo è *assolutamente convergente* anche per $x = 1$.

Queste applicazioni sono semplicissime; noi le facciamo per illustrare la teoria esposta.

Si può infine osservare che fra le condizioni preliminari che noi avremmo dovuto stabilire negli enunciati vi dovea essere questa, che la funzione $\mathrm{f}(x)$ abbia le derivate di qualunque ordine per qualunque x dell'intervallo da a ad $a + \mathrm{H}$, e che queste derivate abbiano sempre valore finito. Come abbiamo osservato al § 2, ciò è una conseguenza immediata della possibilità di sviluppare in serie di Taylor la funzione; ora mi sembra ozioso ripetere continuamente nei varii enunciati questa condizione necessaria, perchè essa può ritenersi inclusa nella condizione che R_n deve convergere uniformemente a zero per qualunque ϑ e h; non potendo evidentemente quest'ultima condizione verificarsi se la prima non è anche verificata.

Pavia, gennaio del 1895.

Per un nuovo libro di Astronomia sferica.

Lo scrivere un'opera di scienza destinata all'insegnamento è sempre una cosa ardua e delicata. Ciò diventa ancora più difficile quando si tratta di Astronomia su cui esistono trattati classici come p. e. quelli del Brünnow e dello Chauvenet.

Possono questi trattati servire di guida allo studioso della più bella tra le scienze naturali? Essi sono destinati agli astronomi di professione, ed è perciò che vi si trova ampiamente svolta la teoria e la pratica dei diversi strumenti adoperati nelle delicate osservazioni astronomiche. Tutto questo, che è d'importanza capitale per l'Astronomo, riesce di poco giovamento alla maggior parte dei giovani che si avviano alla Laurea nelle scienze matematiche o nelle scienze fisiche.

Di qui la necessità di un'opera destinata all'insegnamento dell'Astronomia nelle nostre Università.

Nei primi anni di questo secolo videro la luce due trattati di Astronomia per opera di due eminenti astronomi italiani. Uno del celebre Piazzi, Direttore dell'Osservatorio di Palermo, avente per titolo: *Lezioni di Astronomia*, pubblicato nel 1817; l'altro: *Elementi di Astronomia con le applicazioni alla Geografia, Nautica, Gnomonica e Cronologia* fu pubblicato negli anni 1819-1820 dal Direttore dell'Osservatorio di Padova, Giovanni Santini.

Dopo questi due celebri trattati, che oramai sono troppo remoti dallo stato attuale della Scienza, nessuno altro è stato scritto, nemmeno da quegli Astronomi italiani che hanno avuto per molto tempo l'insegnamento dell'Astronomia nelle Università, quali gl'illustri Respighi e De Gasparis rapiti da poco tempo alla Scienza.

Se si volesse indagare la ragione di tale mancanza si troverebbe subito nel fatto che presso di noi i libri di scienza, specialmente quelli destinati all'insegnamento superiore, rendono quasi niente all'autore che si accinge alla ingrata fatica di scrivere un libro per l'insegnamento. Quel poco, che si ricava dalla vendita di alcune copie, in parte serve a pagare le spese di stampa ed in parte al mantenimento di quegli intermediari tra il pubblico e l'autore, che si chiamano *Editori!*

Il libro che ha riempito il vòto ora lamentato è quello che ha per titolo: *Astronomia sferica elementarmente esposta dal* D.r Francesco Porro, Direttore dell'Osservatorio di Torino e Professore di Astronomia nella R. Università.

In un volume di sole 136 pagine l'egregio Autore ha saputo condensare tutte quelle parti dell'Astronomia sferica che sono necessarie in uno studio preliminare. Diciamo *condensare*, poichè approviamo completamente la forma concisa adottata dall'Autore. Essa fa sì che lo studioso sia obbligato ad appropriarsi con meditazione quanto legge, e ciò ridonda a tutto suo vantaggio.

Il libro è composto di dieci capitoli:

La sfera ed il suo moto diurno.
Il moto annuo del Sole.
Trasformazione delle coordinate.
La misura del tempo.
I movimenti della Luna.
La parallasse diurna e la refrazione.
Le variazioni dei piani fondamentali.
L'aberrazione e la parallasse annua.
Le riduzioni dei luoghi stellari ed i moti proprî.
Il sistema Solare.

Sotto forma di note a piè di pagina sono date molte notizie storiche tanto relative alle scoperte antiche dell'Astronomia, quanto alle più recenti.

Ecco come fa notare il genio di Keplero nella nota a pag. 124:

« Per apprezzare degnamente l'importanza della scoperta di Keplero, « bisogna pensare che tutta la filosofia prima di lui era ispirata al « concetto dell'impossibilità che i moti celesti non fossero circolari ed « uniformi. Lo Schiaparelli ha potuto scrivere un libro ammirabile « sui « Precursori di Copernico »; ma io credo che ben difficilmente « il più acuto raccoglitore di documenti storici troverebbe nell'astro- « nomia greca e in quella del risorgimento i precursori di Keplero. « Da questo punto di vista adunque parmi si possa dire che l'intui- « zione kepleriana è stata più ardita e più originale della copernicana, « benchè questa abbia preparato quella ».

I giudizii sui lavori altrui sono dati con una sobrietà che onora il giovane e laborioso astronomo. Il suo libro perciò merita tutto il favore del pubblico, e noi mentre lo raccomandiamo ai cultori della scienza, ci auguriamo che l'autore possa presto pubblicarne una seconda edizione nella quale vedremmo volentieri almeno tre altri capitoli, uno relativo agli eclissi, un altro relativo ai metodi che si adoperano per determinare il tempo, la latitudine, gli azimut e le longitudini ed un terzo relativo al calendario.

Torino 6 Marzo 1895.

N. Jadanza.

Inversion cyclique des fonctions monogènes et holomorphes.

Lors du 22^{me} Congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences, tenu à Besançon en 1893, j'ai eu l'honneur de présenter aux 1re et 2^{me} sections réunies (*mathématiques, astronomie, mécanique et géodesie*) un mémoire de mon compatriote Mr. le capitaine d'artillerie J. M. Rodrigues, ayant trait à l'inversion cyclique des fonctions monogènes et holomorphes, ainsi que quelques applications ressortant de certains théorèmes qu'il a établi.

L'Association française accorde à chaque auteur, pour la publication *in extenso* de ses notes et mémoires, dix pages, au maximum, dans la seconde partie du Compte rendu des Congrès, à moins qu'il ne s'agisse d'un sujet d'une importance remarquable, car alors la Commission de publication peut proposer au Conseil d'Administration de fixer exceptionnellement une étendue plus considérable.

Or, le travail de M. Rodrigues, étant assez long, je me suis permis de le fractionner, c'est-à-dire d'en former de petits mémoires dont l'étendue ne surpassât pas les limites fixées par l'Association française. Toutefois, la réduction à de telles limites de la partie la plus importante du mémoire étant impossible, le travail, dont le titre se trouve plus haut, n'a pas pu être publié alors mais seulement deux applications assez intéressantes des théories qu'on y trouve exposées. Vu cela et tenant compte en même temps d'un entretien que j'ai eu là-dessus à Turin, un mois après le Congrès, avec le directeur de la *Rivista di Matematica,* M. le professeur Peano, je me permets de faire aujourd'hui un compte rendu assez détaillé de la partie non publiée du mémoire de mon compatriote.

***

On sait que si une fonction à une variable imaginaire est susceptible d'une valeur unique, quel que soit le chemin qui conduise au point considéré, dans une aire donnée (C) elle est *uniforme* dans cette aire, et si elle est constamment uniforme, finie, continue et analytique, on dira qu'elle est *holomorphe* dans la même aire (C).

De même, si une fonction est holomorphe dans une aire donnée, sauf en de certains points isolés, qui sont les pôles, on dit que la fonction est méromorphe dans l'aire (C). Les propriétés de ces trois genres de fonctions, si étroitement liées, ont été assez bien étudiées par deux des plus eminents géomètres contemporains, le célèbre suédois Mittag-Leffler et l'allemand Weierstrass, ainsi que par bien d'autres savants, tels que MM. Hermite, Darboux, Picard, etc. Par contre, les fonctions inverses de ces fonctions étant peu étudiées, il me semble utile de faire connaître quelques uns des résultats obtenus par M. Rodrigues au cours de ses recherches à ce sujet.

Dans le mémoire de M. Rodrigues présenté au Congrès de Besançon, l'auteur examine si les fonctions inverses des fonctions uniformes et holomorphes, jouissent, de même que les fonctions primitives, des propriétés de monogeneité et d'holomorphisme.

De prime abord il tâche de trouver une méthode générale de l'inversion des fonctions, en concluant en suite les propriétés caractéristiques de ces fonctions, et pour cela il commence par exposer la théorie de ce qu'il appele

Cycles polaires.

Le problème de l'inversion est basé sur la détérmination préalable de la distribution et séparation des *zeros* des fonctions holomorphes dans une région de l'aire, obtenue par moyen des cycles polaires.

La propriété caractéristique des polynômes consiste dans leur décomposition en facteurs primaires. En géneralisant la décomposition des polynômes en facteurs, M. Weierstrass à découvert la formule

$$\frac{f(x)}{f(0)} = e^{G(x)} \Pi \left[\left(1 - \frac{x}{a}\right) e^{Q_\omega\left(\frac{x}{a}\right)} \right]$$

qui donne pour toutes les fonctions holomorphes, l'expression analytique qui permet de mettre en evidence leurs racines.

Les facteurs du produit Π ont été nommés par l'illustre géometre *facteurs primaires*; a_1, a_2, a_3, ... les *zéros* de la fonction et Q_ω un polynôme dont son degré caracterise l'*espèce* de fonction holomorphe.

Pour déterminer le numero de *zéros* que l'equation holomorphe

$$f(z) - u \cdot \varphi(z) = 0$$

contient dans l'intérieur d'un contour, il faut, au dire de M. Rodrigues, connaître le numero de *zéros* de la fonction $f(z)$, ce qu'on obtient par le théorème de Cauchy, en cherchant la variation de l'argument de la fonction le long d'un contour fermé si ses coordonnées sont des fonctions rationnelles d'une variable réelle.

Dans ce cas, la détermination du numero de *zéros* de la fonction holomorphe exige des opérations analogues à celles du théorème de Sturm dans l'algèbre.

Au problème de la détermination des *zéros* des fonctions à l'intérieur d'une aire, se rattache un autre — *celui de la distribution et de la séparation des racines à l'intérieur d'un contour.*

Les contours pouvent être donnés arbitrairement, ou être déterminés *a priori* pour chaque espèce de fonction, comme il résulte des propositions suivantes :

THÉORÈME. — *Si on attribue au module de* u *des valeurs inférieurs au module principale* k *de la fonction uniforme*

$$u = \frac{f(z)}{\varphi(z)} = X + iP$$

les équations holomorphes

$$f(z) = 0$$
$$f(z) - u \, . \, \varphi(z) = 0$$

ont le même nombre de racines dans l'intérieur d'un contour défini par l'équation

$$k^2 = X^2 + Y^2 \, .$$

En effet, soit

$$u = \frac{f(z)}{\varphi(z)} = X + iY \; ;$$

k le module de u et K le module principale de la fonction $X + iY$; l'équation

$$k^2 = X^2 + Y^2$$

représente pour toutes les valeurs de k inférieures à K un systhème de courbes fermées, lesquelles se coupent pas, vu que les fonctions sont uniformes. Or, le long de ces courbes on a pour toutes les valeurs de $k < K$

$$\text{mod}\left(u \, . \, \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right) = \frac{\text{mod} \, . \, u}{\text{mod}\left(\frac{f(z)}{\varphi(z)}\right)} = \frac{k}{K} < 1$$

donc, à l'intérieur de ces contours les équations holomorphes

$$f(z) = 0 \quad \text{et} \quad f(z) - u \, . \, \varphi(z) = 0$$

possèdent le même nombre de racines.

Soient maintenant

$$t_1 \, , \; t_2 \, , \; t_3 \, , \; \ldots \; t_n$$
$$z_1 \, , \; z_2 \, , \; z_3 \, , \; \ldots \; z_n$$

les racines simples de ces équations existentes dans le même contour et disposées suivant la serie des modules croissants ; les *zéros* des fonctions holomorphes étant des points isolés séparés par des intervalles determinés, il est toujours possible de séparer les racines de la première équation par un systhème de cercles

$$c_1 \, , \; c_2 \, , \; c_3 \, , \; \ldots \; c_n$$

dont les centres sont

$$t_1 \, , \; t_2 \, , \; t_3 \, , \; \ldots \; t_n$$

et les rayons

$$r_1 \, , \; r_2 \, , \; r_3 \, , \; \ldots \; r_n \, .$$

À ces cercles M. Rodrigues a donné le nom de *cycles polaires*, car leurs centres sont les lieux géometriques des pòles de la fonction méromorphe

$$u = \frac{f(z)}{\varphi(z)}$$

et les racines de l'équation holomorphe

$$f(z) - u \, . \, \varphi(z) = 0$$

existentes dans les *aires polaires*, sont désignées sous le nom de *racines cycliques*.

Il s'ensuit de cette définition que si le long d'un cycle polaire on a constamment

$$\text{mod}\left(u \, . \, \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right) < 1$$

l'équation holomorphe a une racine cyclique et une seule dans l'aire du cycle, et par suite l'aire primitive, limitée par le contour fermé C, est décomposée en des *aires polaires* et des *espaces lacunaires intercycliques*. Alors les racines cycliques sont distribuées par les cycles, en occupant une position excentrique.

Une autre conséquence est que si les racines polaires de l'équation

$$f(z) = 0$$

occupent les sommets d'un polygone à l'intérieur d'un contour fermé C, les racines cycliques de l'équation

$$f(z) - u \, . \, \varphi(z) = 0$$

se distribuent aussi à l'intérieur du contour suivant les sommets d'un polygone d'un même nombre de côtés, et comme les distances des centres des cycles sont proportionelles aux distances des excentriques, le polygone des racines polaires est semblable au polygone des racines cycliques.

Les cycles polaires ne sont pas toujours des cercles; dans beaucoup de cas particuliers ils sont des courbes fermées (des ovales de Cassini et des lemniscates de Bernouilli).

C'est ce que nous fait voir le

THÉORÈME II. — *Si pour toutes les valeurs de la variable on a constamment*

$$\operatorname{mod}\big(u \,.\, \varphi(z)\big) < k$$

l'équation holomorphe

$$(z-t)(z-t') - u \,.\, \varphi(z) = 0$$

a deux racines séparées par des ovales de Cassini:

$$k = \operatorname{mod}\left[(z-t)(z-t')\right].$$

En effet, l'équation

$$k = \operatorname{mod}(z-t) \times \operatorname{mod}(z-t')$$

exprime que le produit des distances de tous points du plan à deux autres fixes est constant; donc le lieu géometrique figuré par cette équation est une *cassinique.*

Or, si le long de cette courbe on a constamment

$$\operatorname{mod}\big(u \,.\, \varphi(z)\big) < k$$

on aura

$$\frac{\operatorname{mod}\big(u \,.\, \varphi(z)\big)}{k} < 1$$

et par suite

$$\operatorname{mod}\left(\frac{u \,.\, \varphi(z)}{(z-t)(z-t')}\right) < 1 \;;$$

donc dans l'intérieur de la cassinique, l'équation holomorphe a autant de racines que l'équation

$$(z-t)(z-t') = 0.$$

Les cycles polaires qui séparent les deux racines cycliques de l'équation proposée à l'intérieur de la cassinique, sont encore deux

ovales. En effet, k étant égal au carré de la demi-distance focale, c'est-à-dire

$$k = \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 = \operatorname{mod}\left(\frac{t-t'}{2}\right)^2$$

l'équation

$$k = \operatorname{mod}\left[(z-t)(z-t')\right]$$

définit une *lemniscate de Bernouilli*, ayant une racine dans chaque branche.

Pour toutes les valeurs de k inférieures à $\left(\frac{\delta}{2}\right)^2$ cette équation exprime une ovale contenue dans chaque branche de la lemniscate. Ces ovales sont donc les *cycles polaires* qui séparent les deux racines cycliques de l'équation

$$(z-t)(z-t') - u \,.\, \varphi(z) = 0.$$

On doit observer que ce théorème est encore applicable à l'équation

$$f(z) - u \,.\, \varphi(z) = 0$$

si la fonction $f(z)$ est un polynome entier de n^{ieme} dégré. Dans ce cas l'équation holomorphe proposée a n racines cycliques dans l'intérieur de la cassinique de n foyers

$$k = \operatorname{mod}\left[(z-t_1)(z-t_2)\ldots(z-t_n)\right]$$

si le long de cette courbe on a constamment

$$\operatorname{mod}\big(u \,.\, \varphi(z)\big) < k.$$

Théorie de l'inversion.

Ces théorèmes étant posés M. Rodrigues traite du problème de l'inversion des fonctions monogènes, uniformes et holomorphes, lequel se traduit par l'algorithme

$$u = G(z) \quad \text{et} \quad z = H(u).$$

Il considère toute fonction uniforme définie par le rapport entre deux fonctions holomorphes

$$u = \frac{f(z)}{\varphi(z)}$$

et dans ce cas la question se ramène à la détermination des racines cycliques de la fonction holomorphe

$$f(z) - u \,.\, \varphi(z) = 0$$

lesquelles, dans une région déterminée du plan, sont soumises à une certaine loi de distribution et de séparation.

M. Rodrigues envisageant ainsi la question, a établi les théorèmes suivants:

THÉORÈME III. — *Le nombre de fonctions inverses d'une fonction uniforme dans une aire donnée*

$$u = \frac{f(z)}{\varphi(z)}$$

est égal à celui des racines cycliques que l'équation holomorphe

$$f(z) - u \, . \, \varphi(z) = 0 \qquad (a)$$

possède dans l'intérieur de son contour.

En effet, si l'équation holomorphe $G(z) = 0$ a une racine à l'intérieur d'un contour fermé, son expression analytique est donnée par la formule de Cauchy

$$F(z) = \frac{1}{2 i \pi} \cdot \int_c \frac{G'(z)}{G(z)} \, . \, F(z) \, . \, dz \, .$$

Or, ayant n racines l'équation (a) dans un contour C, ses *zéros* sont des points isolés, séparés par des intervalles déterminés et on peut les séparer par moyen de n cycles polaires, dont chacun a une racine. De sorte qu'en appliquant à chaque cycle polaire le théorème de Cauchy, il en résulte l'expression analytique des racines cycliques de l'équation (a), à savoir:

$$\left.\begin{array}{l} F(z_1) = \dfrac{1}{2 i \pi} \displaystyle\int_{c_1} \dfrac{f'(z) - u \, . \, \varphi'(z)}{f(z) - u \, . \, \varphi(z)} \, . \, F(z) \, . \, dz \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F(z_n) = \dfrac{1}{2 i \pi} \displaystyle\int_{c_n} \dfrac{f'(z) - u \, . \, \varphi'(z)}{f(z) - u \, . \, \varphi(z)} \, . \, F(z) \, . \, dz \end{array}\right\}$$

Dans le cas particulier de $F(z) = z$, ces expression fournissent les racines $z_1, z_2, \ldots z_n$ en fonction des integrales curvilignes; et en les considérant comme des fonctions de u, elles réprésentent des fonctions inverses de la fonction uniforme

$$u = \frac{f(z)}{\varphi(z)} \, .$$

Donc, le nombre des fonctions inverses est égale au nombre des racines cycliques.

THÉORÈME IV. — *Les racines cycliques de l'équation holomorphe*

$$f(z) - u \, . \, \varphi(z) = 0$$

s'expriment en fonction des racines de l'équation

$$f(z) = 0$$

comprises dans la même région polaire, par des intégrales curvilignes le long de leurs cycles.

En effet, mettant l'expression générale de la fonction des racines cycliques sous la forme

$$F(z) = \frac{1}{2 i \pi} \int_c d \, . \log \big(f(z) - u \, . \, \varphi(z)\big) \, . \, F(z) \, . \, dz$$

il vient

$$F(z) = \frac{1}{2 i \pi} \int_c \frac{f'(z) \, . \, F(z)}{f(z)} \, dz + \frac{1}{2 i \pi} \int_c d \, . \log \left(1 - u \, . \, \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right) . \, F(z) \, . \, dz \, .$$

Autrement, dans le cycle polaire la fonction $f(z)$ a seulement une racine, d'où l'on déduit, en vertu du théorème de Cauchy

$$F(z) = F(t) + \frac{1}{2 i \pi} \int_c d \, . \log\left(1 - u \, . \, \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right) F(z) \, . \, dz \qquad (b)$$

et vu que

$$d \, . \left[F(z) \log \left(1 - u \, . \, \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)\right] = d . \log \left(1 - u \, . \, \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right) . \, F(z) + \log \left(1 - u \, . \, \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right) . \, F'(z) \, . \, dz$$

on aura

$$\int_c d \, . \log \left(1 - u \, . \, \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right) . \, F(z) \, . \, dz = - \int_c \log \left(1 - u \, . \, \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right) . F'(z) . dz \quad (c)$$

et si l'on transporte l'origine des coordonnées au centre du cycle, la formule (b), en tenant compte de l'espression (c), deviendra enfin

$$F(z) = F(t) - \frac{1}{2 i \pi} \int_c \log \left(1 - u \, . \, \frac{\varphi(t + z')}{f(t + z')}\right) . \, F(t + z') \, . \, dz'$$

ce qui exprime que les racines cycliques sont des fonctions des racines polaires.

En définissant la ligne d'intégration entre deux points du plan z_0 et z, les intégrales qui expriment les fonctions inverses de la fonction uniforme déterminent une classe de fonctions qui fournissent une suite de propriétés remarquables des racines cycliques.

Théorème V. — *La fonction inverse de la fonction intégrale*

$$w = \frac{1}{2i\pi}\int_c^z \frac{f'(z) - u \cdot \varphi'(z)}{f(z) - u \cdot \varphi(z)} \cdot z \cdot dz$$

est une fonction périodique, dont la période est la racine cyclique de la fonction holomorphe

$$f(z) - u \cdot \varphi(z) = 0 .$$

Pour prouver cette proposition soit Z la fonction affectée de l'intégrale, et en partant du point initial z_0, pris sur un point quelconque du cycle polaire, la marche de la variable se réduira au parcours multiple du cycle suivi d'un chemin reetiligne $z_0 z$; c'est-à-dire

$$\int_c^z Z \cdot dz = 2 m i \pi \cdot R + \int_c^z Z \cdot dz .$$

D'autre côté on sait que les *résidus* de la fonction Z sont les intégrales curvilignes qui expriment les racines cycliques de l'équation holomorphe

$$w = m z + v$$

où m désigne un nombre entier quelconque et v l'intégrale curviligne. La fonction intégrale w est donc une fonction de détermination multiple, ayant respectivement par périodes les racines cycliques de la fonction primitive et de la transformée.

Il en résulte que, si l'on effectue l'inversion des fonctions w et v, on obtient

$$z = H(w) \quad \text{et} \quad z = H(v)$$

et les limites supérieures des intégrales ne changeant pas, car le point z reste fixe, il résulte

$$H(w) = H(v)$$

d'où

$$H(m z + v) = H(v) .$$

La fonction H inverse de la fonction intégrale est une fonction périodique, ayant par période les racines cycliques de l'équation holomorphe

$$f(z) - u \cdot \varphi(z) = 0 .$$

Théorème VI. — *Les n fonctions inverses de la fonction uniforme*

$$u = \frac{f(z)}{\varphi(z)}$$

sont des intégrales d'une équation différentielle linéaire d'ordre $n-1$ à de coefficients uniformes.

En effet, supposant que le contour C enveloppe les cycles polaires $c_1, c_2, c_3, \dots c_n$ et donnant à la marche de la variable le parcours multiple de ce contour suivi d'un chemin rectiligne, la fonction intégrale

$$w = \frac{1}{2i\pi}\int_C^z Z \cdot dz$$

devient

$$\int_C^z Z \cdot dz = 2 m_1 i \pi \int_{c_1} Z \cdot dz + 2 m_2 i \pi \int_{c_2} Z \cdot dz + \dots$$
$$+ 2 m_n i \pi \int_{c_m} Z \cdot dz + \int_{z_0}^z Z \cdot dz$$

d'où on concluera

$$w = m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_n z_n + v$$

où

$$m_1, m_2, \dots m_n$$

sont des nombres entiers indéterminés qui expriment combien de fois la variable parcourt son cycle respectif.

L'integrale curviligne le long du contour enveloppant C est d'ailleurs nulle, car d'après l'hypothèse considèrée, la fonction affectée de l'integrale n'admet pas de discontinuités dans les espaces intercycliques, et par consequent l'expression précédente se réduit à

$$m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + \dots + m_n z_n = 0$$

d'où l'on conclud que toute racine cyclique peut s'exprimer linéairement en fonction des autres $n-1$, propriété qui caractèrise les intégrales d'une équation différentielle linéaire à de coefficients uniformes de l'ordre $n-1$.

M. Rodrigues considère ensuite l'integrale curviligne

$$F(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{f'(z) - u \cdot \varphi'(z)}{f(z) - u \cdot \varphi(z)} \cdot F(z) \cdot dz$$

comme une fonction de la variable u, ce qui fournit d'autres conséquences assez nombreuses et qui l'ont conduit à la solution du problème en vue. Les voici exprimées par les théorèmes ci-après.

Théorème VII. — *Les fonctions inverses de la fonction uniforme*

$$u = \frac{f(z)}{\varphi(z)}$$

sont des fonctions holomorphes dans les aires des cycles polaires.

En effet, les fonctions inverses de cette fonction étant les racines cycliques de l'équation holomorphe

$$f(z) - u \cdot \varphi(z) = 0$$

il résulte, en faisant

$$G(z) = f(z) - u \cdot \varphi(z)$$

l'identité

$$\frac{1}{G(z)} = \sum_0^n \left[\left(\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)^p \cdot \frac{u^p}{f(z)}\right] + \left(\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)^n \cdot \frac{u^n}{G(z)} \cdot$$

En multipliant par $\Phi(z) \cdot dz$, il viendra, l'intégration faite le long du cycle polaire

$$\frac{\Phi(z)}{G'(z)} = \sum_0^\infty J_p \cdot u^p + R_n \cdot$$

L'expression du reste

$$R_n = \frac{1}{2i\pi}\int \left(\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)^p \cdot \frac{u^n \cdot dz}{G(z)}$$

devient, d'après le théorème de M. Darboux

$$R_n = \frac{\lambda s}{2\pi} \cdot \left(\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)^n \cdot \frac{u^n}{G(z)}$$

λ étant le facteur de M. Darboux, s le périmètre du cycle polaire et Z un point quelconque de ce cycle.

Or, si le long de tout cycle polaire

$$\text{mod}\left(u \cdot \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right) < 1$$

le reste tend vers zéro, au fur et à mesure que n augmente indéfiniment, d'où l'on suit que la série

$$\frac{\Phi(z)}{G'(z)} = \sum^\infty J_p \cdot u^p \qquad (d)$$

est convergente.

L'expression générale des coefficients est

$$J_p = \frac{1}{2i\pi}\int_c \left(\frac{\Phi(z)}{f(z)}\right)^p \cdot \frac{\Phi(z)}{\psi(z)} \cdot dz$$

et le cycle polaire n'ayant qu'une racine, on aura

$$J_p = \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{\left(\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)^p \cdot \left(\frac{\Phi(z)}{\varphi(z)}\right)}{(z-t)^{p+1}} \cdot dz$$

d'où

$$J_p = \frac{1}{p!} \cdot \frac{d^p\left[\left(\frac{\varphi(t)}{f'(t)}\right)^p \cdot \frac{\Phi(t)}{\psi(t)}\right]}{dt^p}$$

et puisque

$$f(z) = (z-t) \cdot \psi(z)$$

on a

$$\psi(z) = f'(z)$$

ce qui donne pour l'expression de la série (d)

$$\frac{\Phi(z)}{G'(z)} = \sum_0^\infty \left\{\frac{u^p}{p!} D^p\left[\left(\frac{\varphi(t)}{f'(t)}\right)^p \cdot \frac{\Phi(t)}{f'(t)}\right]\right\}$$

qui n'exprime que le développement d'une fonction holomorphe des racines cycliques suivant les puissances de n.

En posant maintenant

$$\Phi(z) = G'(z) \cdot F(z)$$

il résulte la série

$$F(z) = \sum_0^\infty \left\{\frac{u^p}{p!} \cdot D^p\left[\left(\frac{\varphi(t)}{f'(t)}\right)^p \cdot \left(1 - u \cdot \frac{\varphi'(t)}{f'(t)}\right) \cdot F(t)\right]\right\}$$

ce qui veut dire, que les racines cycliques $z_1, z_2, \ldots z_n$ s'expriment en fonction des racines $t_1, t_2, \ldots t_n$, étant en même temps des fonctions holomorphes de n dans les régions de leurs cycles.

Théorème VIII. — *Les fonctions inverses d'une fonction uniforme*

$$u = \frac{f(z)}{\varphi(z)}$$

sont des fonctions holomorphes pour toutes les valeurs du module de u *inférieures au module principale de la fonction uniforme.*

En effet, on a vu que

$$F(z) = F(t) - \frac{1}{2i\pi}\int_c \log\left(1 - u \cdot \frac{\varphi(z)}{f'(z)}\right) \cdot F'(z) \cdot dz$$

et en remarquant que si le long de tout cycle polaire

$$\text{mod}\left(u \cdot \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right) < 1$$

la fonction logarithmique se développe en série convergente

$$-\log\left(1-u\,.\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)=\sum_0^\infty\left[\frac{u^p}{p}\,.\left(\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)^p\right]$$

et en multipliant par $F'(z)$, et faisant l'intégration le long du cycle polaire, on arrive, d'après le théorème de Cauchy, à la série qui traduit le problème de l'inversion

$$F(z)=F(t)+\sum_1^\infty\left\{\frac{u^p}{p\,!}\,D^{p-1}\left[\frac{\varphi(t)}{f'(t)}\right]\right\}$$

dont la convergence reste à déterminer.

Pour cela, désignons par P et Q les modules *maximum* de $\varphi(z)$ et $f(z)$, par P' et Q' ceux de $F'(z)$ et $\psi'(z)$, et par μ le module *maximum* de la variable; le module *maximum* du terme général sera, en vertu d'un théorème assez connu

$$\bmod T_p \leqq \frac{s}{2\,\pi\,p}\,.\,P'\left(\frac{\mu}{r}\,.\,\frac{P}{Q'}\right)^p$$

où s réprésente le périmètre du cycle et r le module *maximum* de la variable $(z-t)$.

Or, si

$$f(z)=(z-t)\,.\,\psi(z)$$

et par suite

$$Q'=r\,.\,Q$$

on a

$$\bmod .\, T_d \leqq \frac{s}{2\,\pi\,p}\,.\,P'\left(\mu\,.\,\frac{P}{Q}\right)^p.$$

En formant la série des modules, il vient la série convergente

$$S=\frac{1}{2\,\pi}\,.\,P'\left[\left(\mu\,.\,\frac{P}{Q}\right)+\frac{1}{2}\left(\mu\,\frac{P}{Q}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\mu\,.\,\frac{P}{Q}\right)^3+\ldots\right]$$

dont la somme est

$$S=-\frac{s}{2\,\pi}\,.\,P'\log\left(1-\mu\,.\,\frac{P}{Q}\right)$$

si

$$\mu\,\frac{P}{Q}<1 \quad \text{ou} \quad \mu<\frac{P}{Q}$$

mais si k est le *module principale* de la fonction

$$n=\frac{f(z)}{\varphi(z)}$$

on a

$$k<\frac{P}{Q}$$

donc, pour toutes les valeurs de μ inférieures à k, la série est convergente. Si l'on arrête le développement de la série au n^{ieme} terme, on aura le reste

$$R_n=\frac{1}{2\,\pi}\,.\,P'\left[\frac{1}{n}\left(\mu\,\frac{P}{Q}\right)^n+\frac{1}{n+1}\left(\mu\,.\,\frac{P}{Q}\right)^{n+1}+\ldots\right].$$

Si l'on substitue les dénominateurs $n+1$, $n+2$, ... par n, les termes de la série augmenteront, d'où

$$R_n<\frac{s}{2\,\pi}\,.\,\frac{P}{n}\left(\mu\,\frac{P}{Q}\right)^n.\left[1+\left(\mu\,\frac{P}{Q}\right)+\left(\mu\,\frac{P}{Q}\right)^2+\ldots\right]$$

et comme on doit avoir

$$\mu\,\frac{P}{Q}<1$$

il viendra

$$R_n<\frac{s}{2\,\pi}\,.\,\frac{P'}{n}\left(\mu\,\frac{P}{Q}\right)^n.\,\frac{1}{1-\mu\,\frac{P}{Q}}$$

pour l'expression de la limite supérieure du reste.

Dans le cas particulier de $F(z)=z$, les fonctions inverses de la fonction uniforme

$$u=\frac{f(z)}{\varphi(z)}$$

sont exprimées par la série convergente dans le cycle polaire de convergence

$$z=t+\sum_1^\infty\left[\frac{u^p}{p\,!}\,.\,D^{p-1}\left(\frac{\varphi(t)}{f'(t)}\right)^p\right]$$

M. Rodrigues considérant maintenant la fonction holomorphe

$$G(z)-n=0$$

tâche d'obtenir l'expression analytique de ses racines cycliques.

Or, cette équation étant un cas particulier de l'équation générale

$$f(z)-u\,.\,\varphi(z)=0$$

on tire pour la valeur de l'expression des racines cycliques, la série convergente

$$z = t + \sum_1^\infty \left[\frac{u^p}{p\,!} \mathrm{D}^{p-1} (\mathrm{G}'(t,^{-p}) \right]$$

expression qui traduit le

THÉORÈME IX. — *Les fonctions inverses d'une fonction holomorphe sont des fonctions holomorphes pour toutes les valeurs du module inférieures à son module principal.*

Inversion des fonctions à plusieurs variables.

Ces propositions posées, M. Rodrigues fait la généralisation du théorème de l'inversion aux fonctions à plusieurs variables, ou plutôt à un système de deux équations à deux variables. En reprenant la marche suivie plus haut, il commence par démontrer le

THÉORÈME X. — *Les racines cycliques de l'équation holomorphe*

$$\mathrm{f}(z) - \Sigma\, u^n \,.\, \mathrm{f}_n(z) = 0$$

sont aussi des fonctions holomorphes dans la région de leurs cycles.

En effet, si le long des cycles polaires on a constamment

$$\mathrm{mod}\left(\Sigma\, u^n \,.\, \frac{\mathrm{f}_n(z)}{\mathrm{f}(z)}\right) < 1$$

la série résultante du théorème de l'inversion

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{F}(t) + \sum_1^\infty \left\{ \frac{u^p}{p\,!} \mathrm{D}^{p-1} \left[\mathrm{F}(t) \,.\, \left(\Sigma\, u^{n-1} \frac{\mathrm{f}_n(t)}{\mathrm{f}'(t)} \right)^p \right] \right\}$$

est une série convergente.

En développant les puissances p du polynome Σ, le terme général du développement est aussi le terme général de la série résultante, ce qui donne

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{F}(t) + \ldots + u^n\, \Sigma \left\{ \frac{\mathrm{D}^{p-1} \left[\mathrm{F}(t) \,.\, \left(\frac{\mathrm{f}_1}{\mathrm{f}'} \right)^{p_1} \,.\, \left(\frac{\mathrm{f}_2}{\mathrm{f}'} \right)^{p_2} \ldots \right]}{p_1\,!\, p_2\,! \ldots} \right\} + \ldots$$

où

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots$$
$$m = p_1 + 2\,p_2 + 3\,p_3 + \ldots$$

Cette série permet d'effectuer une transformation qui donne l'expression des coefficients des puissances de n de son développement.

Soit

$$\mathrm{U}_p = u^p$$

et

$$\mathrm{U} = \Sigma\, u^{n-1} \,.\, \frac{\mathrm{f}_n(t)}{\mathrm{f}'(t)}\,.$$

En effectuant le développement de cette fonction suivant les puissances de u, on trouve

$$\mathrm{U}_p = \sum_0^\infty \left[\frac{u^q}{q\,!} (\mathrm{U}_p{}^q)_0 \right]$$

et en multipliant par $\mathrm{F}(t)$ et dérivant, il vient

$$\mathrm{D}^{p+1}[\mathrm{F}'(t) \,.\, \mathrm{U}_p] = \sum_0^\infty [u^q \,.\, \mathrm{D}^{p-1} (\mathrm{F}'(t) \,.\, \mathrm{S}_p)]$$

ou

$$\mathrm{S}_p = \frac{1}{q\,!} \,.\, \mathrm{D}^q (\mathrm{U}^p)_0\,.$$

La série

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{F}(t) + \sum_1^\infty \frac{u^p}{p\,!} \,.\, \mathrm{P}_p$$

peut se développer suivant les puissances de n, et en effectuant l'addition de tous les coefficients de même parité, on aura

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{F}(t) + \sum_1^\infty \mathrm{Q}_m \,.\, u^n$$

ou

$$\mathrm{Q}_m = \frac{1}{m\,!} \mathrm{D}^{m-1} (\mathrm{F}(t) \,.\, \mathrm{S}_m) + \ldots + \frac{1}{2} \mathrm{F}(t) \,.\, \mathrm{S}_2) + (\mathrm{F}(t) \,.\, \mathrm{S}_1)$$

ou, plus simplement

$$\mathrm{Q}_m = \sum_1^\infty \left[\frac{1}{p\,!} \mathrm{D}^{p-1} (\mathrm{F}(t) \,.\, \mathrm{S}_p) \right]$$

où

$$\mathrm{S}_p = \frac{1}{(m-p)\,!} \,.\, \mathrm{D}^{m-p} \left[\left(\Sigma\, u^{n-1} \,.\, \frac{\mathrm{f}_n(t)}{\mathrm{f}'(t)} \right)^p \right]_0\,.$$

Par suite, le développement en série d'une fonction des racines cycliques de l'équation holomorphe

$$\mathrm{f}(z) - \Sigma\, u^n \,.\, \mathrm{f}_n(z) = 0$$

suivant les puissances de n, s'obtient par la formule

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{F}(t) + \ldots + n^n\, \Sigma \left\{ \frac{\mathrm{D}^{p-1} \left[\mathrm{F}'(t) \,.\, \left(\frac{\mathrm{f}_1}{\mathrm{f}'} \right)^{p_1} \,.\, \left(\frac{\mathrm{f}_2}{\mathrm{f}'} \right)^{p_2} \ldots \right]}{p_1\,!\, p_2\,!\, p_3\,! \ldots} \right\} + \ldots \quad (e)$$

ou

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{F}(t) + \ldots + u^n \sum_1^\infty \left\{ \frac{1}{p!} \mathrm{D}^{p-1} (\mathrm{F}(t) \,.\, \mathrm{S}_p) \right\} + \ldots$$

Or, la série primitive

$$F(z) = F(t) + \sum_0^\infty \left\{ \frac{u^p}{p\,!} D^{p-1} \left[F(t) \left(\Sigma\, u^{n-1} \cdot \frac{f_n(t)}{f'(t)} \right)^p \right] \right\}$$

étant convergente dans la région d'un cycle polaire, il faut reconnaître si les séries qui en ressortent sont aussi convergentes dans la même région.

Cette question est une conséquence directe du théorème de Mr. Weierstrass sur la convergence des séries. En effet, les séries issues du développement général de la série primitive étant convergentes dans les aires des cycles, celles qui en résultent, ordonnées suivant les puissances de u, sont aussi convergentes dans la même région.

Cela étant, M. Rodrigues considère le système de deux équations simultanées à deux variables imaginaires x et y

$$\left. \begin{aligned} f(x, y) - \alpha \cdot \varphi(x, y) = 0 \\ F(x, y) - \beta \cdot \Phi(x, y) = 0 \end{aligned} \right\} \qquad (f)$$

où f, φ, F, Φ désignent des fonctions holomorphes.

Ces équation pouvent se mettre sous la forme

$$G(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad H(x, y) = 0$$

et si x' et y' réprésentent un système de solutions communes à ces équations, on a, en tenant compte de l'équation

$$y - y' = \frac{d\,y}{d\,x}(x - x')$$

celles-ci

$$G(x, y) = (x - x')\left(G'_x + G'_y \cdot \frac{d\,y}{d\,x} + \ldots\right)$$

$$H(x, y) = (y - y')\left(H'_y + H'_x \cdot \frac{d\,x}{d\,y} + \ldots\right)$$

ou plus simplement

$$G(x, y) = (x - x') \cdot G_1\left(x, \frac{d\,y}{d\,x}\right)$$

$$H(x, y) = (y - y') \cdot H_1\left(y, \frac{d\,x}{d\,y}\right)$$

donc

$$G \cdot H = (x - x')(y - y') \cdot G_1 \cdot H_1$$

ce qui donne

$$\int_c \int_{c'} \frac{Q(x, y)}{G \cdot H} \cdot d\,x \cdot d\,y = \int_c \int_{c'} \frac{\dfrac{Q(x, y)}{G_1\, H_1}}{(x - x')\,(y - y')} \cdot d\,x \cdot d\,y$$

et en vertu du théorème de Cauchy, il résulte

$$\frac{Q(x, y)}{(G_1 \cdot H_1)} = \frac{1}{(2\,i\,\pi)^2} \cdot \int_c \int_{c'} \frac{Q(x, y)}{G \cdot H} \cdot d\,x \cdot d\,y\,.$$

Mais

$$(G_1\, H_1) = G'_{x'}\, H'_{x'} + \frac{d\,y'}{d\,x'} \cdot G'_{y'}\, H'_{y'} + \frac{d\,x'}{d\,y'} \cdot G'_{x'} \cdot H'_{x'} + G'_{y'} H'_{x'}$$

et

$$G'_{x'} + \frac{d\,y'}{d\,x'} \cdot G'_{y'} = 0 \quad , \quad H'_{x'} + \frac{d\,y'}{d\,x'} \cdot H'_{y'} = 0$$

d'où

$$(G_1\, H_1) = \frac{d\,G}{d\,y'} \cdot \frac{d\,H}{d\,x'} - \frac{d\,G}{d\,x'} \cdot \frac{d\,H}{d\,y'} = \Delta(x', y')$$

et par suite

$$\frac{Q(x', y')}{\Delta(x', y')} = \frac{1}{(2\,i\,\pi)^2} \cdot \int_c \int_{c'} \frac{Q(x, y) \cdot d\,x\,d\,y}{G(x, y) \cdot H(x, y)}$$

est l'expression analytique d'une fonction holomorphe d'un système de solutions des équations simultanées

$$G(x, y) = 0 \quad , \quad H(x, y) = 0\,.$$

En appliquant maintenant cette intégrale curviligne aux équations simultanées (f), il résulte le théorème de l'inversion généralisé.

En effect, on a les identités

$$\frac{1}{G(x, y)} = \sum_0^n \left(\frac{\varphi}{f}\right)^p \cdot \frac{\alpha^p}{f} + \left(\frac{\varphi}{f}\right)^n \cdot \frac{\alpha^n}{G}$$

$$\frac{1}{H(x, y)} = \sum_0^n \left(\frac{\Phi}{F}\right)^p \cdot \frac{\beta^q}{F} \cdot \left(\frac{\Phi}{F}\right)^n \cdot \frac{\beta^n}{H}$$

et en effectuant le produit de ces expressions et intégrant le long des cycles des variables, d'après les avoir multipliées par $Q(x, y)$, il résulte

$$\frac{Q(x', y')}{\Delta(x', y')} = \sum_0^n \alpha^p\, \beta^q \cdot J_{p,q} + R_n + R_{n'} + R_{n''}\,.$$

Or, d'après le théorème de M. Darboux, on sait que si le long des cycles polaires les conditions

$$\mathrm{mod}\left(\alpha\,\frac{\varphi(x\,,y)}{f(x\,,y)}\right)<1 \quad \text{et} \quad \mathrm{mod}\left(\beta\,\frac{\Phi(x\,,y)}{F(x\,,y)}\right)<1$$

sont vérifiées, les restes tendent vers zéro, au fur et à mesure que n augmente indéfiniment, d'où l'on conclut que la série

$$\frac{Q(x'\,y')}{\Delta(x'\,y')}=\sum_{0}^{\infty}\alpha^p\,\beta^q\,.\,J_{p,\,q}$$

est convergente, ayant

$$J_{p,\,q}=\frac{1}{(2\,i\,\pi)^2}\int_c\int_{c'}\left(\frac{\varphi}{f}\right)^p\left(\frac{\Phi}{F}\right)^q\,.\,\frac{Q(x\,,y)}{f\,.\,F}\,.\,d\,x\,d\,y\,.$$

pour expression générale des coefficients.

En désignant par a et b les solutions communes aux équations

$$f(x\,,y)=0 \quad , \quad F(x\,,y)=0$$

il résulte

$$f(x\,,y)=(x-a)\,.\,f_1\left(x\,,\frac{d\,y}{d\,x}\right)$$

$$F(x\,,y)=(y-b)\,.\,F_1\left(y\,,\frac{d\,x}{d\,y}\right)$$

et si l'on met, pour abréger,

$$X=\frac{\varphi}{f_1} \quad \text{et} \quad Y=\frac{\Phi}{F_1}$$

on aura

$$J_{p,\,q}=\frac{1}{(2\,i\,\pi)^2}\int_c\int_{c'}\frac{X^p\,.\,Y^q\,.\,\dfrac{Q}{f_1\,F_1}}{(x-a)^{p+1}.(y-b)^{q-1}}\,.\,d\,x\,d\,y$$

donc

$$J_{p,\,q}=\frac{1}{p\,!\,q\,!}\,.\,D^{p+q}\left(X^p\,.\,Y^q\,.\,\frac{Q(a\,,b)}{\Delta_1(a,b)}\right)$$

où Δ désigne le déterminant fonctionel

$$\Delta_1(a\,,b)=\frac{d\,f}{d\,a}\,.\,\frac{d\,F}{d\,a}-\frac{d\,f}{d\,b}\,.\,\frac{d\,F}{d\,b}\,.$$

Et alors on aura la série

$$\frac{Q(x',y')}{\Delta(x',y')}=\sum_{0}^{\infty}\left\{\frac{\alpha^p\,\beta^q}{p\,!\,q\,!}\,.\,D^{p+q}\left(X^p\,.\,Y^q\,.\,\frac{Q(a\,,b)}{\Delta_1(a,b)}\right)\right\}$$

Et si l'on pose

$$Q(x\,,y)=\Delta(x\,,y)\,.\,P(x\,,y)$$

il vient cette autre série

$$P(x',y')=\sum_{0}^{\infty}\left\{\frac{\alpha^p\,\beta^q}{p\,!\,q\,!}\,.\,D^{p+q}\left(X^p\,.\,Y^q\,.\,\frac{\Delta}{\Delta}\,.\,P(a\,,b)\right)\right\}$$

qui exprime le développement d'une fonction holomorphe des solutions communes des équations simultanées données.

***

De ce qui précède on voit bien la suite de théorèmes si intéressants auxquels M. Rodrigues a été conduit au cours de ses recherches dans le but d'établir le théorème de l'inversion des fonctions.

Une fois obtenu le résultat cherché, il a tâché d'en appliquer au développement en série des fonctions à variables imaginaires, à la résolution algébrique des équations et au développement en série des fonctions algébriques.

Les applications à ces deux derniers sujets ayant déjà paru dans le Compte-rendu du Congrès de Besançon (2[me] vol., pag. 289 e 293) je me bornerai à faire un aperçu général sur l'application du théorème de l'inversion au développement en série des fonctions.

On sait que les fonctions holomorphes sont susceptibles de se développer en séries convergentes, ordonnées suivant les puissances de la variable, d'après le théorème de Maclaurin.

Or, la variable étant définie par une équation implicite, le développement sera alors soumis à la loi de l'inversion. C'est-à-dire, étant

$$w=f(z)$$

une fonction holomorphe

$$u=\frac{f(z)}{\varphi(z)}$$

l'équation de défiinitition de la variable, le développement des fonctions holomorphes en série convergente est donné par le théorème de l'inversion

$$F(z)=F(t)+\sum_{1}^{\infty}\left\{\frac{u^p}{p\,!}\,.\,D^{p-1}\left[F'(t)\,.\left(\frac{\varphi(t)}{f'(t)}\right)^p\right]\right\} \qquad \text{(A)}$$

formule d'où l'on tire les séries de Burmann, Lagrange, Laplace et celle due à mon savant compatriote le Dr. G. Teixeira.

Série de Burmann. — Pour obtenir la série de Burmann il suffit d'éliminer n entre l'expression (A) et la fonction

$$u = \frac{\mathrm{f}(z)}{\varphi(z)}$$

cè qui donne

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{F}(t) + \sum_1^\infty \mathrm{A}_p \left(\frac{\mathrm{f}(z)}{\varphi(z)}\right)^p$$

série qui sera convergente dans la région des cycles polaires.

Or, en désignant par A_p le terme général de la série on a

$$\mathrm{A}_p = \frac{1}{p\,!}\,\mathrm{D}^{p-1}\left[\mathrm{F}(t)\,.\left(\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}\right)^p\right]$$

et en observant que

$$\mathrm{f}(z) = (z-t)\,.\,\Phi(z)$$

on aura

$$\mathrm{A}_p = \frac{1}{p\,!}\,\mathrm{D}^{p-1}\left(\frac{\mathrm{F}'(t)}{\left(\frac{\psi(z)}{\varphi(z)}\right)^p}\right)$$

donc

$$\mathrm{A}_p = \frac{1}{p\,!}\,.\,\mathrm{D}^{p-1}\left(\frac{(z-t)^p\,.\,\mathrm{F}'(t)}{\left(\frac{\mathrm{f}(z)}{\varphi(z)}\right)^p}\right)$$

qui est la loi découverte par Burmann.

Série de Lagrange. — Pour obtenir la série de Lagrange il suffit de faire

$$\mathrm{f}(z) = z - t$$

d'où

$$u = \frac{z-t}{\varphi(z)} \quad \text{ou} \quad z = t + u\,.\,\varphi(z)$$

hypothèse qui ramene la formule (A) à celle-ci

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{F}(t) + \sum_1^\infty \left\{\frac{u^p}{p\,!}\,.\,\frac{\mathrm{d}^{p-1}\left[\mathrm{F}'(t)\,(\varphi(t))^p\right]}{\mathrm{d}\,t^{p-1}}\right\}.$$

Or cette série doit être convergente pour toutes les valeurs de u dont leur module soit inférieur au module principal de la fonction

$$u = \frac{z-t}{\varphi(z)}$$

ce qui constitue une vérification des résultats.

L'expression analytique de cette racine par les intégrales curvilignes le long de leur cycle, est donc

$$z = t - \frac{1}{2\,i\,\pi}\int_c \log\left(1 - u\,.\,\frac{\varphi(z)}{\mathrm{f}(z)}\right).\,\mathrm{d}\,z\,.$$

La ligne d'intégration étant définie par son cycle polaire suivi d'un chemin rectiligne, la racine cyclique de Lagrange est une période de la fonction inverse de la fonction intégrale

$$w = \frac{1}{2\,i\,\pi}\int_c^z \log\left(1 - u\,.\,\frac{\varphi(z)}{z-t}\right).\,\mathrm{d}\,z\,.$$

La série de Laplace est aussi une conséquence du théorème (A) de l'inversion des équations simultanées

$$\left.\begin{aligned} x &= a + \alpha\,.\,\varphi(x,y) \\ y &= b + \beta\,.\,\Phi(x,y) \end{aligned}\right\}$$

Pour

$$\mathrm{f}(x,y) = x - a \quad ; \quad \mathrm{F}(x,y) = y - b$$

ces équations sont comprises dans les équations générales

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{f}(x,y) - \alpha\,.\,\varphi(x,y) &= 0 \\ \mathrm{F}(x,y) - \beta\,,\,\Phi(x,y) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

donc, en introduisant ces valeurs particuliers dans la série générale

$$\mathrm{P}(x',y') = \sum_0^\infty \left\{\frac{\alpha^p\,\beta^q}{p!\,q\,!}\,.\,\mathrm{D}^{p+q}\left(\mathrm{X}^p\;\mathrm{Y}^q\,.\,\frac{\Delta(a,b)}{\Delta_1(a,b)}\right).\,\mathrm{P}(a,b)\right\}$$

on obtient la série de Laplace

$$\mathrm{P}(x',y') = \sum_0^\infty \left\{\frac{\alpha^p\,\beta^q}{p!\,q!}\,.\,\mathrm{D}^{p+q}\left[\varphi(a,b)^p\,.\,\Phi(a,b)^q\,.\,\Delta(a,b)\,.\,\mathrm{P}(a,b)\right]\right\}$$

où

$$\Delta(a,b) = \alpha\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,a} + \beta\,\frac{\mathrm{d}\,\Phi}{\mathrm{d}\,b} + \alpha\beta\left(\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,b}\,.\,\frac{\mathrm{d}\,\Phi}{\mathrm{d}\,a} - \frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,a}\,.\,\frac{\mathrm{d}\,\Phi}{\mathrm{d}\,b}\right) - 1\,.$$

Série du Dr. Teixeira. — En considérant l'équation

$$z = t + u\,\mathrm{f}_1(z) + u^2\,\mathrm{f}_2(z) + u^3\,\mathrm{f}_3(z) + \ldots$$

l'illustre directeur de l'Académie polytechnique de Porto (Portugal) a démontré, il y à quelques années, dans le *Journal de Liouville* que le développement d'une fonction d'une variable définie par l'équation précédente, était donné par la série

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{F}(t) + \ldots + u^m\,.\,\Sigma\left\{\frac{\mathrm{D}^{p-1}\left(\mathrm{F}'(t)\right).\left(\mathrm{f}_1(t)\right)^{p_1}.\left(\mathrm{f}_2(t)\right)^{p_2}.\,\ldots}{p_1\,!\,p_2\,!\,p_3\,!\,\ldots}\right\} + \ldots$$

où

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots \quad m = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots$$

Or, d'après M. Rodrigues, on obtient cette série, en faisant $f(z) = z - t$ dans la série (e) rélative à l'équation holomorphe

$$f(z) - \Sigma u^n f_n(z) = 0 .$$

***

Je ne m'étendrai pas davantage sur le travail de M. Rodrigues. On voit bien que les conséquences des théorèmes dont j'ai fait mention sont assez nombreuses et importantes.

Il importe de ne pas omettre une circonstance; c'est que le sujet dont M. Rodrigues s'est occupé, a besoin de larges développements. Cependant, le travail qu'il a fait constitue, pour ainsi dire, la voie ouverte pour une suite d'études de la part des mathématiciens qui font de l'analyse leur spécialité.

En effet, en lisant attentivement le mémoire en question, on trouve à tout propos des conséquences qu'il faut développer. Ce sont notamment les théorèmes II et III les plus fertiles en résultat à étudier.

Le théorème II, d'après lequel est fait le groupement et la séparation des racines des fonctions holomorphes dans une aire donnée, est legerement tracé. En effet, il ne concerne qu'un cas particulier — la séparation des racines par des cassiniques —; mais, est-ce qu'il y aura une loi plus générale? Chercher la distribution des racines à l'intérieur d'un contour fermé et reconnaître si elles obeïssent à une loi déterminée de distribution, voilà une des questions que l'on pourra poser.

La détermination de la loi de distribution des racines multiples considérées comme des points de discontinuité, que j'ai fait rémarquer tout-à-l'heure, au cours de l'exposition des diverses propositions, c'est une autre question à considérer en détail.

Enfin de théorème III frappe aussitôt l'attention du lecteur. Il nous montre que le nombre des fonctions inverses d'une fonction uniforme est égal à celui des racines cycliques de l'équation donnée. Or, ce théorème a trait seulement au nombre de racines cycliques que la fonction holomorphe possède à l'intérieur de son contour. Il serait bien convenable d'étudier plus largement les propriétés des fonctions intégrales qui admettent par périodes des racines cycliques.

1 janvier 1895.

RODOLPHE GUIMARAES
officier du génie, à Lisbonne.

Sulle relazioni di posizione tra punti d'una linea chiusa.

Si abbiano quattro punti su di una linea chiusa e conveniamo che la scrittura $ab \parallel cd$ stia per indicare che essi occupano sulla linea posizioni tali che la coppia di punti ab separi la coppia di punti cd o, in altre parole, che dei due punti c, d l'uno appartenga all'una e l'altro all'altra delle due classi di punti determinate sulla linea data dalla coppia di punti a, b.

Lo studio delle proprietà della relazione $\parallel$ così definita presenta interesse dal punto di vista della geometria di posizione pel fatto che, quando essa sussiste fra quattro elementi d'una punteggiata, sussiste anche fra i quattro corrispondenti di qualunque altra punteggiata che si possa ottenere da quella per mezzo di projezioni e sezioni. Per questa ragione è importante ricercare *se* e *come* le altre relazioni tra punti d'una linea chiusa che si considerano nella geometria di posizione possano esser definite per mezzo della relazione $\parallel$ (¹). Infatti da ciò si potrà essere condotti a dimostrare che anche per tali altre relazioni sussiste la stessa proprietà invariantiva di cui gode la relazione $\parallel$.

Per giungere a conclusioni di questa specie occorre anzitutto determinare quali tra le proprietà della relazione $\parallel$ possono convenientemente essere assunte come primitive e quante di esse occorre assumere per poterne dedurre le altre. Essendomi proposto tale questione ho cominciato coll'enumerare e paragonare fra loro le varie proprietà della relazione $\parallel$, di cui si fa uso nella geometria di posizione, classificandole secondo il numero dei punti che sono considerati nei loro rispettivi enunciati ed escludendo quelle che si potevano dedurre da altre

(¹) Mi preme accennare che a far nascere in me l'idea di occuparmi di tale questione hanno contribuito ripetute discussioni che ebbi su questo argomento col mio egregio amico Dott. Mario Pieri, che sta appunto preparando un lavoro sui fondamenti della geometria projettiva. Del concetto fondamentale a cui s'informano le presenti considerazioni, la subordinazione, cioè, della nozione di *elementi ordinati* a quella di *elementi che si separano*, sono quindi a lui in parte debitore.

per le quali il numero dei punti considerati fosse minore. Procedendo in tal modo sono andato riducendo sempre più il numero delle proprietà indecomponibili finchè non ne rimasero che sette sole (1). Di queste, quattro implicano la considerazione di quattro punti soltanto e sono

1) $ab \mid cd \,.\!=\!.\, cd \parallel ab$
2) $ab \parallel cd \,.\!\neq\!.\, ab \parallel dc$
3) $ab \mid cd \,.\, ac \mid bd :\, = \Lambda$
4) $ab \mid cd \,.\cup.\, ac \mid bd \,.\cup.\, ad \mid bd \,.$

Le rimanenti tre implicano anche la considerazione di un quinto punto:

5) $ab \parallel cd \,.\, ac \mid be : \supset .\, ac \parallel de$
6) $ab \parallel cd \,.\, ac \mid be : \supset .\, cd \parallel be$
7) $ab \parallel cd \,.\, ab \mid ce \,.\, ab \parallel ed :\, = \Lambda \,.$

Supponiamo ora che cinque punti situati su una linea chiusa abbiano posizioni tali che sia verificata la condizione seguente:

$$\begin{aligned} ab \mid cd \,.\, cd \mid ae \,.\, ae \parallel bd \,.\, bd \mid ce \,.\, ce \mid ab : \cup : ab \mid cd \,.\, cd \parallel ae \,.\, ae \mid cb \,.\, cb \parallel ed \,. \\ ed \mid ab : \cup : ab \mid cd \,.\, cd \mid eb \,.\, eb \parallel ac \,.\, ac \parallel de \,.\, de \mid ab : \cup : ac \mid bd \,. \\ bd \mid ec \,.\, ec \parallel ad \,.\, ad \mid eb \,.\, eb \mid ac : \cup : ad \mid cb \,.\, cb \mid ae \,.\, ae \mid cd \,.\, cd \mid eb \,. \\ eb \mid ad : \cup : ad \parallel cb \,.\, cb \mid ed \,.\, ed \mid ac \,.\, ac \parallel eb \,.\, eb \mid ad \,. \end{aligned}$$

Se a, b, c si considerano come punti fissi di riferimento e d ed e come punti variabili il verificarsi della condizione suddetta definisce una relazione tra d ed e, *le cui proprietà si potranno dedurre da quelle della relazione* | cioè dalle proposizioni 1-7.

Se conveniamo di indicare il sussistere tra d ed e di tale relazione scrivendo $e\,\mathrm{S}(abc)\,d$ (che potremo leggere *e segue d nell'ordine abc*) (2), o anche semplicemente $e\,\mathrm{S}\,d$ quando non vi sia pericolo d'ambiguità, si può dimostrare (3) che la relazione S gode delle seguenti proprietà

(1) Che tali sette proprietà siano ulteriormente irreduttibili cioè indipendenti tra loro, per quanto probabile, non deve essere facile a dimostrare. A ogni modo la validità e l'opportunità dei ragionamenti che seguono si basa sul fatto che esse sono *sufficienti* per dimostrare le altre, siano poi *necessarie* o no.

(2) Ed è facile verificare, esaminando a parte i sei casi che possono presentarsi, che la relazione di posizione tra due punti così definita corrisponde effettivamente a quella designata con tal frase nel linguaggio ordinario.

(3) Per l'argomento che ho in vista non è necessario che mi occupi delle dimostrazioni analoghe che potrebbero darsi delle altre proprietà fondamentali della relazione S, quali, ad esempio, $e\,\mathrm{S}(abc)\,d \,.\!=\!.\, e\,\mathrm{S}(ade)\,b \,.\!=\!.\, e\,\mathrm{S}(bca)\,d \,.$

1') $e\,\mathrm{S}\,d \,.\, d\,\mathrm{S}\,e :\, = \Lambda$
2') $f\,\mathrm{S}\,e \,.\, e\,\mathrm{S}\,d : \supset .\, f\,\mathrm{S}\,d \,.$

Infatti per dimostrare la 1') basta sostituire nel primo membro di essa al posto di $e\,\mathrm{S}\,d$ e $d\,\mathrm{S}\,e$ le espressioni che loro equivalgono per definizione ed eseguire il prodotto logico indicato. Si avrà allora una somma di prodotti logici ciascuno dei quali in virtù delle proposizioni 1-3 si riduce a Λ. Parimenti per dimostrare la 2') si farà l'analoga sostituzione ed eseguendo le operazioni indicate si otterrà un prodotto di 36 fattori di cui 26, sempre in virtù delle proposizioni 1-3, si riducono a Λ, e gli altri 10, applicando oltre alle proposizioni 1-3 anche le 5) e 6), si possono ridurre a contenere ciascuno come fattore uno dei termini della somma logica equivalente per definizione al secondo membro. Valendoci allora di un noto teorema di logica (1) potremo dedurre dal primo membro della 2') il secondo.

Così, per esempio, considerisi il termine proveniente dal prodotto del terzo termine della somma logica equivalente a $f\,\mathrm{S}\,e$ pel primo termine della somma logica equivalente a $e\,\mathrm{S}\,d$, cioè:
$ab \mid cd \,.\, ae \mid cd \,.\, ab \mid ce \,.\, ae \mid bd \,.\, ce \mid bd \,.\, ac \mid ef \,.\, ac \mid fb \,.\, ab \parallel ef \,.\, fb \mid ce \,.$

Osservando che, in virtù della proposizione 5), si ha:

$$ab \mid ef \,.\, ae \parallel bd : \supset .\, ab \parallel fd$$
$$ae \parallel cd \,.\, ac \mid ef : \supset .\, ac \mid fd$$

e in virtù della 2) e della 6):

$$ab \parallel cd \,.\, ac \mid fb : \supset .\, bf \parallel cd$$

si potrà dedurre dal prodotto suddetto il seguente altro:

$$ab \mid ce \,.\, ce \mid bd \,.\, fb \parallel ce \,.\, ab \parallel cd \,.\, ac \mid fb \,.\, ab \parallel fd \,.\, ac \parallel fd \,.\, bf \mid cd$$

i cui cinque ultimi fattori sono precisamente quelli che compaiono nel terzo termine dell'espressione che corrisponde per definizione a $f\,\mathrm{S}\,d$.

In modo affatto analogo si può procedere per gli altri 9 prodotti. Indicando per brevità i termini della somma equivalente a $e\,\mathrm{S}\,d$ col loro numero d'ordine, quelli delle somme corrispondenti a $f\,\mathrm{S}\,e$ e $e\,\mathrm{S}\,d$ col loro numero d'ordine munito rispettivamente di uno o due apici, i prodotti che non si riducono a Λ sono i seguenti:

11', 25', 12', 13', 26', 34', 44', 55', 64', 56'

(1) Precisamente del seguente $ah \cup bk \cup \ldots \supset a \cup b \ldots$

e di essi il primo contiene come fattore 1″, il secondo e il terzo contengono ciascuno 2″, il quarto, quinto e sesto 3″, il settimo 4″, l'ottavo 5″ e gli ultimi due 6″.

D'altra parte la relazione S che gode delle due proprietà sopradette, essendo stata definita unicamente per mezzo della relazione || dovrà possedere anch'essa la stessa proprietà invariantiva che quella possiede, il che equivale a dire che dalle considerazioni precedentemente svolte risulta *dimostrata* la proposizione seguente:

Presi tre punti qualunque a, b, c su una punteggiata, se due altri punti d, e si succedono nel verso abc, allora, indicando con a′, b′, c′, d′, e′ rispettivamente i punti corrispondenti di qualunque altra punteggiata ottenuta da quella con un numero finito di projezioni o sezioni, i punti d′, e′ si succedono nel verso a′b′c′.

Credo che non sia senza qualche vantaggio l'aver mostrato come quest'ultima proposizione, la quale d'ordinario sotto una forma o un'altra (1) si assume come postulato sulla trattazione dei fondamenti della geometria di posizione, può considerarsi come conseguenza di un'altra più intuitiva e più semplice e implicante la considerazione di soli quattro punti invece di cinque.

G. Vailati.

(1) Nella pregevole nota del Dott. Enriques pubblicata nei Rendiconti dell'Istituto Lombardo, S. II, vol. 27° (1893) essa è rappresentata dal postulato VI nel quale l'A., facendo uso del concetto di « *ordine naturale* » prima definito, assume che « *fra le disposizioni circolari naturali che si possono stabilire in una forma di prima specie* a *ne esiste una che viene trasformata in sè stessa da ogni proiettività su* a, *cioè in ogni forma di prima specie* a *si può stabilire un ordine naturale il quale per qualunque projettività in* a *può subire solo una permutazione circolare accompagnata o no da un'inversione* ».

Charles Henry. *Abrégé de la Théorie des fonctions elliptiques.* — Paris, Nony et Cie, 1895.

Fino a questi ultimi tempi la teoria delle funzioni ellittiche pareva dovesse svilupparsi nel campo più elevato e puramente teorico delle matematiche e non potesse discendere a far parte di quelle materie dell'insegnamento ordinario, che debbono essere famigliari a tutti coloro i quali, senza coltivare di proposito le matematiche, hanno tuttavia bisogno di averle presenti per le loro frequenti applicazioni. Eppure le funzioni ellittiche sono destinate a prestare in tutti i rami delle matematiche eminenti servizi analoghi a quelli, che offrono le funzioni trigonometriche e circolari. Da varii anni fortunatamente questa teoria è entrata a far parte degli studi ordinari per opera di eminenti scienziati, i quali, grazie ai metodi più spediti ed eleganti, sostituirono ai lunghi e laboriosi calcoli pochi e concisi ragionamenti, ed alla molteplicità delle formole, poche idee fondamentali, dalle quali ogni altra proprietà discende spontanea ed è posta in completa evidenza.

Ai di nostri non mancano trattati, nei quali la teoria venga esposta coi metodi moderni: l'eccellente libro di Halphen racchiude quanto di meglio si possa desiderare in tale materia; ma un libro che, in poche pagine e con metodo facile riassumesse l'intera teoria, era tuttavia desiderato; l'A. si è proposto col presente lavoro, di colmare questa lacuna, ed a me sembra che lo scopo propostosi di appianare ai giovani studiosi la via di rendersi famigliare questa importante teoria, sia, almeno in gran parte, raggiunto.

L'Operetta si divide in quattro parti, nella prima delle quali, ricordate le definizioni di funzione biperiodica in generale, e di funzione ellittica in particolare, vengono esposti due teoremi coi quali si stabilisce che una funzione analitica ed uniforme, la quale ammetta più di due periodi distinti, ovvero sia tale che il rapporto dei suoi due periodi sia reale, si riduce ad una costante. In seguito si dà un cenno della trasformazione delle funzioni ellittiche in generale e della funzione pu in particolare, dimostrando come per la funzione pu il problema della trasformazione si riduce a quello della divisione dei periodi della funzione stessa, ed in fine si chiude questa prima parte dimostrando alcuni teoremi fondamentali dai quali dipende la costruzione delle funzioni ellittiche e particolarmente della funzione pu, che l'A. passa a studiare, nella parte seguente, sotto forma di una serie dimostrando in un primo capitolo com'essa soddisfaccia all'equazione

$$p'^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3$$

con la condizione:

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 \gtrless 0 .$$

In un secondo capitolo studia la stessa funzione pu mostrando com'essa sia un integrale particolare dell'equazione differenziale:

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3$$

ed è particolarmente rimarchevole la semplicità, colla quale l'A. sviluppa questo capitolo nel quale si espongono le proprietà fondamentali della funzione pu.

Nei capitoli 3° e 4° vengono studiate le funzioni ζu e σu, i loro sviluppi in serie e le espressioni delle varie funzioni ellittiche mediante le tre pu, ζu e σu. Nei capitoli 5° e 6° si dànno le formule di addizione e di moltiplicazione dell'argomento delle funzioni precedenti e si chiude questa 2ª parte col capitolo 7° in cui l'A. dimostra come la funzione $p\left(u, \frac{\omega_1}{u}, \omega_2\right)$ si possa esprimere razionalmente mediante la funzione $p(u, \omega_1, \omega_2)$.

Nella 3ª parte si studiano le funzioni ellittiche snu, cnu, dnu, derivandole dalla pu, a cui sono collegate mediante le funzioni ellittiche speciali σ_{01}, σ_{02}, σ_{03}, delle quali l'A. espone sommariamente le principali proprietà, periodi, gli zeri e gli infiniti, nonchè i teoremi di addizione e di moltiplicazione dell'argomento.

Finalmente nella 4ª parte l'A. introduce le funzioni θ di Jacobi, dando le relazioni che collegano queste con le funzioni precedenti snu, cnu, dnu, e termina il suo lavoro mostrando come si possano calcolare queste e la funzione pu mediante i loro rispettivi periodi.

Lo scopo propostosi dall'A. non gli consentì di entrare in maggiori e più minuti particolari, nè di dare al suo libro più ampi sviluppi, certo di per sè stessi interessanti, ma non indispensabili per farne comprendere l'intera teoria. Parmi tuttavia che, pur ammettendo nota la teoria delle funzioni a variabile complessa, l'A. avrebbe resa più chiara e più proficua la lettura del suo libro, riportando le principali definizioni e le principali proprietà, che formano la base dei suoi ragionamenti.

Vi si riscontrano pure qua e là alcune piccole mende ed errori di stampa, che il lettore potrà facilmente correggere da sè stesso, ma uno va particolarmente segnalato, che si riscontra nella 1ª formola del § 19, dove in luogo di pu si deve leggere p^2u; nè, a mio giudizio, si poteva non rilevare espressamente il fatto che nella 3ª formola si deve assumere $n > 2$, essendo inutile od illusoria negli altri casi.

Questi leggeri difetti non tolgono che pochissimo alla bontà del libro, il quale anche per nitidezza di caratteri e per eleganza di edizione diligentemente curata, sarà letto con piacere e con frutto dagli studiosi.

Torino, aprile 1895.

G. Valle.

Sulla risoluzione delle equazioni numeriche di terzo grado

Nota di S. Catania, *a Catania.*

Suppongo un'equazione cubica ridotta alla forma

$$x^3 - px + q = 0 . \qquad (1)$$

Se α è una sua radice reale, dividendo l'equazione per $x - \alpha$, e risolvendo l'equazione quadratica che ne risulta, si ottengono le formole

$$\beta = \frac{-\alpha + \sqrt{4p - 3\alpha^2}}{2}, \quad \gamma = \frac{-\alpha - \sqrt{4p - 3\alpha^2}}{2}, \qquad (2)$$

le quali dànno le rimanenti radici della (1), radici che io suppongo reali.

Se α è razionale, le (2) danno le rimanenti radici, esattamente, se tali radici sono razionali, con quel grado d'approssimazione che si vuole, se sono irrazionali.

Se però α è irrazionale, e noto con determinata approssimazione, le formole (2) non sono più vere, perchè il resto della divisione del primo membro della (1) per $x - \alpha$ in questo caso non è nullo. Si domanda, entro quali limiti d'approssimazione le (2) daranno le rimanenti radici. La determinazione di tali limiti è l'oggetto della presente nota, anche a proposito d'una memoria del prof. G. Zurria, recentemente pubblicata negli Atti dell'Accademia Gioenia (*), nella quale si afferma che data α con determinata approssimazione, con *simile* approssimazione le (2) daranno le rimanenti radici della data cubica.

Siccome mi occorrono alcuni teoremi sulle approssimazioni numeriche, reputo opportuno, per maggior chiarezza, di qui riportarli (**).

(*) *Risoluzione delle equazioni di 3° grado dedotta dall'integrale d'una equazione a differenze di terz'ordine.* Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali in Catania, vol. VIII, serie 4ª, 1895.

(**) M. J. Vieille. *Théorie générale des approximations numériques.* — Paris, Bachelier, 1854.

Bertrand. *Aritmetica.*

Moreno. *Aritmetica.*

a) Se a e b sono due numeri approssimati, e α e β sono gli errori assoluti di cui sono affetti, l'errore assoluto di $a+b$ è minore di $\alpha+\beta$.

b) E se b è approssimato per eccesso, a per difetto, l'errore di $a-b$ è minore di $\alpha+\beta$.

c) Se a è un numero esatto, e b è approssimato per difetto, l'errore assoluto di ab è minore del prodotto di a per l'errore assoluto di b.

d) Se a è approssimato, e b è esatto, l'errore assoluto di $\frac{a}{b}$ è minore di $\frac{1}{b}$ dell'errore assoluto di a.

e) Se a è approssimato, l'errore assoluto di a^2 è minore del prodotto di $2a$ per l'errore assoluto di a.

f) Se a è approssimato, l'errore assoluto di $\sqrt{a}$ è minore di $\frac{\alpha}{2\sqrt{a-\alpha}}$, dove α è l'errore assoluto di a.

g) Se in a vi sono m cifre esatte, in a^2 ve ne potranno essere m, $m-1$ ovvero $m-2$;

h) In $3a^2$ ve ne potranno essere m o $m-1$;

i) In $\sqrt{a}$ ve ne potranno essere $m+1$, o m, o $m-1$.

Ciò posto, sia α una radice della (1) approssimata per difetto fino alla m^{esima} cifra a cominciare dalla prima cifra significativa a sinistra. Applicando il teorema *g*), in α^2 si potranno avere m, $m-1$ o $m-2$ cifre esatte. Applicando in seguito il teorema *h*), si potranno avere, in $3\alpha^2$, m, $m-1$, $m-2$ o $m-3$ cifre esatte. Calcolando $4p-3\alpha^2$, si ha nella differenza un errore assoluto minore dell'errore assoluto di $3\alpha^2$, come indica il teorema *b*), e tale differenza potrà contenere un numero di cifre esatte eguale a quello di $3\alpha^2$, o minore, o maggiore. Se p. es. $4p=5348$ e $3\alpha^2=1672,54$, esatto, quest'ultimo valore, fino ai centesimi, allora $4p-3\alpha^2=4675,46$ avrà sei cifre esatte, quante ne aveva $3\alpha^2$; se $3\alpha^2=8,54$, esatto fino ai centesimi, $4p-3\alpha^2=5339,46$ avrà sei cifre esatte, mentre $3\alpha^2$ ne aveva tre solamente; e, infine, se $3\alpha^2=5347,54$, esatto fino ai centesimi, $4p-3\alpha^2=0,46$ avrà, a cominciare dalla sua prima cifra significativa a sinistra, due cifre esatte, laddove $3\alpha^2$ ne conteneva sei. In ogni caso però, mediante l'applicazione successiva dei teoremi *e*), *c*), *b*) rimane determinato il numero delle cifre di $4p-3\alpha^2$ sulle quali si potrà fare assegnamento.

In seguito il teorema *i*) insegna che questo numero di cifre esatte potrà conservarsi in $\sqrt{4p-3\alpha^2}$, potrà aumentare o diminuire d'una unità, e il teorema *f*) poi ci dirà quale di questi tre casi si verificherà. Infine coll'applicazione dei teoremi *a*), *b*), *d*) sapremo quante cifre esatte conterranno i valori di β e γ dedotti dalle (2).

Trascurando il caso in cui $\sqrt{4p-3\alpha^2}$ conterrà più di m cifre esatte, perchè nella somma $-\alpha\pm\sqrt{4p-3\alpha^2}$ delle cifre che seguono la m^{esima} nel valore di $\sqrt{4p-3\alpha^2}$ non se ne può tener conto, essendo α calcolato con m cifre esatte, dalla precedente discussione risulta che β e γ possono essere calcolate, mediante le formole (2), collo stesso grado di approssimazione con cui è calcolato α, e nel caso contrario può determinarsi il grado di approssimazione con cui le formole medesime dànno β e γ.

Si consideri p. es. l'equazione

$$x^3-7x+7=0$$

le cui radici sono, esatte fino alla quinta decimale,

$$\alpha=1,35689 \quad , \quad \beta=1,69202 \quad , \quad \gamma=-3,04891 .$$

Si supponga noto il valore di α. Si ha:

$$\alpha^2=1,8411504721 \quad , \quad 3\alpha^2=5,5234514163 \quad , \quad 4p-3\alpha^2=22,4765485837$$

$$\sqrt{4p-3\alpha^2}=4,74094 \quad , \quad \beta=1,69202 \quad , \quad \gamma=-3,04891 .$$

Applicando i teoremi sopra riportati si ha:

Errore assoluto di	α	$< 0,00001$	
» »	α^2	$< 2.2.0,00001 \ (=0,00004)$	[*e*]
» »	$3\alpha^2$	$< 0,00012$	[*c*]
» »	$4p-3\alpha^2$	$< 0,00012$	[*b*]
» »	$\sqrt{4p-3\alpha^2}$	$< \frac{0,00012}{2\sqrt{22,47....}} \ (=0,00001....)$	[*f*]
» »	»	$< 0,00002$	
» »	$-\alpha\pm\sqrt{4p-3\alpha^2}$	$< 0,00003$	[*a*, *b*]
» »	$\frac{-\alpha\pm\sqrt{4p-3\alpha^2}}{2}$	$< 0,00002$	[*d*]

Siccome 0,00002 è manifestamente troppo grande, i valori di β e γ devono considerarsi esatti fino alla quinta decimale, come è effettivamente.

Si consideri l'equazione

$$x^3-21x+37=0 .$$

Le sue radici, esatte fino alla quinta decimale, sono:

$$\alpha=-5,29085 \quad , \quad \beta=2,71688 \quad , \quad \gamma=2,57397 .$$

Si supponga noto α. Si ha:

Errore assoluto di $\alpha \quad < 0{,}00001$

» » $\alpha^2 < 2.6.0{,}00001$ ($=0{,}00012$) [e]

» » $3\alpha^2 < 0{,}00036$ [c]

» » $4p-3\alpha^2 < 0{,}00036$ [b]

» » $\sqrt{4p-3\alpha^2} < \dfrac{0{,}00036}{2.0{,}1}$ ($=0{,}0018$) [f]

» » $-\alpha \pm \sqrt{4p-3\alpha^2} < 0{,}00181$ [a, b]

» » $\dfrac{-\alpha \pm \sqrt{4p-3\alpha^2}}{2} < 0{,}0009....$

Dunque β e γ saranno, in questo caso, approssimate solamente fino alla terza cifra decimale inclusa. Facendo i calcoli si trova

$$\beta = 2{,}71739 \quad , \quad \gamma = 2{,}57345 ,$$

che, confrontate con quelle trovate dal Lottieri, da cui la predetta equazione fu risoluta, si trovano esatte fino alla terza decimale.

Si noti che l'ultima cifra conservata può essere errata d'una unità, pur conservando l'errore assoluto il limite trovato.

Se occorre conoscere se l'ultima cifra conservata è esatta oppure è errata d'una unità, si potrà procedere nel seguente modo.

Posto $f(x) = x^3 - 21x + 37$ si ha

$$f(2{,}716) = -0{,}0010...$$
$$f(2{,}717) = +0{,}021...$$

Dunque l'ultima cifra 7 del valore β è errata d'una unità per eccesso.

Similmente si trovano:

$f(2{,}573) =$ numero positivo;
$f(2{,}574) =$ numero negativo;

dunque l'ultima cifra 3 di γ è esatta. Così abbiamo

$$\beta = 2{,}716 \quad , \quad \gamma = 2{,}573$$

a meno di 0,001 per difetto, ed è facile vedere poi se l'errore è minore di mezzo millesimo.

In ultimo si può osservare che se β e γ sono immaginarie, i teoremi precedenti ci conducono a determinare con quale approssimazione si può avere il coefficiente di $\sqrt{-1}$ nei valori di β e γ.

Per es. $\alpha = -3{,}22636$ è il valore dell'unica radice reale, esatto fino alla quinta decimale, della cubica

$$x^3 - 7x + 11 = 0 .$$

Col metodo precedente si trovano

$$\beta = 1{,}61318 + 0{,}89836\sqrt{-1}$$
$$\gamma = 1{,}61318 - 989836\sqrt{-1} ,$$

e la discussione ci condurrà a concludere che tutte le cifre calcolate sono esatte.

Catania, maggio 1895.

PROF. S. CATANIA.

Triangolazioni Topografiche e Triangolazioni Catastali dell'Ing. ODOARDO JACOANGELI. — Ulrico Hœpli, Milano, 1895.

Sotto forma di manuale l'ing. O. Jacoangeli ha testè pubblicate le norme teoriche e pratiche per procedere nei lavori di triangolazioni topografiche e catastali alle quali spesso si deve ricorrere nelle varie operazioni d'ingegneria.

Colla scorta delle *Disposizioni di Massima relative al riordinamento dell'Imposta Fondiaria* pubblicate in Roma negli anni 1889-90-92 per cura del Ministero delle Finanze e colle norme suggerite dall'esperienza propria, l'Autore si addentra e svolge in modo più che sufficiente per i bisogni della pratica il problema del rilevamento e calcolazione di una rete trigonometrica quando questa si svolge sopra un terreno nel quale siansi già eseguite triangolazioni geodetiche.

I molti esempî e quadri che illustrano l'opera rendono chiara l'esposizione che l'Autore fa di ogni parte trattata, ma con rincrescimento dobbiamo far notare che all'Autore sfuggirono alcuni errori di concetto nella parte che riguarda le *verifiche e correzioni del teodolite*, mentre converrebbe insistere molto su di esse, inquantochè le applicazioni della matematica alla compensazione delle poligonali e delle reti triangolari a nulla giovano senza la perfetta conoscenza degli strumenti dai quali si deducono gli elementi di calcolo.

Il prezzo del manuale (L. 7,50) è anche un po' elevato inquantochè tolti i quadri, la parte rimanente comprende appena 240 pagine di piccolo formato.

L'esposizione dei varî capitoli è però ben ordinata e adatta tanto a chi aspira alla carriera catastale, quanto al libero professionista.

Aspettiamo che l'Autore dia alla luce gli altri due manuali, uno sulle Poligonazioni e l'altro sul Rilevamento parcellare che ha promesso di prossima pubblicazione, e siccome essi formeranno parte indivisibile di quello già pubblicato, speriamo che l'Autore vi aggiunga alcune pagine da sostituire a quelle poche che nell'attuale manuale contengono errori che non si possono chiarire in una semplice *errata-corrige*.

Torino, maggio 1895.

Ing. VITTORIO BAGGI.

Sopra una questione elementare del giuoco del bigliardo.

Nell'*Intermédiaire des mathématiciens*, T. II, p. 132, viene proposta la seguente questione:

Une bille de billard est lancée sur un billard obliquement à la bande; son mouvement est supposé se continuer indéfiniment, la bille n'obéissant qu'à la loi: l'angle de réflexion sur une bande égale l'angle d'incidence. Va-t-elle passer par un point du billard qu'on fixe seulement après que la bille est lancée?

Sia ABCD il bigliardo, e pongasi $AB=CD=a$, $BC=DA=b$. La palla parta da un punto P_0 della sponda AB (ciò che non toglie nulla della generalità) facendo col tratto P_0B un angolo acuto α, e vada ad incontrare la sponda BC in P_1, indi dopo riflessione CD in P_2, ecc. La traiettoria della palla si comporrà d'una infinità di tratti paralleli alternativamente alle due *direzioni fondamentali* P_0P_1, P_1P_2. I tratti paralleli all'una od all'altra direzione formano un insieme *numerabile* mentre l'insieme di tutti i tratti paralleli ad una medesima direzione che possono tracciarsi entro il rettangolo ABCD ha *la seconda potenza*. Ne segue che vi ha un'infinità (non numerabile) di tratti paralleli a ciascuna direzione fondamentale che non possono far parte della traiettoria.

Può però dimostrarsi che, se $\frac{a \tang \alpha}{b}$ è irrazionale, segnato un punto qualsiasi M del bigliardo e presa una grandezza δ arbitrariamente piccola, la palla passerà a distanza da M minore di δ.

Porremo $\tang \alpha = t$, $\frac{b}{t} - a = c$; inoltre:

$$AP_0=x_0\,,\ BP_1=x_1\,,\ CP_2=x_2\,,\ DP_3=x_3\,,\ AP_4=x_4\,,\ \ldots$$

Si ha evidentemente:

$$x_1=(a-x_0)t\,,\ x_2=(b-x_1)\frac{1}{t}\,,\ x_3=(a-x_2)t\,,\ x_4=(b-x_3)\frac{1}{t}\,,$$

da cui:

$$x_4=x_0+2c\,.$$

Se $c=0$, P_4 coincide con P_0, e la palla continua indefinitamente a percorrere il perimetro del parallelogramma $P_0P_1P_2P_3$.

Se $c \neq 0$, basterà considerare p. es. il caso di $c>0$. In questo caso non potrà mai avvenire che un tratto parallelo alla prima direzione fondamentale non incontri quella delle due sponde di lunghezza b verso la quale è diretto; ma potrà accadere invece che un tratto parallelo alla seconda direzione fondamentale non incontri quella delle sponde di lunghezza a verso la quale è diretto il tratto stesso. Supponiamo che ciò avvenga per la prima volta per la sponda AB. Se:

$$x_{4r_1}=x_0+2r_1c<a\,, \quad x_0+2(r_1+1)c>a\,,$$

il tratto che parte dal punto P_{4r_1+3} di DA non incontrerà AB, ma incontrerà invece BC in un punto Q e riflettendosi in questo colpirà AB in $P_{4(r_1+1)}$. Detto $P'_{4(r_1+1)}$ il punto d'incontro del prolungamento di P_{4r_1+3}Q con quella di AB, sarà:

$$\mathrm{B}\,P'_{4(r_1+1)}=P_{4(r_1+1)}\,\mathrm{B}\,, \quad \mathrm{A}\,P'_{4(r_1+1)}=x_0+2(r_1+1)c\,,$$

quindi:

$$x_{4(r_1+1)}=\mathrm{A}\,P_{4(r_1+1)}=a-P_{4(r_1+1)}\mathrm{B}=2a-x_0-2(r_1+1)c\,.$$

È facile vedere che si avrà poi:

$$x_{4(r_1+2)}=2a-x_0-2(r_1+2)c\,,\ldots,\, x_{4r_2}=2a-x_0-2r_2c\,.$$

Supposto che non sia mai avvenuto che un tratto diretto verso la CD non la incontri, e supposto inoltre che sia

$$x_{4r_2}>0\,, \quad 2a-x_0-2(r_2+1)c<0\,,$$

il tratto che parte dal punto P_{4r_2+3} di BC non incontrerà AB, ma incontrerà invece DA in un punto R, e quivi riflettendosi colpirà AB in $P_{4(r_2+1)}$. Denotando con $P'_{4(r_2+1)}$ il punto d'incontro del prolungamento di P_{4r_2+3}R con quello di BA, sarà:

$$\begin{aligned} x_{4(r_2+1)}&=\mathrm{A}\,P_{4(r_2+1)}=P'_{4(r_2+1)}\mathrm{A}=-[2a-x_0-2(r_2+1)c] \\ &=x_0-2a+2(r_2+1)c\,. \end{aligned}$$

Si troverebbe poi:

$$x_{4(r_2+2)}=x_0-2a+2(r_2+2)c\,,$$

etc. Adunque i punti d'incontro della palla colla sponda AB sono dati da:

$$\begin{array}{l} x_0\,,\ x_0+2c\,,\ x_0+4c\,,\ \ldots,\ x_0+2r_1c\,, \\ 2a-x_0-2(r_1+1)c\,,\ \ldots,\ 2a-x_0-2r_2c\,, \\ x_0-2a+2(r_2+1)c\,,\ \ldots,\ x_0-2a+2r_3c\,, \\ 4a-x_0-2(r_3+1)c\,,\ \ldots,\ 4a-x_0-2r_4c\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

espressioni che possono comprendersi nell'unica forma:

$$\pm(x_0+2hc-2ka) \qquad (1)$$

dove h e k sono due numeri interi e positivi soggetti alla sola condizione che il valore dell'espressione corrispondente sia positiva ed inferiore ad a.

Se $\frac{at}{b}$, e quindi anche $\frac{c}{a}$, è irrazionale, possono trovarsi, come è noto, due numeri interi e positivi p, q tali che sia:

$$|2pc-2qa|<\delta\,,$$

essendo δ una quantità positiva arbitrariamente piccola. Supponiamo p. es. $2pc-2qa$ positivo, ed indichiamone il valore con g. Sia E un punto qualunque di AB, e sia $\mathrm{AE}=y$, $g<y$. Denotiamo con m il massimo intero contenuto in $\frac{y+2\varepsilon a-x_0}{g}$, dove ε ha il valore 0 od 1 secondochè $y \gtrless x_0$; sarà, θ designando una quantità compresa fra 0 ed 1:

$$\frac{y+2\varepsilon a-x_0}{g}=m+\theta\,,$$

da cui:

$$y-\theta g=x_0+mg-2\varepsilon a=x_0+2mpc-2(mq+\varepsilon)a\,.$$

Ora, poichè $a>y-\theta g>0$, l'espressione di $y-\theta g$ appartiene all'insieme (1), e il punto G di AB dato da $\mathrm{AG}=y-\theta g$ è uno dei punti in cui la palla incontra AB; inoltre si ha $\mathrm{GE}=\theta g<\delta$. Analogamente si procederebbe se $2pc-2qa$ fosse negativo.

I punti in cui la palla incontra la sponda AB formano adunque un insieme I condensato in tutto l'intervallo AB.

Per ciascun punto dell'insieme I passano due tratti della traiettoria paralleli alle due direzioni fondamentali. L'insieme dei punti di tutti questi tratti è condensato in tutto il campo ABCD. Ne segue che, preso un punto qualunque M del bigliardo e designando con δ una grandezza arbitrariamente piccola, la palla passerà a distanza minore di δ dal punto M.

Mantova, 2 aprile 1895.

G. Vivanti.

Sulla trattazione intrinseca delle questioni baricentriche

Nota di E. CESÀRO

Quando si voglia studiare una curva dal punto di vista delle sue proprietà baricentriche, è ben naturale prendere come assi (mobili) gli assi principali d'inerzia della doppia infinità dei suoi archi. Le coordinate d'un punto fisso sono allora funzioni di due variabili, poichè dipendono dai valori s_1 ed s_2 che prende negli estremi d'un arco qualunque la lunghezza s dell'arco di curva, contato a partire da un'origine fissa; ma le derivate parziali di tali funzioni si potranno sempre esprimere linearmente nelle coordinate stesse, in virtù della nota composizione della velocità assoluta, che nel caso attuale è nulla, mediante la velocità relativa e quella di trascinamento. Così per le curve piane si avrà

$$\frac{\partial x}{\partial s_1} = u_1 - \omega_1 y \quad , \qquad \frac{\partial x}{\partial s_2} = u_2 - \omega_2 y \quad ,$$
$$\frac{\partial y}{\partial s_1} = v_1 + \omega_1 x \quad , \qquad \frac{\partial y}{\partial s_2} = v_2 + \omega_2 x \quad ,$$

ed i coefficienti u, v, ω, funzioni delle variabili s_1 ed s_2, si determineranno subito col solo derivare le relazioni

$$\int_{s_1}^{s_2} x ds = 0 \quad , \qquad \int_{s_1}^{s_2} y ds = 0 \quad , \qquad \int_{s_1}^{s_2} xy ds = 0 \; .$$

Chiamata σ la lunghezza dell'arco $s_2 - s_1$, se si distinguono con indici 1 e 2 tutte le quantità che si riferiscono all'uno o all'altro estremo, e se si pone

$$\int_{s_1}^{s_2} (x^2 - y^2) \, ds = \varkappa \sigma \quad ,$$

si trova

$$u_1 = \frac{x_1}{\sigma} \quad , \quad v_1 = \frac{y_1}{\sigma} \quad , \quad \omega_1 = \frac{x_1 y_1}{\varkappa \sigma} \quad ,$$
$$u_2 = -\frac{x_2}{\sigma} \quad , \quad v_2 = -\frac{y_2}{\sigma} \quad , \quad \omega_2 = -\frac{x_2 y_2}{\varkappa \sigma} \; .$$

Infatti

$$\frac{\partial}{\partial s_1} \int_{s_1}^{s_2} x ds = -x_1 + \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial x}{\partial s_1} ds = -x_1 + \sigma u_1 \; ; \; ecc.$$

Dopo ciò le relazioni fondamentali per lo studio delle proprietà baricentriche delle curve piane si riducono alla forma

$$\frac{\partial x}{\partial s_1} = \left(1 - \frac{y y_1}{\varkappa}\right) \frac{x_1}{\sigma} \quad , \qquad \frac{\partial x}{\partial s_2} = -\left(1 - \frac{y y_2}{\varkappa}\right) \frac{x_2}{\sigma} \quad ,$$
$$\frac{\partial y}{\partial s_1} = \left(1 + \frac{x x_1}{\varkappa}\right) \frac{y_1}{\sigma} \quad , \qquad \frac{\partial y}{\partial s_2} = -\left(1 + \frac{x x_2}{\varkappa}\right) \frac{y_2}{\sigma} \; .$$

La coppia di sinistra non è applicabile ad (x_1, y_1), e quella di destra non è applicabile ad (x_2, y_2). Per questi punti, se si rappresenta con φ l'inclinazione della tangente sull'asse x, si ha

$$\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma x_1}{\partial s_1} = \cos\varphi_1 - \omega_1 y_1 \quad , \qquad \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma x_2}{\partial s_2} = \cos\varphi_2 - \omega_2 y_2 \quad ,$$
$$\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma y_1}{\partial s_1} = \operatorname{sen}\varphi_1 + \omega_1 x_1 \quad , \qquad \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma y_2}{\partial s_2} = \operatorname{sen}\varphi_2 + \omega_2 x_2 \; .$$

Per fare un'applicazione di queste formole vogliamo prima cercare le formole analoghe per le coordinate

$$\xi_1 = x_1 - \rho_1 \operatorname{sen}\varphi_1 \quad , \quad \xi_2 = x_2 - \rho_2 \operatorname{sen}\varphi_2$$
$$\eta_1 = y_1 + \rho_1 \cos\varphi_1 \quad , \quad \eta_2 = y_2 + \rho_2 \cos\varphi_2$$

dei centri di curvatura negli estremi dell'arco σ. Osservando le relazioni evidenti

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1} = \omega_1 \quad , \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1} = \omega_1 + \frac{1}{\rho_1} \quad ,$$
$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial s_2} = \omega_2 \quad , \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} = \omega_2 + \frac{1}{\rho_2} \quad ,$$

si ottiene, per uno dei centri,

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial s_2} = -\frac{x_2}{\sigma} - \omega_2 \eta_1 \ , \quad \frac{\partial \sigma \xi_1}{\partial s_1} = -\omega_1 \sigma \eta_1 - \frac{\partial \sigma \rho_1}{\partial s_1} \operatorname{sen}\varphi$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial s_2} = -\frac{y_2}{\sigma} + \omega_2 \xi_1 \ , \quad \frac{\partial \sigma \eta_1}{\partial s_1} = \omega_1 \sigma \xi_1 + \frac{\partial \sigma \rho_1}{\partial s_1} \cos\varphi_1 \ ,$$

e per l'altro

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial s_1} = \frac{x_1}{\sigma} - \omega_1 \eta_2 \ , \quad \frac{\partial \sigma \xi_2}{\partial s_2} = -\omega_2 \sigma \eta_2 - \frac{\partial \sigma \rho_2}{\partial s_2} \operatorname{sen}\varphi_2 \ ,$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial s_1} = \frac{y_1}{\sigma} + \omega_1 \xi_2 \ , \quad \frac{\partial \sigma \eta_2}{\partial s_2} = \omega_2 \sigma \xi_2 + \frac{\partial \sigma \rho_2}{\partial s_2} \cos\varphi_2 \ .$$

Ciò premesso, proponiamoci di trovare una curva tale, che il baricentro di qualunque arco ed i centri di curvatura negli estremi dell'arco stesso siano in linea retta. Si dovrà avere $\xi_2 \eta_1 = \xi_1 \eta_2$, e derivando questa relazione si otterrà

$$(\xi_1 \cos\varphi_1 + \eta_1 \operatorname{sen}\varphi_1)\,\rho_1 + (\xi_2 \cos\varphi_1 + \eta_2 \operatorname{sen}\varphi_1)\,\frac{\partial \sigma \rho_1}{\partial s_1} = 0 \ ,$$

$$(\xi_2 \cos\varphi_2 + \eta_2 \operatorname{sen}\varphi_2)\,\rho_2 - (\xi_1 \cos\varphi_2 + \eta_1 \operatorname{sen}\varphi_2)\,\frac{\partial \sigma \rho_2}{\partial s_2} = 0 \ ,$$

cioè, chiamando K il comune valore dei rapporti $\xi_2 : \xi_1$ ed $\eta_2 : \eta_1$,

$$\frac{d}{ds_1}\log\rho_1 = \frac{K-1}{K\sigma} \quad , \quad \frac{d}{ds_2}\log\rho_2 = \frac{K-1}{\sigma} \ .$$

In queste relazioni i primi membri sono i valori che la funzione

$$\frac{d}{ds}\log\rho = f(s)$$

prende negli estremi dell'arco, dimodochè si ha, eliminando K,

$$s_1 + \frac{1}{f(s_1)} = s_2 + \frac{1}{f(s_2)} \ .$$

Ne segue che $s + \dfrac{1}{f(s)}$ deve avere un valore costante, e questo valore si può prendere uguale a zero fissando convenientemente l'origine degli archi. Quindi, successivamente,

$$f(s) = -\frac{1}{s} \quad , \quad \rho s = \textit{costante} \ ,$$

ed anche $K = \rho_2 : \rho_1$. La curva cercata è dunque la *clotoide*, ed il baricentro di qualunque arco è centro di similitudine dei circoli osculatori estremi.

Questa caratteristica proprietà della clotoide è notevole anche perchè è ben difficile immaginarne un'estensione tale, che vi risponda effettivamente qualche curva. Per esempio, non è possibile che l'area $\frac{1}{2}\mathfrak{J}$ del triangolo formato dal baricentro e dai centri estremi di curvatura sia costante e non nulla. È questa, del resto, un'impossibilità prevedibile, perchè i tre vertici debbono tendere ad allinearsi sulla normale quando σ tende a zero. Ma il calcolo mostra che non si può nemmeno fare in modo che $\mathfrak{J}$ dipenda solo dalla lunghezza dell'arco σ. Infatti dalle formole precedentemente stabilite è facile dedurre

$$\sigma \frac{\partial^2 \sigma \mathfrak{J}}{\partial s_1 \partial s_2} = \left(\rho_1 \rho_2 + \frac{\partial \sigma \rho_1}{\partial s_1}\frac{\partial \sigma \rho_2}{\partial s_2}\right) \operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2) \ . \qquad (1)$$

Per $\mathfrak{J}$ costante, siccome non può essere sempre $\varphi_1 = \varphi_2$ senza che la linea si riduca ad una retta, si dovrebbe avere

$$\rho_1 \frac{ds_1}{d\rho_1} - \rho_2 \frac{ds_2}{d\rho_2} = \sigma \ ,$$

e si ritroverebbe così la clotoide, per la quale è necessario che sia $\mathfrak{J} = 0$. Suppongasi, più generalmente, $\mathfrak{J}$ funzione della sola σ, e la derivata terza di $\mathfrak{J}$ prenda, per $\sigma = 0$, il valore $\frac{3}{4}k$, arbitrario; poi, fissato per s_1 un valore qualunque s, si faccia tendere s_2 ad s. Allora nel secondo membro di (1) si ha

$$\lim \frac{1}{\sigma}\operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2) = -\frac{1}{\rho} \quad , \quad \lim \frac{1}{\sigma^2}\left(\rho_1\rho_2 + \frac{\partial \sigma \rho_1}{\partial s_1}\frac{\partial \sigma \rho_2}{\partial s_2}\right) = \rho^3 \frac{d^2}{ds^2}\frac{1}{\rho} \ ,$$

ed occorre pertanto che sia

$$\rho^2 \frac{d^2}{ds^2}\frac{1}{\rho} = -\lim \frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial^2 \sigma \mathfrak{J}}{\partial s_1 \partial s_2} = \frac{1}{2}\lim \frac{d^4 \sigma \mathfrak{J}}{d\sigma^4} = \frac{3}{2}k \ .$$

Dunque la curva appartiene necessariamente alla classe definita dall'equazione intrinseca

$$s = \int \frac{d\rho}{\sqrt{k\rho + k'\rho^4}} \ .$$

In particolare per $k = 0$ si ritrova la clotoide, e per $k' = 0$ si ottiene la spirale $a\rho = s^2$, che prende origine in un punto assintotico e si svolge parabolicamente all'infinito. Ma tutte queste curve, per $k \gtrless 0$, non godono dell'accennata proprietà se non per archi infinitesimi, e ciò si deve alla presenza del segno trigonometrico nella formola (1). Così, per esempio, per la curva $a\rho = s^2$ si ha $2a\vartheta = \sigma^3$, e la (1) diventa

$$\frac{a\sigma}{s_1 s_2} = \operatorname{sen}\frac{a\sigma}{s_1 s_2} ,$$

e tende ad essere soddisfatta solo per archi infinitesimi, o per qualunque arco compreso fra punti infinitamente distanti dal punto assintotico.

Cerchiamo ancora quali curve hanno il baricentro di ogni loro arco ed il punto d'incontro delle tangenti estreme congiunti da una retta invariabile in direzione. Le distanze

$$q_1 = x_1 \operatorname{sen}\varphi_1 - y_1 \cos\varphi_1 \quad , \quad q_2 = x_2 \operatorname{sen}\varphi_2 - y_2 \cos\varphi_2$$

del baricentro alle tangenti estreme, e gli angoli di queste con la direzione invariabile, soddisfano alle relazioni

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial q_2}{\partial s_1} = \frac{1}{\sigma}(x_1 \operatorname{sen}\varphi_2 - y_1 \cos\varphi_2) \quad , \quad \frac{\partial \sigma q_1}{\partial s_1} = \frac{1}{\rho_1}(x_1 \cos\varphi_1 + y_1 \operatorname{sen}\varphi_1) \\
&\frac{\partial q_1}{\partial s_2} = \frac{1}{\sigma}(x_2 \operatorname{sen}\varphi_1 - y_2 \cos\varphi_1) \quad , \quad \frac{\partial \sigma q_2}{\partial s_2} = \frac{1}{\rho_2}(x_2 \cos\varphi_2 + y_2 \operatorname{sen}\varphi_2) \\
&\frac{\partial \psi_2}{\partial s_1} = 0 \ , \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial s_2} = 0 \ , \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial s_1} = \frac{1}{\rho_1} \ , \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial s_2} = \frac{1}{\rho_2} \ ,
\end{aligned}$$

che si stabiliscono facilmente mercè le formole fondamentali. Ora dall'equazione del problema $q_1 \operatorname{sen}\psi_2 = q_2 \operatorname{sen}\psi_1$ si deducono, differenziando parzialmente, le relazioni

$$\frac{q_1}{\sigma}\operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{q_2}{\rho_1} = 0 \quad , \quad \frac{q_2}{\sigma}\operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{q_1}{\rho_2} = 0 \ ,$$

e da queste risulta

$$\rho_1\rho_2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1 - \varphi_2) = \sigma^2 . \tag{2}$$

In particolare, se b è il valore di ρ per $s=0$, e se si pone

$$\varphi = \int_0^s \frac{ds}{\rho} ,$$

si deve avere $b\rho \operatorname{sen}^2\varphi = s^2$, da cui segue

$$\frac{b}{s} = -\int \frac{b\,ds}{s^2} = -\int \frac{d\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi} = \cot\varphi + k ,$$

e finalmente, dopo aver posto $b = (1 + k^2)\,a$ ed aver trasportato in $s = ka$ l'origine degli archi,

$$\rho = a + \frac{s^2}{a} .$$

Si constata poi con facilità che, vincolato in tal modo ρ ad s, la relazione (2) è soddisfatta da qualunque coppia di valori di s_1 ed s_2. Adunque la proprietà enunciata appartiene esclusivamente alla *catenaria*.

A base dello studio baricentrico d'una linea piana si può anche porre la rete delle curve che inviluppano nei baricentri gli assi principali d'inerzia. Le variazioni delle coordinate del baricentro si deducono facilmente dalle formole fondamentali ricorrendo alla composizione delle velocità, ricordata in principio. Esse sono

$$d\varsigma_1 = -\frac{1}{\sigma}(x_1 ds_1 - x_2 ds_2) \quad , \quad d\varsigma_2 = -\frac{1}{\sigma}(y_1 ds_1 - y_2 ds_2) .$$

Ne segue che, se si vuole che l'asse x tocchi nel baricentro il proprio inviluppo, bisogna spostare gli estremi dall'arco σ in modo che sia costantemente $y_1 ds_1 = y_2 ds_2$, ed allora l'arco elementare dell'inviluppo è $d\varsigma_1$. Se invece gli estremi di σ si fanno scorrere lungo la curva in modo che si abbia sempre $x_1 ds_1 = x_2 ds_2$, il baricentro subirà uno spostamento $d\varsigma_2$ sull'asse y. Si costituisce così una rete ortogonale, nella quale si sa che le condizioni d'immobilità del punto (x, y) sono

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial \varsigma_1} = g_1 y - 1 \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial \varsigma_2} = -g_2 y \ , \\
&\frac{\partial y}{\partial \varsigma_2} = g_2 x - 1 \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial \varsigma_1} = -g_1 x \ .
\end{aligned}$$

In queste formole i coefficienti g_1 e g_2 (curvature delle linee coordinate) sono obbligati soltanto alla condizione di Lamé

$$\frac{\partial g_1}{\partial \varsigma_2} + \frac{\partial g_2}{\partial \varsigma_1} = g_1^2 + g_2^2 ,$$

necessaria e sufficiente per l'esistenza delle funzioni x ed y. Se si osserva che fra i quozienti differenziali relativi alle variabili s ed alle ς si hanno le relazioni

$$\frac{\partial}{\partial s_1}=-\frac{1}{\sigma}\left(x_1\frac{\partial}{\partial\varsigma_1}+y_1\frac{\partial}{\partial\varsigma_2}\right)\quad,\quad\frac{\partial}{\partial s_2}=\frac{1}{\sigma}\left(x_2\frac{\partial}{\partial\varsigma_1}+y_2\frac{\partial}{\partial\varsigma_2}\right),$$

dalle quali, chiamando $\frac{1}{2}\tau$ l'area del triangolo formato dal baricentro e dagli estremi dell'arco σ, si deducono le altre

$$\frac{\partial}{\partial\varsigma_1}=\frac{\sigma}{\tau}\left(y_2\frac{\partial}{\partial s_1}+y_1\frac{\partial}{\partial s_2}\right)\quad,\quad\frac{\partial}{\partial\varsigma_2}=-\frac{\sigma}{\tau}\left(x_2\frac{\partial}{\partial s_1}+x_1\frac{\partial}{\partial s_2}\right),$$

la trasformazione delle nuove formole fondamentali nelle antiche porge i valori delle curvature:

$$g_1=(x_2-x_1)\frac{y_1y_2}{\varkappa\tau}\quad,\quad g_2=(y_2-y_1)\frac{x_1x_2}{\varkappa\tau}\,. \tag{3}$$

Qui si noti che, se i precedenti valori si lasciano sotto la forma

$$g_1=-\frac{\sigma}{\tau}(\omega_1y_2+\omega_2y_1)\quad,\quad g_2=-\frac{\sigma}{\tau}(\omega_1x_2+\omega_2x_1),$$

e se d'altra parte si osserva che, rappresentando con φ l'angolo che una direzione invariabile fa con l'asse x, si ha

$$\omega_1=\frac{\partial\varphi}{\partial s_1}\quad,\quad\omega_2=\frac{\partial\varphi}{\partial s_2},$$

si ha pure

$$g_1=-\frac{\partial\varphi}{\partial\varsigma_1}\quad,\quad g_2=\frac{\partial\varphi}{\partial\varsigma_2}\quad,$$

e si riconosce subito che la condizione di Lamé è soddisfatta: basta applicare alla funzione φ la condizione d'integrabilità

$$\frac{\partial^2}{\partial\varsigma_1\partial\varsigma_2}-\frac{\partial^2}{\partial\varsigma_2\partial\varsigma_1}=g_1\frac{\partial}{\partial\varsigma_1}-g_2\frac{\partial}{\partial\varsigma_2}\,.$$

Quando per s_1 si fissa un valore qualunque s, e si fa poi tendere s_2 ad s, un asse principale tende a diventare tangente alla curva, l'altro normale. Scelto il primo come asse x, è facile riconoscere, tenendo presenti le relazioni

$$\frac{\partial}{\partial s_1}=\frac{\partial}{\partial s}-\frac{\partial}{\partial\sigma}\quad,\quad\frac{\partial}{\partial s_2}=\frac{\partial}{\partial\sigma}\quad,$$

che, per soddisfare alle formole fondamentali con serie che procedono secondo le potenze di σ, si deve prendere

$$x_1=-\frac{\sigma}{2}+\frac{\sigma^3}{48\rho^2}+\frac{\sigma^4}{120}\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho^2}+\dots\quad,\quad y_1=\frac{\sigma^2}{12\rho}+\frac{\sigma^3}{60}\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho^2}+\dots\,,$$

$$x_2=\frac{\sigma}{2}-\frac{\sigma^3}{48\rho^2}-\frac{\sigma^4}{80}\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho^2}+\dots\quad,\quad y_2=\frac{\sigma^2}{12\rho}+\frac{\sigma^3}{40}\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho^2}+\dots$$

Ne segue

$$\tau=\frac{\sigma^3}{12\rho}+\frac{\sigma^4}{24}\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho}+\dots \tag{4}$$

Inoltre, se si osserva che

$$\frac{\partial\varkappa\tau}{\partial s_1}=y_1^2-x_1^2\quad,\quad\frac{\partial\varkappa\tau}{\partial s_2}=x_2^2-y_2^2\quad,$$

si ottiene anche

$$\varkappa=\frac{\sigma^2}{12}-\frac{\sigma^4}{180\rho^2}+\dots$$

Queste formole rendono facile la discussione dei fatti geometrici della rete baricentrica nel dominio di qualunque punto ordinario della curva considerata. In particolare le formole (3) diventano, per $\sigma=0$,

$$g_1=\frac{1}{\rho}\quad,\quad g_2=\frac{3}{5}\frac{d}{ds}\log\rho\,,$$

e mentre la prima costituisce una verifica dei nostri calcoli, l'altra conduce ad una costruzione semplice dei centri di curvatura, lungo la data curva, di tutte le trajettorie (ad angolo costante) delle linee coordinate. Inoltre le ultime formole mostrano che non ogni rete ortogonale si può considerare come baricentrica di qualche curva, perchè occorre che in uno dei due sistemi di linee coordinate, per esempio nel sistema ς_1, la rete racchiuda una curva tale, che la curvatura delle linee dell'altro sistema prenda, sulla detta curva, i valori

$$g_2=-\frac{3}{5}\frac{\partial}{\partial\varsigma_1}\log g_1\,.$$

Del resto è chiaro geometricamente che le baricentriche sono reti specialissime. Così, per esempio, un doppio sistema di circoli ortogonali non costituisce, in generale, una rete baricentrica, perchè tale potrebbe essere solo per una delle sue circonferenze, e d'altra parte è ovvio che la rete baricentrica d'una circonferenza è costituita dalle circonferenze concentriche e dal fascio dei comuni diametri.

Osserviamo, per finire, che una curva qualunque appartiene alla propria rete baricentrica come luogo dei baricentri degli archi nulli, e però serve di confine fra la regione dei baricentri degli archi reali e quella dei baricentri di archi immaginarii. La prima regione si può idealmente scomporre in due fogli, immaginando ciascun punto come appartenente all'uno o all'altro foglio secondo che il corrispondente arco s'intende percorso in un senso o in senso opposto. In tal modo, per poco che si stacchino i due fogli, pur lasciandoli connessi lungo la data curva, si riesce a porre in rilievo la superficie luogo dei baricentri di tutti gli archi *reali* della curva stessa. Per ogni movimento continuo d'una coppia di punti, sulla curva, si ha un movimento continuo del corrispondente baricentro, ed il passaggio di questo da un foglio all'altro indica lo scambio delle posizioni relative dei due punti sulla curva. In tutto ciò il baricentro si comporta come se inseguisse i due punti col proposito di non raggiungerne uno senza raggiungere contemporaneamente anche l'altro. Nondimeno può accadere, in casi eccezionali, che il baricentro non raggiunga i due punti, quando questi si confondono, o che ne abbandoni uno per raggiungere l'altro. Per esempio, se due punti, confusi in origine, si staccano inseguendosi sempre in un senso lungo una circonferenza, il baricentro dell'arco primitivamente nullo finisce per trovarsi nel centro quando il punto più veloce raggiunge il più lento; ma si noti che allora un altro punto, baricentro dell'arco complementare, lascia il centro per andare a confondersi con entrambi i punti. Invece se due punti si rincorrono lungo una clotoide avvicinandosi ad un punto assintotico, e se il più veloce tende ad occupare questa posizione lasciando in altra il più lento, il baricentro finisce per confondersi col primo; ma in questo caso si deve notare che l'arco σ cresce indefinitamente. È in tutti i casi manifesta la tendenza del baricentro a raggiungere di preferenza quel punto che più rapidamente tende a sfuggirgli.

In forma geometricamente più chiara si presenta il luogo dei baricentri d'una curva storta. Siccome il baricentro si dirige verso un estremo mobile dell'arco, se l'altro resta fisso, è ovvio che il piano tangente in un punto qualunque della superficie baricentrica è individuato dal baricentro (punto di contatto) e dagli estremi del corrispondente arco. Quando l'arco tende a zero, il baricentro tende generalmente a collocarsi in un punto (nel punto di mezzo) dell'arco stesso, e però il piano tangente alla superficie tende ad osculare la curva. Dunque *una* delle infinite superficie, sulle quali una data curva è assintotica, ha la seguente proprietà: ogni piano tangente alla superficie stacca dalla curva un arco, che ha il baricentro nel punto di contatto. Tre punti qualunque della curva sono gli estremi di tre archi, i cui baricentri stanno sopra una retta, e però i baricentri dei sei archi determinati da quattro punti si distribuiscono in terne su quattro rette. Le superficie baricentriche sono dunque tali che ad ogni coppia di

punti se ne possono associare altre due, che insieme alla prima sono le tre coppie di vertici opposti d'un quadrilatero completo. È poi chiaro che da qualunque punto della superficie si possono condurre infinite rette, che incontrano la superficie in altri due punti: son questi i baricentri dei due archi, nei quali si può in una semplice infinità di modi spezzare l'arco corrispondente al punto dato. Tutto ciò mette bene in evidenza che non ogni superficie è baricentrica di qualche curva, come risulta anche dall'osservare, per esempio, che una quadrica rigata non è mai baricentrica, perchè tale potrebbe essere soltanto rispetto ad una sua generatrice rettilinea. Infatti, quando una superficie è baricentrica, la corrispondente curva è una delle sue assintotiche; e può anche darsi che la superficie sia baricentrica per tutte le assintotiche d'un sistema, come realmente accade nell'elicoide rigata ad area minima.

L'analisi intrinseca delle superficie baricentriche è tutta fondata su formole analoghe a quelle che si son trovate in principio per le curve piane. Rispetto agli assi principali d'inerzia, le condizioni d'immobilità del punto (x, y, z) sono

$$\frac{\partial x}{\partial s_1}=\left(1-\frac{yy_1}{\nu}+\frac{zz_1}{\mu}\right)\frac{x_1}{\sigma}\;,\qquad \frac{\partial x}{\partial s_2}=-\left(1-\frac{yy_2}{\nu}+\frac{zz_2}{\mu}\right)\frac{x_2}{\sigma}\;,$$
$$\frac{\partial y}{\partial s_1}=\left(1-\frac{zz_1}{\lambda}+\frac{xx_1}{\nu}\right)\frac{y_1}{\sigma}\;,\qquad \frac{\partial y}{\partial s_2}=-\left(1-\frac{zz_1}{\lambda}+\frac{xx_2}{\nu}\right)\frac{y_2}{\sigma}\;,$$
$$\frac{\partial z}{\partial s_1}=\left(1-\frac{xx_1}{\mu}+\frac{yy_1}{\lambda}\right)\frac{z_1}{\sigma}\;,\qquad \frac{\partial z}{\partial s_2}=-\left(1-\frac{xx_2}{\mu}+\frac{yy_2}{\lambda}\right)\frac{z_2}{\sigma}\;,$$

dove si è posto

$$\int_{s_1}^{s_2}(y^2-z^2)\,ds=\lambda\sigma\,,\qquad \int_{s_1}^{s_2}(z^2-x^2)ds=\mu\sigma\,,\qquad \int_{s_1}^{s_2}(x^2-y^2)=\nu\sigma\,,$$

dimodochè $\lambda+\mu+\nu=0$. Sia l la distanza del baricentro ad un punto della curva, e ψ l'angolo che la tangente in questo punto fa col raggio vettore. Fra le numerose formole che si possono dedurre dalle relazioni fondamentali conviene segnalare le seguenti:

$$\frac{1}{\sigma}\frac{\partial \sigma l_1}{\partial s_1}=\cos\psi_1\,,\quad \frac{1}{\sigma}\frac{\partial \sigma l_2}{\partial s_2}=\cos\psi_2\;. \tag{5}$$

Siano ξ, η, ζ le coordinate del punto fisso quando si prende per asse ξ la retta che congiunge il baricentro ad un estremo dell'arco, e per asse ζ la normale alla superficie baricentrica. Siano n, g, t la curvatura normale, la curvatura geodetica e la torsione geodetica della curva che il baricentro descrive quando insegue il predetto estremo. È noto che le condizioni d'immobilità del punto (ξ, η, ζ) sono

$$\frac{\partial \xi}{\partial \varsigma} = n\zeta - g\eta - 1 \quad , \quad \frac{\partial \eta}{\partial \varsigma} = g\xi - t\zeta \quad , \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \varsigma} = t\eta - n\xi \quad ,$$

e queste si debbono poter dedurre dalle formole segnalate in principio, tenendo presenti le relazioni che intercedono fra le antiche coordinate x, y, z e le nuove ξ, η, ζ, relative all'uno o all'altro estremo, ed osservando inoltre che si ha

$$\frac{\partial}{\partial \varsigma_1} = -\frac{\sigma}{l_1}\frac{\partial}{\partial s_1} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \varsigma_2} = \frac{\sigma}{l_2}\frac{\partial}{\partial s_2} \quad ,$$

come risulta, del resto, dalla stessa trasformazione delle antiche formole nelle nuove. Eseguendo questa trasformazione, e chiamando φ e χ le inclinazioni, sul piano tangente, della tangente alla curva in un dato punto, e del piano determinato dalla tangente stessa e dal baricentro, si trovano i valori delle curvature:

$$n_1 = -\frac{\sigma}{l_1^2}\operatorname{sen}\varphi_1 \quad , \quad g_1 = -\frac{\sigma}{l_1^2}\operatorname{sen}\psi_1\cos\chi_1 \quad , \quad t_1 = -n_1\cot\theta \quad ,$$

$$n_2 = \frac{\sigma}{l_2^2}\operatorname{sen}\varphi_2 \quad , \quad g_2 = \frac{\sigma}{l_2^2}\operatorname{sen}\psi_2\cos\chi_2 \quad , \quad t_2 = n_2\cot\theta \quad .$$

Già dall'ultima coppia di formole, in cui θ rappresenta l'angolo delle rette che dal baricentro vanno agli estremi dell'arco, si vede che le linee secondo le quali il baricentro insegue l'uno o l'altro estremo costituiscono una rete di curve coniugate. Sia $\frac{1}{2}\omega$ l'angolo di cui bisogna far ruotare la tangente ad una linea di curvatura perchè vada a dividere per metà l'angolo θ. È noto che, se N_1 ed N_2 sono le curvature principali, si hanno le relazioni

$$n_1 = \frac{1}{2}(N_1+N_2) + \frac{1}{2}(N_1-N_2)\cos(\omega+\theta) \quad , \quad t_1 = \frac{1}{2}(N_1-N_2)\operatorname{sen}(\omega+\theta) \quad ,$$

$$n_2 = \frac{1}{2}(N_1+N_2) + \frac{1}{2}(N_1-N_2)\cos(\omega-\theta) \quad , \quad t_2 = \frac{1}{2}(N_1-N_2)\operatorname{sen}(\omega-\theta) \quad ,$$

dalle quali si deduce

$$N_1+N_2 = \frac{n_1+n_2}{\operatorname{sen}^2\theta} \quad , \quad N_1N_2 = \frac{n_1n_2}{\operatorname{sen}^2\theta} \quad , \quad \operatorname{tg}\omega = \frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\operatorname{tg}\theta \quad . \qquad (6)$$

L'ultima formola serve alla determinazione delle linee di curvatura;

la seconda fornisce la seguente notevole espressione della curvatura totale:

$$G = -\frac{\sigma^2}{\tau^2}\operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2 \quad . \qquad (7)$$

Quando s_1 ed s_2 tendono insieme verso un dato valore di s, il baricentro tende a collocarsi sulla curva in modo che, mentre θ tende a π, i rapporti di l_1 ed l_2 a σ tendono ad $\frac{1}{2}$, e, poichè la curva è un'assintotica della superficie, t_1 e t_2 tendono a $-\frac{1}{r}$. Ne segue

$$\lim\frac{n_1}{\operatorname{sen}\theta} = -\frac{1}{r} \quad . \quad \lim\frac{n_2}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{r} \quad ,$$

e $\lim G = -\frac{1}{r^2}$, conformemente al teorema di Enneper. D'altra parte, se si osserva che la formola (4), limitata al primo termine, vale anche per le curve storte, si ottiene

$$\frac{1}{12\rho} = \lim\frac{l_1l_2\operatorname{sen}\theta}{\sigma^3} = \frac{1}{4}\lim\frac{\operatorname{sen}\theta}{\sigma} \quad ;$$

quindi

$$\lim\frac{n_1}{\sigma} = -\frac{1}{3\rho r} \quad , \quad \lim\frac{n_2}{\sigma} = \frac{1}{3\rho r} \quad ,$$

vale a dire che gli sviluppi in serie delle curvature normali hanno la seguente forma:

$$n_1 = -\frac{\sigma}{3\rho r} + 4k_1\sigma^2 + \ldots \quad , \quad n_2 = \frac{\sigma}{3\rho r} + 4k_2\sigma^2 + \ldots$$

Se si conoscessero i coefficienti k, si avrebbe subito il valore della curvatura media della baricentrica lungo la curva considerata:

$$H = \lim\frac{1}{2}(N_1+N_2) = 2(k_1+k_2)\lim\frac{\sigma^2}{\operatorname{sen}^2\theta} = 18(k_1+k_2)\rho^2 \quad .$$

Quindi si potrebbero costruire, in ogni punto della predetta curva, le linee di curvatura e le assintotiche dell'altro sistema, perchè dall'ultima relazione (6) si ricava $\cot\omega = Hr$. Ora dagli sviluppi delle curvature normali si deducono gli altri

$$\operatorname{sen}\varphi_1 = \frac{\sigma^2}{12\rho r} - k_1\sigma^3 + \ldots \quad , \quad \operatorname{sen}\varphi_2 = \frac{\sigma^2}{12\rho r} + k_2\sigma^3 + \ldots \qquad (8)$$

dai quali è più facile trarre i valori dei coefficienti k, perchè il significato geometrico delle φ permette di calcolare facilmente questi angoli servendosi di qualunque sistema di assi. Così in più modi si riesce ad ottenere

$$k_1 = -\frac{\rho^2 r^3}{120}\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho^3 r^4} \quad , \quad k_2 = \frac{\rho^6 r^5}{120}\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho^7 r^6} \quad ;$$

poi

$$\mathrm{H} = \frac{3}{10}\rho^3\frac{d}{ds}\frac{1}{r\rho^2} \; .$$

È questo valore della curvatura media, lungo la data curva, che serve a distinguere la baricentrica fra le infinite superficie che ammettono la curva stessa come assintotica.

Altri sviluppi utili si possono dedurre dalle medesime formole. Così, per esempio, portando in (7) gli sviluppi (4) ed (8) si ottiene

$$\mathrm{G} = -\frac{1}{r^2} - \frac{\sigma}{2}\frac{d}{ds}\frac{1}{r^2} - \ldots$$

In particolare si noti, fra le conseguenze di questa formola, che ogni curva a torsione costante determina sulla propria baricentrica una striscia di larghezza infinitesima, che si può considerare come staccata da una superficie pseudosferica. Un altro fatto che conviene segnalare si deduce dagli sviluppi

$$l_1 = \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma^3}{72\rho^2} - \frac{\sigma^4}{180}\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho^2} + \ldots \quad , \quad l_2 = \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma^3}{72\rho^2} - \frac{\sigma^4}{120}\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho^2} - \ldots ,$$

dai quali, osservando le (5), si trae

$$\cos\psi_1 = -1 + \frac{\sigma^2}{18\rho^2} + \frac{\sigma^3}{72}\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho^2} + \ldots \quad , \quad \cos\psi_2 = 1 - \frac{\sigma^2}{18\rho^2} - \frac{\sigma^3}{24}\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho^2} + \ldots \; ;$$

quindi

$$\lim\frac{\psi_1 - \pi}{\sigma} = \frac{1}{3\rho} \quad , \quad \lim\frac{\psi_2}{\sigma} = \frac{1}{3\rho} \; .$$

Ciò premesso, poichè χ_1 e χ_2 tendono ad annullarsi con σ, si ha

$$\lim g_1 = -\lim\frac{\sigma \operatorname{sen}\psi_1}{l_1^2} = \frac{4}{3\rho} \quad , \quad \lim g_2 = \lim\frac{\sigma \operatorname{sen}\psi_2}{l_2^2} = \frac{4}{3\rho} \; .$$

Dunque le linee d'inseguimento degli estremi degli archi, nei loro punti di contatto con la linea data, hanno la curvatura uguale ai $\frac{4}{3}$

della curvatura di questa linea, cioè doppia di quella della sezione fatta nella superficie baricentrica dal piano osculatore della curva, nel punto che si considera.

Lasciamo ai nostri giovani lettori la cura di proseguire lo studio delle superficie baricentriche, segnalando l'utilità che vi sarebbe a calcolare un altro termine negli sviluppi di H e di G, per poter decidere se, oltre l'elicoide, esistano altre baricentriche ad area minima, e se una baricentrica può avere la curvatura costante anche fuori della striscia determinata da una sua assintotica. Converrebbe poi trattare tutte le precedenti questioni da un punto di vista alquanto più generale, cioè ponendo fra i punti d'una superficie e gli archi d'una curva una corrispondenza tale, che i tre archi determinati da tre punti abbiano in linea retta i punti corrispondenti. Ciò avviene sempre quando agli archi si fanno corrispondere i baricentri, anche dopo aver distribuito masse, lungo la curva, con legge arbitraria.

Sui numeri transfiniti

Estratto d'una lettera di Georg Cantor a G. Vivanti - 13ten Dec. 1893

. . . . . Ich will mich nun heute mit jenen älteren Autoren beschäftigen, weil Sie mir schreiben, dass nach Ihrer Auffassung « die « Ordnungen des Unendlichwerdens der Functionen eine Klasse ein- « dimensionaler Grössen begründeten, welche unendlich kleine und « unendlich grosse Elemente einschliessen ».

Und Sie fügen hinzu:

« Es ist also ausser Zweifel, dass Ihre [d. h. meine] Behauptungen « sich nicht auf den allgemeinsten Grössenbegriff beziehen können etc.»

Lassen Sie uns nun einmal zusehen, ob ich wirklich gegen den *allgemeinsten Grössenbegriff* gesündigt habe.

Schon vor nicht ganz fünfundzwanzig Jahren machte ich beim Erscheinen der ersten Auflage von Thomae's « Abriss einer Theorie der Complexen Functionen und der Thetafunctionen. Halle, bei Nebert » die Bemerkung (und ich wundere mich dass dieselbe nicht seitdem auch von Anderen gemacht worden ist), dass seine Einführung von Ordnungsgrössen des Null-, und Unendlichwerdens von Functionen, *die nicht wie eine Potenz x^α mit reellem, rationalen oder irrationalen Exponenten α Null oder Unendlich werden*, auf einer *flagranten petitio principii* beruht.

Ich habe die 2te Auflage dieses Werkes (vom Jahre 1873) vor mir, wo auf pag. 9 jene Ordnungsgrössen wie folgt eingeführt werden: (NB. statt x braucht er den Buchstaben δ)

« Lässt sich eine Zahl α von der Beschaffenheit finden, dass für abnehmende x: $\operatorname{Lim}_{x=0} (f(y+x) - f(y) : x^\alpha)$ einer *endlichen von Null verschiedenen Zahl A* gleich wird, so kann α das Maass der Stetigkeit von $f(y)$ an jener Stelle y genannt werden. Es bilden dann diese Maasse der Stetigkeit, oder, was dasselbe ist, die Ordnungen des Verschwindens einer Function ein *stetiges Grössengebiet einer Ausdehnung, welches unendlich viel dichter ist, als das Gebiet der in dieser Mannigfaltigkeit mitenthaltenen gemeinen reellen Zahlen*, wenn man die Ordnung x^1 als Maasseinheit der Ordnungen nimmt, so dass x^α die α^{te} Ordnung ist und diese Ordnung ein bestimmtes Einzelnes (Element) in dieser Mannigfaltigkeit bedeutet. Lassen wir diese Ordnung der Zahl α entsprechen, so entspricht die Ordnung von $\frac{1}{\lg(x)}$ einer Zahl, die kleiner als jede angebbare Zahl und doch die Null nicht ist. »

Ich bleibe hierbei stehen, weil es die Grundlage für das Folgende im Thomaeschen Buche ist, und sage:

hier wird die *Voraussetzung* gemacht, dass es in einem hypothetisch gedachten erweiterten Zahlengebiete eine Grösse (Thomae bezeichnet sie mit lg; ich will sie j nennen) giebt, die sich als Ordnungsgrösse des Nullwerdens zu $\frac{1}{\lg(x)}$ genau ebenso verhält, wie sich die Grösse α zu x^α verhält.

Würde eine solche Grösse j existiren, so müsste sie kleiner sein, als jede noch so kleine Grösse des gemeinen reellen Grössengebiets. Es hängt also die Berechtigung der Einführung dieser Grösse j *zunächst* von der Frage ab, ob es überhaupt lineare Grössen giebt, die nicht Null und doch kleiner als jede noch so kleine reelle Grösse sind, d. h. *ob es actual unendlich kleine Grössen resp. Segmente im Gebiete des Möglichen giebt.*

Ist diese Frage unbedingt zu verneinen (wie ich es bewiesen habe) so *darf unter keinen Umständen von Ordnungsgrössen des Unendlichkleinwerdens bei Functionen gesprochen werden, die nicht wie eine Potenz x^α Null werden, wo α eine positive reelle Grösse bedeutet.*

Während also *Thomae, Du Bois, Stolz* etc. etc. durch jene Betrachtung die Einführung der *infinitesimi* glauben rechtfertigen zu können, verhält es sich vielmehr in Wahrheit so, *dass ihre ganze Theorie von den neuen Ordnungsgrössen in der Luft schwebt oder vielmehr ein* Nonsens *ist, falls es im Gebiete des Möglichen (dies ist der Sinn, in welchem ich das Wort* « Natur » *im weitesten Sinne brauche) keine actual unendlich kleinen Grössen giebt.*

Sie sehen also, dass der *vitiöse Zirkel* im Gedankengange dieser Herren nichts zu wünschen übrig lässt.

Ich gehe aber *noch weiter* und *behaupte*:

Selbst wenn es in der weiten Natur, d. h. im Gebiete des Möglichen, actual unendlich kleine Grössen geben würde (was ja bekanntlich nicht der Fall ist), so würde es doch unter ihnen keine *solche Grösse j geben, wie sie Herr Thomae braucht.*

Denn diese Grösse j müsste ja die Eigenschaft haben, dass:

$$\lim_{x=0} \frac{1}{\lg(x)} : x^j = A$$

wäre, *wo A eine endliche von Null verschiedene reelle Grösse wäre.*

Da aber j kleiner wäre, als jede noch so kleine reelle Grösse, so lässt sich leicht zeigen, dass *fur jedes noch so kleine reelle x,* die Ungleichheit bestehten würde

$$x^j > \frac{1}{2} .$$

Denn denken wir uns die positive Grösse x als *gegeben*; so existirt unter *den reellen Grössen* immer eine *so kleine* Grösse δ, dass:

$$x^{\delta} > \frac{1}{2} ;$$

da aber $j < \delta$, so müsste umsomehr auch $x^j > \frac{1}{2}$ sein.

Daher wäre

$$\lim_{x=0} \frac{1}{\lg(x)} : x^j = 0,$$

was der gemachten Annahme, dass A von Null verschieden ist, widerspricht.

Wollte man trotz alle dem die « Ordnungszahlen » von der Familie j noch *Grössen* heissen (was ich nicht mitmache, sondern Anderen überlasse) so müsste man sie nothwendig *papierene Grössen* nennen, weil sie, wie ich soeben gezeigt habe, gar keine andere Existenz haben als *auf dem Papiere ihrer Entdecker und Anhänger.*

Professor *Paul Du Bois Reymond* (und mit ihm Herr *Stolz*) macht sich aber noch eines andern Versehens schuldig, welches ihn zur Gründung seines « Infinitärcalcüls » verführt hat.

Denken wir uns unter x eine über alle Grenzen wachsende positive veränderliche Grösse und unter $f(x)$, $f_1(x)$,... *monoton* (d. h. ohne Maxima und Minima) positiv in's Unendliche wachsende stetige Functionen von x.

Jeder solchen Function entspricht bekanntlich nach Du Bois Reymond eine bestimmte Ordnungsgrösse $j, j_1, \ldots$ und diese Ordnungsgrössen bilden zusammen die « infinitäre Pantachie », von welcher unser Linearcontinuum nur ein schwacher Bestandtheil sein soll.

Es werden zwei Functionen $f(x)$, $f_1(x)$ von ihm infinitär *gleich* genannt: $f(x) \asymp f_1(x)$ wenn $\frac{f(x)}{f_1(x)}$ zwischen zwei endlichen von Null verschiedenen positiven Grenzen A u. B bleibt.

Es wird $f(x)$ infinitär kleiner als $f_1(x)$ genannt, in Zeichen $f(x) \prec f_1(x)$, wenn:

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{f_1(x)} = 0$$

und es wird endlich $f(x)$ infinitär grösser als $f_1(x)$ gesetzt, in Zeichen $f(x) \succ f_1(x)$, wenn:

$$\lim_{x=\infty} \frac{f_1(x)}{f(x)} = 0 .$$

Diesen drei Fallen entsprechend definirt er: $j=j_1$; $j<j_1$ und $j>j_1$.

Es lassen sich aber mit Leichtigkeit *monotone stetige* Functionen $f_1(x)$ bilden, die schon mit Bezug auf die einfachste Function $f(x)=x$ *keinem der drei von ihm statuirten Kriterien* des infinitären Gleich-, Kleiner- und Grössersein genügen, so dass von den zu ihnen gehörigen Ordnungsgrössen j_1 weder gesagt werden könnte, dass sie gleich **1**, noch dass sie >1, noch dass sie <1 sind.

Kann man solche Dinge noch Grössen nennen ?

Sie sehen also, dass auch die « infinitäre Pantachie » des Herrn *Du Bois Reymond* als papierene Grösse in den *Papierkorb* gehört!

Um Ihnen ein solches Beispiel monotoner stetiger Functionen $f_1(x)$ vorzuführen, betrachte ich den folgenden Hülfssatz (welchen Sie sich leicht beweisen werden) als zugestanden.

Sind

$$x_1 , x_2 , \ldots x_v , \ldots$$
$$y_1 , x_2 , \ldots y_v , \ldots$$

zwei unendliche Reihen reeller positiver Grössen, welche monoton mit v in's Unendliche wachsen, so dass:

$$x_{v+1} > x_v , \; y_{v+1} > y_v$$

und:

$$\lim_{v=\infty} \frac{1}{x_v} = \lim_{v=\infty} \frac{1}{y_v} = 0$$

so giebt es *monotone stetige mit Ableitungen beliebig hoher Ordnung* versehene Functionen $f_1(x)$, welche die Bedingung erfüllen, dass für jedes v:

$$f_1(x_v) = y_v .$$

Wenden Sie diesen Hülfssatz auf folgende zwei Reihen an:

$x_1=1$; $x_2=4$; $x_3=5$; $x_4=33$; $x_5=34$; $x_6=412$; $x_7=413$; $x_8=8265$;
$y_1=1$; $y_2=2$; $y_3=10$; $y_4=11$; $y_5=102$; $y_6=103$; $y_7=1652$; $y_8=1653$;

wobei das Gesetz dieser beiden Reihen in den folgenden Formeln liegt:

$$x_{2v+1}=x_{2v}+1\,;\ y_{2v}=y_{2v-1}+1\,;\ \frac{y_{2v}}{x_{2v}}=\frac{1}{v+1}\,;\ \frac{y_{2v-1}}{x_{2v-1}}=v\,,$$

so erhalten Sie eine monotone stetige Function $f_1(x)$, welche so beschaffen ist, dass:

$$\lim_{v=\infty}\frac{f_1(x_{2v})}{x_{2v}}=\lim_{v=\infty}\frac{x_{2v-1}}{f_1(x_{2v-1})}=0\,.$$

Der Quotient $\frac{f_1(x)}{x}$ nimmt also mit in's Unendliche wachsendem x sowohl Werthe an die kleiner sind, als jede noch so kleine, wie auch solche die grösser sind, als jede noch so grosse endliche Grösse.

Bin ich also im Unrecht, wenn ich die Thomae-Du Bois Reymond-Stolzschen infinitären Ordnungsgrössen auf eine Stufe mit den *kreisförmigen Quadraten* und *quadratförmigen Kreisen* stelle? Mit den actual unendlich kleinen Segmenten des Herrn Prof. *Veronese* sieht es aber leider nicht besser aus!

Ich kann Ihnen nur empfehlen sich das Buch *Fontenelle's* « Géomètrie de l'Infini » zu verschaffen, welches seiner geistvollen und inhaltreichen philosophischen Vorrede wegen volle Beachtung verdient; die mathematische Grundlage des Werkes ist aber durchaus *absurd*! Vergleichen Sie seine Theorie mit derjenigen des Herrn Veronese und Sie werden die Uebereinstimmung Beider bestätigt finden.

Lettera di Georg Cantor a G. Peano.

Herrn Professor Doct. G. Peano in Turin.

Halle a. d. S. 20 Juli 1895.

Sehr geehrter Herr College,

Die deutsche Bearbeitung der « Grundzüge der Geometrie » des Herrn Professors G. Veronese (Leipzig 1894, bei B. G. Teubner) setzt mich in die Lage, den Punct zu bezeichnen, aus welchem die *Unzulässigkeit* seiner transfiniten Zahlbildungen auf's Einleuchtendste hervorgeht.

Im 3ten Cap. der Einleitung § 45 (pag. 30) sagt er in der Def. II was er unter « Zahl oder Anzahl einer geordneten Gruppe » verstehen will. Es ist *genau Dasselbe*, was ich « Ordnungstypus einer einfach geordneten Menge » nenne. (Zur Lehre vom Transfiniten, Halle 1890, pag. 71-74). Ich schliesse dort *mit absoluter Nothwendigkeit und ohne jede Hypothese* auf das folgende Kriterium der « Gleichheit: ».

« Zwei einfach geordnete Mengen haben dann und nur dann einen und denselben Ordnungstypus, wenn sie « ähnlich » sind ».

Herr Veronese glaubt seinerseits dieser Bedingung einen *Zusatz* geben zu müssen, indem er sagt (pag. 31) « Zahlen, deren Einheiten sich eindeutig und in derselben Ordnung entsprechen (NB. « Aehnlichkeit ») *und von denen die eine nicht Theil der andern oder einem Theil der andern gleich ist*, sind gleich ».

Hierdurch wird aber seine Definition *völlig nichts sagend* und ein *monströser Cirkel*.

Was heisst denn in jenem Zusatz, dass die eine Zahl *keinem Theil der andern gleich* sein soll?

Um diese Frage zu beantworten, muss man doch *vorher* wissen, *wann* zwei Zahlen gleich oder ungleich sind!

Es setzt also seine Definition der Gleichheit eine Definition der Gleichheit voraus, die wiederum eine Definition der Gleichheit voraussetzt, bei welcher man von Neuem wissen muss, was gleich ist, u. s. w., u. s. w. in infinitum.

Da hiernach Herr Veronese *durch seinen willkürlichen Zusatz* das unentberliche Fundament für die Vergleichung von Zahlen *freiwillig preisgegeben hat*, so ist es nicht mehr verwunderlich, wenn er seinen pseudo-transfiniten Zahlen im Weiteren Eigenschaften zuschreibt, die sie aus dem einfachen Grunde nicht besitzen können, weil sie selbst keinerlei Existenz, es sei denn auf dem Papiere, haben. Es fehlt daher auch *allen Folgerungen*, welche er an *seine* pseudo-transfiniten Zahlbildungen knüpft, die wissenschaftliche Berechtigung.

Genehmigen Sie, Herr College den Ausdruck meiner Hochachtung.

Georg Cantor.

Sull'incommensurabilità, secondo il Prof. D. Gambioli, e su certi libri di testo

Appunti critici di E. De-Amicis, *ad Alessandria*

Poichè il *Periodico di Matematica* che si pubblica a Roma è destinato non solo agli insegnanti, ma anche agli allievi delle scuole secondarie, così ritengo doveroso porre in guardia questi ultimi contro un errore, veramente non piccolo, che essi hanno potuto leggere nell'articolo del prof. D. Gambioli « *Sull'incommensurabilità di due grandezze* », inserito nel fascicolo Marzo-Aprile 1895 del suddetto *Periodico*, ove in sostanza vien detto che *i quadrati dei numeri irrazionali sono* SEMPRE *numeri irrazionali.*

E poichè inoltre è risaputo che gli scritti di matematica che vengono alla luce in giornali di carattere scientifico-didattico, debbono non solamente contenere qualche nuovo risultato, se non sostanziale almeno formale, ma essere eziandio modelli di precisione, proprietà e rigore, così credo non inutile a tale riguardo un po' di recensione dell'articolo medesimo, tanto più che questo mi porgerà occasione a parlare come devesi di certi libri di testo.

Incomincio pertanto col seguente confronto:

Teorema. — *Se a e b sono due grandezze omogenee, delle quali $b > a$ e sia*

$$[1]\quad \frac{b}{a}=q_0+\frac{r_0}{a},\quad \frac{b}{r_0}=q_1+\frac{r_1}{r_0},$$

$$\frac{b}{r_1}=q_2+\frac{r_2}{r_1},\dots\frac{b}{r_{n-1}}=q_n+\frac{r_n}{r_{n-1}},\dots$$

senza che si giunga ad ottenere $r_n=0$, si avrà $\frac{a}{b}=\sum_0^n(-1)^n\frac{1}{|q_n}$;

Se A e B sono due numeri interi qualunque che si dividono l'uno per l'altro, P essendo il quoziente e R il resto, si avrà

$$\frac{B}{A}=P+\frac{R}{A}.$$

Facciamo ancora

$$\frac{B}{R}=P_1+\frac{R_1}{R},\qquad \frac{B}{R_1}=P_2+\frac{R_2}{R_1},$$

e così di seguito fino a che si trovi

significando col simbolo $|q_n$ il prodotto $q_0\ q_1 \dots q_n$.

Dimostrazione. — Dalle [1] si ricava

$$[2]\quad b=aq_0+r_0,\quad b=r_0q_1+r_1,$$
$$b=r_1q_2+r_n,\ \dots\ b=r_{n-2}q_{n-1}+r_{n-1},$$
$$b=r_{n-1}q_n+r_n,\ \dots,$$

quindi

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{q_0}-\frac{r_0}{b},\quad \frac{r_0}{b}=\frac{1}{q_1}-\frac{r_1}{bq_1},$$
$$\frac{r_1}{b}=\frac{1}{q_2}-\frac{r_2}{bq_2},\dots\frac{r_{n-2}}{b}=\frac{1}{q_{n-1}}-\frac{r_{n-1}}{bq_{n-1}},$$
$$\frac{r_{n-1}}{b}=\frac{1}{q_n}-\frac{r_n}{bq_n},\ \dots$$

Si dividano queste eguaglianze, incominciando dalla seconda, ordinatamente per q_0, q_0q_1, … $q_0q_1q_2 \dots q_{n-2}$, $q_0q_1q_2 \dots q_{n-1}$, … poi si addizionino le nuove eguaglianze ottenute coll'avvertenza di cambiare i segni a quelle di posto pari.

Avremo

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q_0q_1}+\frac{1}{q_0q_1q_2}\dots$$
$$\pm\frac{1}{q_1q_2\cdots q_{n-1}}\mp\frac{1}{q_0q_1\cdots q_n}\dots \text{ c.d.d.}$$

una divisione che riesca; provare che si ha:

$$\frac{A}{B}=\frac{1}{P}-\frac{1}{PP_1}+\frac{1}{PP_1P_2}-\frac{1}{PP_1P_2P_3}+$$

… Avremo per ipotesi il seguente sistema di equazioni

$$B=A\times P+R,\ B=R\times P_1+R_1,$$
$$B=R_1\times P_2+R_2,\ \dots,$$
$$B=R_{n-1}\times P_n+R_n,\ B=R_n\times P_{n+1}.$$

Da queste equazioni ottengo le altre

$$\frac{A}{B}=\frac{1}{P}-\frac{R}{BP},\quad \frac{R}{B}=\frac{1}{P_1}-\frac{R_1}{BP_1},$$
$$\frac{R_1}{B}=\frac{1}{P_2}-\frac{R_2}{BP_2},\ \dots,$$
$$\frac{R_{n-1}}{B}=\frac{1}{P_n}-\frac{R_n}{BP_n},\quad \frac{R_n}{B}=\frac{1}{P_{n+1}}.$$

Dividiamo, cominciando dalla seconda, queste equazioni per P, PP_1, PP_1P_2, …, $PP_1P_2\dots P_n$; quindi sommiamo le nuove equazioni, avendo l'avvertenza di cangiare i segni a quelle che occupano un posto pari ed otterremo:

$$\frac{A}{B}=\frac{1}{P}-\frac{1}{PP_1}+\frac{1}{PP_1P_2}-\dots$$
$$\pm\frac{1}{PP_1P_2\dots P_n}.$$

Le parole à destra si leggono a pag. 136 e 137 del *Soluzionario* degli esercizi dell'*Aritmetica* di Bertrand (D. Fontebasso, Genova 1871), e con quelle a sinistra il prof. Gambioli dà principio al suo articolo sull'incommensurabilità.

Nell'ultima eguaglianza a destra in luogo di P_n si deve leggere P_{n+1}; e la corrispondente di sinistra deve essere rettificata così:

$$[2']\quad \frac{a}{b}=\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q_0q_1}+\frac{1}{q_0q_1q_2}-\dots\pm\frac{1}{q_0q_1\cdots q_{n-1}}\mp\frac{1}{q_0q_1\cdots q_n}\pm\frac{r_n}{bq_0q_1\cdots q_n}.$$

E poichè quest'ultimo termine non ha sempre di necessità per limite 0, a questa identità finita non è lecito sostituire senz'altro la relazione

$$[2''] \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_0 q_1} + \frac{1}{q_0 q_1 q_2} - \ldots \pm \frac{1}{q_0 q_1 \ldots q_{n-1}} \mp \frac{1}{q_0 q_1 \ldots q_n} \pm \ldots,$$

cioè la tesi del *teorema* enunciato dall'autore. Così, per esempio, sempre nell'ipotesi $b > a$, potremo anche soddisfare le [1] prendendo i numeri q_0, q_1, q_2, ... tutti eguali ad 1, *senza che si giunga ad ottenere* $r_n = 0$, poichè risulterà

$$r_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}(b - a) + \frac{1 - (-1)^n}{2} a,$$

cioè $r_0 = b - a$, $r_1 = a$, $r_2 = b - a$, $r_3 = a$, ecc.; ed in questo caso l'espressione $\frac{r_n}{b q_0 q_1 \ldots q_n}$ anzichè tendere a 0, assumerà alternativamente i valori $\frac{a}{b}$ e $\frac{b-a}{b}$, secondochè n è dispari o pari; e qui la [2'] ci darà $\frac{a}{b} = 1 - 1 + 1 - \ldots \pm 1 \mp 1 \pm \frac{r_n}{b}$, vale a dire $\frac{a}{b} = 1 - \frac{b-a}{b}$ se n è pari e $\frac{a}{b} = 0 + \frac{a}{b}$ se n è dispari; invece la [2''] ci condurrebbe al risultato assurdo $\frac{a}{b} = 1 - 1 + 1 - \ldots \pm 1 \mp 1 \pm \ldots$ E pertanto, fino a che non si aggiungano condizioni per le quali l'espressione $\frac{r_n}{b q_0 q_1 \ldots q_n}$ (termine complementare o resto) debba avere per limite 0, quel *teorema* non regge.

L'autore dà poi la proposizione « *Supponendo nelle* [1] $r_0 < a$, $r_1 < r_0$, $r_2 < r_1 \ldots$, *i quozienti* q_0, q_1, q_2, ... *vanno di continuo aumentando* » e la chiama COROLLARIO del *teorema* predetto, mentre invece quella non può in alcun modo considerarsi come conseguenza della tesi di questo. E di questo *teorema* chiama pure COROLLARIO la proposizione « *Le due grandezze a e b sono incommensurabili* »; ed ancora impropriamente, poichè questa *tesi senza ipotesi* viene provata dal prof. GAMBIOLI, non già servendosi della tesi del teorema suddetto, come per via peraltro non breve sarebbe possibile, ma con metodo certamente più sbrigativo, mediante le seguenti parole a sinistra, le quali colla tesi di quel *teorema* non hanno niente a vedere ([1]).

Supponiamo infatti che a e b abbiano una comune misura c. Dalle [2] si vede che i resti r_0, r_1, r_2, ... sarebbero tutti multipli di c; di guisa che si avrebbe

$$r_0 = \alpha_0 . c, \; r_1 = \alpha_1 . c, \; r_2 = \alpha_2 . c, \ldots$$

con α_1, α_2, α_3,... numeri interi, e poichè $\alpha_0 c > \alpha_1 c > \alpha_2 c > \ldots$ risulterebbe $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots$

Ma una serie di numeri interi decrescenti deve contenere il termine zero, dunque uno dei resti dovrebbe essere zero; ciò che contraddice all'ipotesi.

..... supponiamo che m sia una comune misura di A e B ... si prova facilmente che i resti R, R_1, R_2, ... debbono essere tutti multipli di m; in guisa che, indicando con μ, μ_1, μ_2, ... numeri interi deve aversi $R = \mu m$, $R_1 = \mu_1 m$, $R_2 \mu_2 m$,... e poichè i resti ... formano una serie decrescente, dovrà aversi $\mu m > \mu_1 m > \mu_2 m > \ldots$ ovvero $\mu > \mu_1 > \mu_2 > \ldots$ Ma se una serie di numeri interi decresce continuamente, uno di essi deve ... essere zero; dunque uno dei resti dovrebbe essere zero, lo che contraddice all'ipotesi...

Le parole a destra si leggono a pag. 383 e 384 della versione italiana della *Geometria* di AMIOT (G. NOVI, Firenze 1880).

In seguito l'autore vuol dimostrare la convergenza della serie

$$[2'''] \quad \frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_0 q_1} + \frac{1}{q_0 q_1 q_2} - \frac{1}{q_0 q_1 q_2 q_3} + \ldots$$

E, per vero dire, se q_0, q_1, q_2, ... è una successione di infiniti numeri, ottenuti con legge determinata, differenti da 0, e tali che, ad un certo punto, uno di essi sia maggiore di 1 e non maggiore di nessuno dei successivi, la serie [2'''] è convergente, e, se inoltre si verificano le [2], ha per somma il rapporto $\frac{a}{b}$ ([2]).

Ma l'autore, al quale vorremmo raccomandare il motto « *Amica brevitas, sed magis amica veritas* », enuncia qui pure una tesi senza ipotesi e si esprime così: « *La serie*

$$[3] \quad S_n = \frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_0 q_1} + \frac{1}{q_0 q_1 q_2} - \ldots (-1)^n \frac{1}{q_0 q_1 q_2 \ldots q_n}$$

è convergente ». Ora la formola [3] non è una serie, ma un'eguaglianza (che serve a definire il simbolo S_n); inoltre il secondo membro di quest'eguaglianza non è una serie, ma un polinomio (di n+1 termini); e quand'anche, del resto, si volesse chiamar serie un polinomio, che cosa significherebbe il dire che *un polinomio è convergente*? Nè il lettore può credere che l'autore tacitamente supponga, nella [3], n=∞, poichè questi al contrario, subito dopo di aver conchiuso « *La serie* [3] *è dunque convergente* », passa ad un altro capoverso e lo incomincia così : « *Nella* [3] SUPPONGASI *che n* VADA ALL'INFINITO *e* PONIAMO S_x *sotto la forma di frazione continua illimitata.* DICO *che si ha identicamente*

$$[4] \qquad S_x = \frac{1}{q_0} \dot{+} \frac{q_0}{q_1-1} \dot{+} \frac{q_1}{q_2-1} \dot{+} \ldots \dot{+} \frac{q_s}{q_{s+1}-1} \dot{+} \ldots »$$

E pur troppo a questi appunti sulla frase colla quale l'autore enuncia che la serie [2‴] è convergente, converrebbe aggiungerne di più gravi riguardo al ragionamento col quale egli intende provare tale convergenza; ragionamento che non regge perchè è sostanzialmente basato sulla proposizione « *Una serie a termini di segno qualunque è convergente se la somma dei primi n termini si mantiene, al variare di n, minore di una quantità finita* », della cui insussistenza è facile convincersi, considerando, per esempio, nuovamente la serie non convergente $1-1+1-1+\ldots$, nella quale la somma dei primi n termini è 0 od 1 e perciò non supera mai il numero 1. La dimostrazione tentata dall'autore, supponendo, come questi sottintende, che q_0 sia positivo e q_1 sia maggiore di 1 e minore di tutti gli infiniti numeri $q_2, q_3, q_4, \ldots$ può rettificarsi così : essendo $q_1 > 1$ la serie geometrica $1+\frac{1}{q_1}+\left(\frac{1}{q_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{q_1}\right)^3+\ldots$ è convergente; di qui, pel teorema « *Se una serie a termini positivi ha i suoi termini, da un certo termine in poi, minori dei corrispondenti d'un'altra serie a termini positivi che si sa essere convergente, sarà pure convergente la serie proposta* » e perchè $q_2, q_3, q_4, \ldots$ sono tutti maggiori di q_1, segue la convergenza della serie $1+\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_1q_2}+\frac{1}{q_1q_2q_3}+\ldots$; di qui poi, pel teorema « *Se una serie è convergente, e si moltiplicano i suoi termini per una quantità* a, *la nuova serie sarà pure convergente* » e perchè q_0 è differente da 0, segue la convergenza della serie $\frac{1}{q_0}+\frac{1}{q_0q_1}+\frac{1}{q_0q_1q_2}+\frac{1}{q_0q_1q_2q_3}+\ldots$; e finalmente di qui, pel teorema « *Una serie a termini di segno qualunque è convergente se è convergente la serie formata coi valori assoluti dei termini* » e perchè gli infiniti numeri $q_0, q_1, q_2, q_3, \ldots$ sono tutti positivi, si conclude che la serie [2‴] è convergente (anzi è *assolutamente convergente*: vedi E. CESÀRO, *Corso di Analisi Algebrica*, cap. XXV - Torino, 1894).

I tre teoremi ora richiamati si leggono rispettivamente a pag. 270, 268, 278 del vol. I delle *Lezioni di Analisi infinitesimale* del prof.

G. PEANO (Torino, 1893); ed alla stessa pag. 278 si trova il teorema « *Una serie a termini di segno alternato, decrescenti continuamente e indefinitamente, è convergente* », dal quale, tenendo conto delle suddette ipotesi relative agli infiniti numeri $q_0, q_1, q_2, \ldots$, l'autore avrebbe potuto immediatamente concludere la convergenza della serie [2‴]; ammenochè non avesse preferito dedurla dalla identità finita [2′], ammettendo pertanto le [2], ed osservando che la [2′] può scriversi:

$$[2^{\text{IV}}] \quad \frac{a}{b} \mp \frac{r_n}{bq_0q_1\ldots q_n} = \frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_0q_1} + \frac{1}{q_0q_1q_2} - \ldots \pm \frac{1}{q_0q_1\ldots q_{n-1}} \mp \frac{1}{q_0q_1\ldots q_n},$$

e che per $n=\infty$, sempre in virtù delle ipotesi relative agli infiniti numeri $q_0, q_1, q_2, \ldots$ enunciati più sopra, l'espressione $\frac{r_n}{bq_0q_1\ldots q_n}$ (ove $r_n<b$) tende a 0, e perciò il polinomio del secondo membro della [2^IV] tende, come il suo primo membro, ad $\frac{a}{b}$; ossia la serie in questione, $\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q_0q_1}+\frac{1}{q_0q_1q_2}-\frac{1}{q_0q_1q_2q_3}+\ldots$, è convergente (ed ha per somma $\frac{a}{b}$).

La trasformazione d'una serie in frazione continua pare dovuta ad Eulero (*Opuscula analytica*, a. 1785) e si deduce dall'identità finita:

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n = \cfrac{u_1}{1-\cfrac{u_2:u_1}{(u_1+u_2):u_1-\cfrac{u_3:u_2}{(u_2+u_2):u_2-\ddots-\cfrac{u_n:u_{n-1}}{(u_{n-1}+u_n):u_{n-1}}}}}$$

alla quale si può dare la forma:

$$v_1-v_2+v_3-\ldots\pm v_n = \cfrac{u_1}{1+\cfrac{v_2}{v_1-v_2+\cfrac{v_1v_3}{v_2-v_3+\ddots+\cfrac{v_{n-2}\,v_n}{v_{n-1}-v_n}}}}$$

Di qui segue tosto:

$$\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q_0q_1}+\frac{1}{q_0q_1q_2}-\dots\pm\frac{1}{q_0q_1q_2\cdots q_{n-1}}=\cfrac{1}{q_0+\cfrac{q_0}{q_1-1+\cfrac{q_1}{q_2-1+\ddots+\cfrac{q_{n-2}}{q_{n-1}-1}}}}$$

E di qui facendo crescere n indefinitamente, tenendo conto delle solite ipotesi dalle quali segue la convergenza della serie [2'''], ed avendo pure presente il concetto di convergenza e valore di una frazione continua (vedi S. PINCHERLE, *Analisi Algebrica*, cap. X - Milano, 1893), si ottiene la [4] cioè l'identità:

$$\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q_0q_1}+\frac{1}{q_0q_1q_2}-\dots=\cfrac{1}{q_0+\cfrac{q_0}{q_1-1+\cfrac{q_1}{q_2-1+\ddots}}}$$

che il lettore può vedere a pag. 46 degli *Elementi di Matematiche* di G. INGHIRAMI (Firenze, 1841), applicata ad eleganti espressioni di $\frac{1}{e}$ e di e, e che viene dimostrata induttivamente dal GAMBIOLI; il quale poi non trova ozioso dimostrare eziandio, ispirandosi a LEGENDRE (*Éléments de Géométrie*, Note IV, Lemme I), che la frazione continua che costituisce il secondo membro di tale identità esprime un numero *irrazionale*, proprio come la serie che ne costituisce il primo membro e che esprime, conforme si è detto, il rapporto di due grandezze *incommensurabili* fra loro.

Finalmente, dimenticando di avere a fronte una frazione continua *non ordinaria* e di non potere pertanto applicare il noto teorema sulla periodicità dei quozienti, della frazione continua *ordinaria* che esprime la radice quadrata di un numero *intero* e positivo, il quale non sia il quadrato di un numero intero, l'autore conclude « *Inoltre la frazione continua medesima non potendo essere periodica poichè le q vanno sempre aumentando,* IL SUO VALORE NON È LA RADICE QUADRATA DI UN NUMERO RAZIONALE ».

Adunque, per esempio, se a è il lato di un quadrato e b ne è la diagonale, *incommensurabile con a*, potremo stabilire le [1], esprimere il rapporto $\frac{a}{b}$ mediante la serie [2'''], trasformare questa serie nella sovrascritta frazione continua, e poi concludere col prof. GAMBIOLI che

il suo valore, CIOÈ $\sqrt{\frac{1}{2}}$, *non è la radice quadrata di un numero razionale*; e pertanto $\frac{1}{2}$ non sarebbe più un numero razionale. E si comprende agevolmente come, applicando ad un altro numero irrazionale qualunque un procedimento analogo a quello ora tenuto per $\sqrt{\frac{1}{2}}$, si potrebbe parimenti concludere che quel numero irrazionale non può essere la radice quadrata di un numero razionale; in altri termini: *i quadrati dei numeri irrazionali sono* SEMPRE *numeri irrazionali !*

Eppure l'egregio prof. GAMBIOLI non ignora che nel primo quarto del secolo corrente c'è stato chi, aprendo fin d'allora la via a LINDEMANN ed HERMITE, ha voluto dimostrare che « *Le quarré du rapport de la circonférence au diametre est un nombre irrationel* », dopo che Lambert, già nel 1761, aveva dimostrata l'irrazionalità di π [3].

L'errore, veramente non piccolo, del professore di matematica di una delle RR. Scuole tecniche di Milano, richiama quello, certamente più grave sotto qualsiasi aspetto, del professore di matematica di uno dei RR. Licei di Roma, il sig. O. TOGNOLI; il quale, nella sua nota « *Sull'incommensurabilità del numero π* », a pag. 114 e 115 del suo *libro di testo* « EUCLIDE. *Libro sesto.* Seconda edizione *riveduta e migliorata* (Editore LOESCHER) », intende dimostrare il teorema di Lambert colle parole seguenti:

« Così si dedurranno le due serie di numeri tutti *commensurabili*:

« $\alpha')\dots\dots\begin{matrix}\lambda^{(p)}, & \lambda^{(p')}, & \lambda^{(p'')}, & \dots\dots, \\ \mu^{(p)}, & \mu^{(p')}, & \mu^{(p'')}, & \dots\dots,\end{matrix}$ e tali, che tutti quelli della prima serie

« andranno continuamente crescendo a partire dal primo, e saranno

« tutti minori del numero $\frac{\text{Circonf.R}}{2\text{R}}$; quelli della seconda serie andranno

« tutti decrescendo a partire dal primo, e saranno tutti maggiori del

« numero $\frac{\text{Circon.R}}{2\text{R}}$. Le differenze fra due numeri che occupano il

« medesimo posto nelle serie α'), senza mai potersi annullare, andranno

« però continuamente decrescendo; e si finirà sempre per ottenerne *una*,

« che sia minore di *un* numero assegnabile arbitrariamente piccolo.

« DUNQUE *le due serie α') definiscono un numero incommensurabile*,

« che è necessariamente uguale a $\frac{\text{Circonf.R}}{2\text{R}}$, *ovvero* al numero π. *Di*

« *qui* risulta la *verità* del *teorema*: Il valore comune dei rapporti

« $\frac{\text{Circonf.R}}{2\text{R}}$, $\frac{\text{Cer.R}}{\text{R}^2}$, *è espresso da un numero incommensurabile.* »

Tal metodo sarebbe davvero sbrigativo: senonchè, applicandolo per esempio alle due successioni $\begin{cases} 0{,}6\,;\ 0{,}66\,;\ 0{,}666\,;\ \ldots.. \\ 0{,}7\,;\ 0{,}67\,;\ 0{,}667\,;\ \ldots.. \end{cases}$, si dovrebbe, alla stessa stregua, concludere che esse pure individuano un numero irrazionale, *che sarebbe poi precisamente* $\frac{2}{3}$!

E dopo questi errori intorno al delicato argomento dei numeri irrazionali, da parte di professori di importanti scuole governative delle nostre città capitali, autori e traduttori di memorie scientifiche e di libri di testo ([4]), che dovremmo dire dei vigenti *Programmi* che degli irrazionali, e delle operazioni ad essi relative, prescrivono lo studio nella seconda classe degli istituti tecnici, la quale, per l'età degli alunni, corrisponde — lo si noti — alla quinta classe ginnasiale?

NOTE.

([1]) Il prof. GAMBIOLI non è solo, fra' suoi colleghi, ad adoperare impropriamente la parola *corollario*. Il sig. ing. A. MUCCHI, professore di matematica in una delle RR. Scuole tecniche di Roma, nei suoi *Elementi di Geometria* (Editore Paravia, 1895), a pag. 48 dà come *corollario* del teorema « *Ogni diametro divide la circonferenza ed il circolo in due parti eguali* » la doppia proposizione « *Due circonferenze descritte con raggi eguali sono eguali, ed inversamente* ». Poco dopo (pag. 49 e 50) scrive: « TEOREMA. — *In un medesimo circolo od in circoli eguali:* 1° *se due corde sono eguali, sono sottese da angoli al centro eguali;* 2° *se due corde sono diseguali, la maggiore è sottesa* dall'*angolo maggiore* »; dà la dimostrazione, e prosegue: « COROLLARIO. — Con analogo ragionamento si prova il teorema inverso, cioè: ... ». E, procedendo *per esclusione*, potrebbe questo *teorema inverso* ottenersi appunto come *corollario* del *teorema diretto*; ma tale, qui, non può più dirlo l'autore, dal momento che lo considera invece come *conseguenza di un ragionamento analogo*. A pag. 120 dà come corollari del teorema « *Se una retta* AB *è perpendicolare a due rette* BC, BD *condotte pel suo piede* B *in un piano* PQ, *è pure perpendicolare a qualunque altra retta* BE *tirata pel suo piede nel piano, e quindi perpendicolare al piano stesso* », le due proposizioni: « *Da un punto dato in un piano, e da una stessa parte di esso, si può innalzare una sola perpendicolare a questo piano* » e « *Da un punto dato fuori di un piano si può abbassare una sola perpendicolare* SOPRA *questo piano* ». Raccomando al benigno lettore *il piano* PQ, *la retta* BE *tirata*

pel suo *piede nel piano, l'innalzare* e *l'abbassare*, e domando al medesimo, anche coll'appoggio delle dimostrazioni dell'autore, se queste due proposizioni sono corollari del teorema suddetto o non piuttosto della definizione di perpendicolarità fra retta e piano e delle due proposizioni planimetriche corrispondenti. È poi degna di speciale considerazione la proposizione « *I circoli*, POTENDOSI RIGUARDARE COME POLIGONI REGOLARI DI UN NUMERO INFINITO DI LATI, *sono figure simili* », che, *naturalmente*, l'autore pone (pag. 103) fra i *corollari* della definizione « Due *poligoni* diconsi *simili* ecc. ». Ma, di grazia, prof. A. Mucchi, come fate voi a dimostrare che *l'infinito intero è un numero pari?* Perchè? Perchè senza di ciò i *vostri circoli perdono il centro*; diffatti è noto che, mentre i poligoni regolari parilateri hanno il *centro* (punto di mezzo di tutte le loro corde passanti per esso), quelli disparilateri sono privi di tal centro. E del resto come conciliate la vostra asserzione col fatto che le circonferenze sono linee curve e i poligoni non lo sono? Essa, al certo, non concorda col *principio di contraddizione*, ma armonizza perfettamente con quella che segue (pag. 145): « LA SFERA PUÒ CONSIDERARSI COME COMPOSTA DI INFINITE PIRAMIDI AVENTI LE BASI SULLA SUPERFICIE DELLA SFERA E I VERTICI NEL CENTRO DI QUESTA ». Si noti che l'autore non parla, nè qui, nè altrove, di piramidi sferiche; si tratta dunque precisamente di *piramidi ordinarie, poliedriche, aventi le basi* (PIANE) *sulla superficie* SFERICA! Di qui poi l'autore deduce « *il volume di una sfera si ottiene moltiplicando il cubo del suo raggio per i* $^4/_3$ *del* RAPPORTO. » Evvia! Per un libro di testo, che in pochi anni è già arrivato alla sua *decima edizione*, mi pare davvero che basti.

([2]) Al rapporto $\frac{a}{b}$, sempre nell'ipotesi $a < b$, si possono anche dare le espressioni seguenti molto analoghe alla [2‴]: $\frac{1}{Q_1\,Q_2} - \frac{1}{Q_2\,Q_3} + \frac{1}{Q_3\,Q_4} - \frac{1}{Q_4\,Q_5} + \cdots$; $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_1\,m_2} + \frac{1}{m_1\,m_2\,m_3} + \frac{1}{m_1\,m_2\,m_3\,m_4} + \cdots$; $\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} + \cdots$; nelle quali, rispettivamente, Q_1, Q_2,... sono i denominatori, formati colla nota legge ricorrente, delle ridotte della frazione continua *ordinaria* equivalente ad $\frac{a}{b}$ (S. PINCHERLE, *Analisi Algebrica*, Milano 1893); $m_1, m_2,$... sono numeri interi, convenientemente determinati tutti positivi (V. MOLLAME, *Espressione del rapporto fra due stati di una grandezza*, Periodico di Scienze matematiche, Roma 1873) od anche alcuni positivi ed altri negativi (E. HEIS, *Raccolta di esercizi*, Torino 1876), e u_1, u_2,... sono numeri interi positivi, soddisfacenti alle condizioni $u_1 > 1$, $u_n > u_{n-1}\,(u_{n-1} - 1)$, e, quando l'espressione debba continuare indefinitamente, anche alla condizione $u_n > u_{n-1}\,(u_{n-1} - 1) + 1$ per infiniti valori di n (vedi la bella e notevolissima memoria « *Sulla determinazione dei numeri reali mediante somme e prodotti* » del prof. F. GIUDICE, inserita negli *Atti della R. Accademia delle Scienze* — Torino 1894 —, e specialmente interessante per chi voglia trattare la teoria dei numeri irrazionali col metodo di WEIERSTRASS, cioè delle *parti integranti;* metodo meno comune, ma, a mio credere, se convenientemente esposto, didatticamente preferibile a quelli di CANTOR e di DEDEKIND, cioè dei *limiti* e delle *classi,* come più naturale, altrettanto rigoroso e più pratico).

(3) È noto che i signori LINDEMANN ed HERMITE hanno recentemente, rispettivamente dimostrato che gli irrazionali π ed e sono *numeri trascendenti,* cioè, come solitamente si dice, non sono *numeri algebrici.* Per π siffatta irrazionalità trascendentale era già stata intuita da Legendre, il quale lasciò scritto: « *Il est probable que le nombre π n'est pas même compris dans les irrationnelles algébriques, c'est-à-dire, qu'il ne peut être la racine d'une équation algébrique d'un nombre fini de termes dont les coëfficients sont rationnels: mais il paraît tres-difficile de démontrer rigoureusement cette proposition; nous pouvons seulement faire voire que le quarré de π est encore un nombre irrationel.* »

(4) Il prof. GAMBIOLI è uno dei traduttori di quegli *Elementi di Geometria metrica* del dott. O. SCHLOMILCH, nei quali (Paravia e comp., 1891, pag. 14 e 15), a proposito della teoria delle parallele, si legge una *dimostrazione* che può essere riassunta così: « Si ha: $\left\{ \begin{array}{l} \textit{direzione di } OA = \textit{direzione di } O'A' \\ \textit{direzione di } OC = \textit{direzione di } O'C' \end{array} \right.$; di qui, sottraendo membro a membro: *angolo* AOC = *angolo* A'O'C'; cioè: *Gli angoli corrispondenti sono eguali fra loro* »; e giova notare che l'angolo vi è definito così (pag. 8): « *Siano ora le rette effettivamente prolungate in modo da incontrarsi in un punto; si forma* IN QUESTO PUNTO *una nuova figura geometrica:* l'ANGOLO. ». Serva questo piccolo saggio a dare idea del metodo, *facile, chiaro, piano, alquanto originale: e pratico* (vedi prefazione), adottato in questo trattato tedesco, che i traduttori vorrebbero sostituire, almeno negli Istituti tecnici, a quelli di SANNIA e D'OVIDIO, di DE PAOLIS, di LAZZERI e BASSANI e di F. GIUDICE (italianamente e originalmente concepiti, scientificamente e didatticamente scritti), dicendo che un tal metodo *è quello che si segue* (?!?) *nei nostri Istituti tecnici.* Così, almeno , i traduttori hanno scritto nella prefazione; ove si legge pure quanto segue: « *È un fatto che la geometria euclidea per l'eccellenza del metodo è da preferirsi alla Geometria del Legendre. Ma è pur vero che gli studi in Italia... seguono due indirizzi differenti; quindi... l'insegnamento matematico puramente classico deve essere ben diverso dall'insegnamento matematico... professionale. Ecco perchè per i Licei si troveranno ottimi gli Elementi di Euclide e negli Istituti tecnici invece dovrà addottarsi una Geometria svolta con un metodo puramente pratico* ». Ora, prescindendo che la *geometria euclidea* è quella in cui, direttamente o indirettamente, si fa uso del *postulato di Euclide,* e che perciò è euclidea, non solo quella di Legendre, ma finanche (pare impossibile) quella del dott. O. SCHLÖMILCH, e l'eguaglianza *angolo* AOC = *angolo* A'O'C' è là a testimoniarlo, io non arriverò mai a comprendere come si possa far distinzione, come i traduttori vorrebbero, fra *matematica classica* e *matematica tecnica,* almeno per iscuole, quali i nostri Licei e le nostre Sezioni fisico-matematiche degli Istituti tecnici, le quali, per quanto distinte, pure conducono ad unica meta: l'Università; scuole insomma entrambe d'istruzione secondaria *di pari grado,* e di coltura, classica o tecnica, ma sempre ecletica, e per le quali la matematica deve precipuamente considerarsi come suprema ginnastica logica, — poesia della ragione —. I sig. GAMBIOLI & COMP., istituendo l'assurda distinzione suddetta, vorrebbero invece nei Licei un ammaestramento scientifico, e negli Istituti tecnici un insegnamento puramente pratico; nei primi dimostrazioni, nei secondi informazioni; là ragionamento, qui empirismo.

Voglio però terminare questa nota, e così chiudere questo scritto, chiedendo venia a chi di ragione per la forma alquanto vivace di questi miei appunti, i quali peraltro non sono intesi in verun modo ad offendere alcuno. Gli errori da me rilevati non sono forse che semplici sviste, e, del resto, non tolgono merito a chicchessia. Ed infatti qual'è il docente e lo scrittore di matematica, alquanto provetto e studioso, che, perfezionati di anno in anno i metodi d'insegnamento, di esposizione e di investigazione scientifica, non abbia poi dovuto confessare, se non ad altri, a se stesso d'aver taluna volta dato dimostrazioni che non reggevano e financo proposizioni insussistenti? E, dopo tutto, come è preferibile il soffrire al non esistere (tale almeno, dice la leggenda, è il parere dell'angelo ribelle), così ai molti insegnanti che prudentemente si celano nel comodo far nulla, sono da anteporsi quei pochi che, anche affrontando critiche talvolta involontariamente pungenti, a seconda delle loro forze pubblicano e lavorano.

Spinetta-Marengo, Giugno 1895.

D[r] G. Frege. — *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet.* Erster Band, Jena, 1893, pag. XXXII+254.

In questo libro si dimostrano le proposizioni fondamentali dell'Aritmetica, cioè quelle riferentisi al concetto di numero intero, alla numerazione, all'infinito, ecc. Non sono considerati nel volume i numeri negativi, nè i fratti; nè ancora è trattata l'addizione degli interi.

Ma ciò che rende importante questo libro è la forma data a queste dimostrazioni, forma che l'A. chiama *ideografia* (Begriffschrift), e che consiste nell'indicare con segni aventi valore fisso le varie idee che si presentano nella sua trattazione; nello spiegarne alcune con parole del linguaggio ordinario, e nel definire le altre combinando puramente le idee precedenti. Le dimostrazioni delle proposizioni d'Aritmetica sono tutte scritte nella sua ideografia, senza termini del linguaggio ordinario; esse si riducono ad una successione di proposizioni, tali che dall'una si passa all'altra applicando una sola regola di ragionamento; e queste regole sono dall'Autore raccolte ed esaminate in apposito §.

L'A. nel costrurre questo lavoro adopera un metodo affatto suo proprio. Egli già aveva trattate le questioni di Aritmetica col linguaggio comune nei « Grundlage der Arithmetik (1884) »; ed aveva già esposto il suo « Begriffschrift » nel 1879; il quale però non corrisponde più appieno all'attuale suo punto di vista (pag. 5, nota).

È evidente l'identità della questione trattata dal nostro autore con quella che è scopo della Logica matematica. Non è mia intenzione di fare qui la storia di questa scienza, che si va ora rapidamente sviluppando. Questa storia è scritta nel Formulario di Matematica, parte I, in quanto si riferisce alle varie identità logiche, poichè ivi è indicato l'Autore che primo le enunciò.

Or sono alcuni anni, colla considerazione della classe determinata da una condizione, vale a dire mettendo degli indici al segno di deduzione, feci vedere che tutto il calcolo logico sulle classi si trasformava in un calcolo sulle proposizioni (*Calcolo geometrico*, 1888); idea

questa già intravvista dal Boole, il quale parlò di *tempo*, durante cui una condizione è verificata.

E allora bastò una convenzione onde indicare le proposizioni individuali (segno ε), perchè potessi sviluppare un'intera teoria completamente in simboli, negli « *Arithmetices principia* (1889) ».

Questa scrittura simbolica si è poi successivamente perfezionata; finchè nel Formulario di Matematica già si riuscì ad analizzare in simboli numerose teorie. Man mano si traducono in simboli nuove teorie, conviene introdurre nuovi segni per indicare le nuove idee o le nuove combinazioni di idee che si presentano in queste teorie. Però si noti che non occorrono nuovi segni per indicare le idee di logica. Esse sono tutte completamente rappresentate coi segni dapprima introdotti. La Matematica è ora in possesso d'uno strumento atto a rappresentare tutte le sue proposizioni, e ad analizzare le varie forme di ragionamento.

Ora se, indipendentemente l'uno dall'altro, sorgono due sistemi atti a rappresentare e ad analizzare le proposizioni d'una teoria, fra essi si potrà presentare una assoluta differenza formale; ma vi dovrà sussistere un'analogia sostanziale; e se i sistemi sono egualmente perfezionati, fra essi ci dovrà essere l'identità. Poichè la Logica Matematica non consta di una serie di convenzioni arbitrarie, e variabili a capriccio dell'autore; ma bensì nell'analisi delle idee e delle proposizioni in primitive e derivate. E questa analisi è unica.

Molte idee del nostro Autore sono analoghe a quelle esposte nella Logica matematica. Le definizioni e le dimostrazioni sono quasi identicamente considerate, e in modo affatto diverso da quello dei logici che non fanno uso dei simboli.

Io mi propongo qui di dare un cenno del modo usato dall'A. per indicare le operazioni e relazioni logiche.

È noto che, nel Formulario di Matematica, tutte le relazioni ed operazioni fra proposizioni e fra classi si riducono a tre fondamentali, indicate coi segni

$$\cap \ , \ \supset \ , \ - \ .$$

Oltre a questi si usano, per comodità, i segni $=$, $\cup$, Λ, che sono definiti mediante i precedenti.

Il Frege, per esprimere queste relazioni e operazioni fra proposizioni, scrive in colonna queste proposizioni, e a sinistra, lungo questa colonna, mette un segno vario composto di tratti orizzontali, verticali, curvi, tutti aderenti fra loro; sicchè si ha qualche difficoltà a decomporre questo segno nei segni che lo costituiscono, onde poterli numerare. Ad ogni modo ecco come si possa spiegare la notazione del Frege.

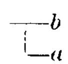
Essendo a una proposizione, il nostro Autore (pag. 9) introduce una notazione $\vdash a$ per dire « la a è vera »; ed un'altra notazione $— a$ per indicare « la verità di a ». Non veggo l'utilità di queste convenzioni, che non hanno le corrispondenti nel Formulario. Invero la varia posizione che può avere in una formola una proposizione indica completamente ciò che di essa si afferma. Così delle nostre scritture

$$a \;,\quad a \supset b \;,\quad a \supset b \,.\supset c$$

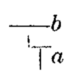
la prima dice « è vera la a », la seconda invece « da a si deduce b », la terza « se da a si deduce la b, allora è vera la c ». Quest'ultima non indica la verità di a, b, c nè di $a \supset b$, ma solo la verità della relazione indicata fra queste proposizioni.

In seguito l'A. introduce un segno ⊤ per la negazione, che corrisponde al nostro $-$. Il segno d'eguaglianza ha la stessa forma e significato nelle due notazioni. Però il Frege ne fa raro uso fra proposizioni. Egli scrive costantemente le due proposizioni $a \supset b$ e $b \supset a$ invece di $a = b$ (Form. I, § 1 P3).

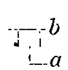
Il Frege introduce poi la notazione



che corrisponde esattamente alla nostra $- a \cup b$. In conseguenza cambiando a nella sua negativa, la formola

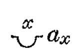


del Frege equivale alla nostra $a \cup b$; e scambiando b nella sua negativa e negando il risultato, la formola



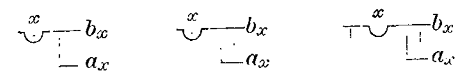
del Frege equivale alla nostra $a \cap b$.

Essendo poi a_x una proposizione contenente una lettera variabile x, la scrittura del Frege



equivale alla nostra $\mathrm{V} =_x a_x$, ossia $(-a_x) =_x \Lambda$; e sostituendo ad a_x una

delle funzioni ora considerate di due proposizioni a_x e b_x, si hanno le notazioni del Frege



equivalenti alle nostre

$$\mathrm{V} =_x - a_x \cup b_x \text{, cioè } a_x - b_x =_x \Lambda \text{, o ancora } a_x \supset_x b_x$$
$$\mathrm{V} =_x - a_x \cup - b_x \text{, cioè } a_x \cap b_x =_x \Lambda$$
$$-(\mathrm{V} =_x - a_x \cup - b_x) \text{, cioè } a_x \cap b_x - =_x \Lambda \,.$$

I due sistemi di notazioni si possono confrontare sotto l'aspetto scientifico e sotto quello pratico. Sotto l'aspetto scientifico, il sistema del Frege è basato sui cinque segni fondamentali

mentre il nostro sui tre segni

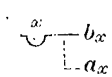
$$- \;,\quad \cap \;,\quad \supset \,.$$

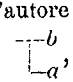
Quindi il sistema del Formulario corrisponde ad un'analisi più profonda.

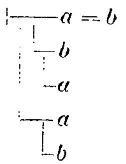
Sotto l'aspetto pratico poi, il rappresentare col Frege la moltiplicazione logica mediante un segno composto, ci fa perdere di vista le sue proprietà commutativa ed associativa.

Le notazioni adottate nel Formulario, nel concetto sono identiche a quelle di Schröder e Peirce; differiscono da quelle di Boole solo in ciò che il Boole considerò come idea primitiva l'eguaglianza fra due proposizioni, e come derivata la deduzione, che espresse mediante l'eguaglianza. Invece il Peirce considerò come idea fondamentale la deduzione, e ne derivò l'eguaglianza. (Schröder, *Algebra der Logik*, I, p. 133).

Per ben intendere la scrittura del Frege, si badi che nella deduzione



(cioè $a_x \supset_x b_x$), l'autore alcuna volta sopprime l'indice x e il segno $\smile$, scrivendola così , che allora equivale al nostro $a \supset b$. Ad esempio la formola del FREGE (pag. 240)



equivale alla nostra $b \supset a \,.\, a \supset b \,.\, \supset . \, a = b$ (Form., I, § 1 P18).

L'A. introduce in seguito una lunga serie di segni, di forma tale che occorre una speciale tipografia onde poterli riprodurre. A pag. 14 introduce un segno d'inversione; a pag. 18 un segno che corrisponde all'incirca all' ι del Formulario. Questi segni sono spiegati col linguaggio ordinario. I segni successivi sono definiti colla scrittura simbolica.

L'A. non ha alcun segno esattamente corrispondente all' ε del Formulario. Ne fa le veci un segno speciale che lega la variabile colla funzione (pag. 53).

Fra i due sistemi havvi pure qualche differenza nell'uso delle lettere variabili.

Nel Formulario, le lettere variabili a, b, ... x, y, z rappresentano enti qualunque, ad es. proposizioni, classi, segni di funzione, numeri delle varie specie, punti, rette, ecc., senza limitazione alcuna; e volta per volta si deve dire che cosa si vuole indicare con una lettera variabile (vedi *Introduction au Form.*, § 13).

Il FREGE invece usa lettere greche, latine e tedesche, maiuscole e minuscole; e le sceglie in modo che la forma della lettera indichi già la natura dell'ente che esso rappresenta. Così le lettere f, g, h, sotto le loro varie forme, non stanno per indicare enti qualunque, ma bensì delle caratteristiche di funzioni (§ 19). E se questa convenzione pare porti del vantaggio, essa presenta l'inconveniente che dovendola applicare a più teorie distinte, si dovranno introdurre tante forme di lettere quanti sono gli enti che si considerano. Inoltre il non dire in ogni caso che cosa rappresenti ogni singola lettera produce oscurità, e anche equivoci. Ad es. la prop. 126 dell'A. scritta coi simboli dell'algebra è

$$0 \leqq a,$$

la quale così isolata non ha senso preciso. Occorre dire esplicitamente che a è un numero intero e positivo o nullo, e scrivere

$$a \varepsilon N_0 \,.\, \supset . \, 0 \leqq a,$$

poichè non di necessità la lettera a è riservata ad indicare degli N_0. Anche l'Autore ne fa i più svariati usi.

Adunque, per avere una notazione completa, bisogna dire, o coi termini del linguaggio comune, o in simboli, il significato delle lettere; e se non si vuole usare il linguaggio comune, bisogna dirlo esplicitamente in simboli. Quindi la necessità dei nomi di classi (N, Q, q, q', ecc.) e del segno ε, o notazione equivalente, per unire l'individuo alla classe. Il che non impedisce che convenga, per facilitare la memoria, usare a preferenza certe lettere per indicare elementi variabili di certe classi.

Il nostro A. si occupa diffusamente delle regole di ragionamento, che spiega col linguaggio ordinario. Traducendole in simboli si hanno identità logiche tutte contenute nella parte I del Formulario. L'A. dimostra queste regole col linguaggio comune. Ma queste dimostrazioni sono illusorie. Invero, siccome queste regole sono già le più semplici regole di ragionamento, per dimostrarle o si dovranno applicare queste regole stesse, o altre più complicate. In ogni caso si fa un giro vizioso. L'unico lavoro che si possa fare su queste regole di ragionamento si è di esaminare se una regola equivalga all'insieme di più altre; e così continuando questa decomposizione si arriverà al sistema di regole più semplici, che nel Formulario, parte I, si sono chiamate proposizioni primitive.

Daremo infine un rapido cenno del metodo seguito dall'A. per trattare il numero intero. Egli lo introduce come numero degli individui d'una classe; così ottiene ciò che il G. CANTOR chiamò *numero cardinale*, e che venne indicato dal D^r VIVANTI nel Formulario, parte VI, § 1 P1 e § 2 P1, col segno Nc. Così la prima proposizione dell'A. (pag. 70) equivale a

$$u, v \varepsilon K \,.\, f \varepsilon v \,f\, u \,.\, \bar{f} \varepsilon u \,f\, v \,.\, \supset . \, \mathrm{num}\, u = \mathrm{num}\, v \,.$$

Si confronti pure la *Rivista di Matematica*, anno 1891, pag. 258. Veramente nella scrittura dell'A. non veggo espressa l'ipotesi $u, v \,\varepsilon\, K$.

L'A. definisce lo 0, l'unità, e il successivo d'un numero con proposizioni identiche in sostanza a quelle del Formulario, parte V, § 1 P1-3.

L'infinito che egli considera (Endlos) è l'infinito numerabile, indicato nel Formulario colla scrittura Nc'N.

Questo libro deve aver costato al suo Autore grande lavoro. La sua lettura è pure assai faticosa. Certe distinzioni sono difficili ad afferrarsi, poichè spesso due termini tedeschi, fra cui l'A. fa differenza, hanno nei dizionari per corrispondente lo stesso termine italiano.

Sarebbe ora desiderabile che l'A. applicasse la sua ideografia a trattare molte parti della Matematica. Allora le formole che presentano ancora qualche oscurità, si dovranno meglio previsare con opportune notazioni. Queste notazioni stesse, che ora sono assai complicate, verrebbero semplificandosi. Ne verrà così necessariamente che le varie ideografie che si possono progettare, ove siano egualmente atte a rappresentare tutte le proposizioni, devono finire a coincidere fra loro, salvo al più la forma dei segni adottati.

G. PEANO.

Opere ricevute.

A. FAVARO. — *Lezioni di Geometria projettiva*. Terza edizione, Padova 1895, pag. X+260; L. 5.

FRIEDRICH ENGEL - PAUL STÄCKEL. — *Die Theorie der Parallellinien von Euclid bis auf Gauss*. Leipzig 1895, pag. X+325.

G. PESCI. — *Trattato elementare di Trigonometria piana e sferica*. Livorno 1895, pag. XI+313; prezzo L. 4.

— *Appendice al trattato elementare, ecc.*, id. id., pag. 80; prezzo L. 1.

A. DEMOULIN. — *Mémoire sur l'application d'une méthode vectorielle à l'étude de divers systémes de droites*. Bruxelles-Paris, 1894, pag. VII+118.

P. L. TCHEBICHEF. — *Teoria delle congruenze*, traduzione di Iginia Massarini. Roma, Lœscher, 1895, pag. XVI+295; prezzo L. 6.

G. PAPELIER. — *Leçons sur les coordonnées tangentielles*. Seconde partie, *Géométrie dans l'espace*. Paris, Nony, 1895, pag. 358.

N. JADANZA. — *Elementi di Geodesia*, 4ª edizione. Torino 1895, pag. 615 (litografato).

Contribuzione al fondamento della Teoria degli insiemi transfiniti

di GEORG CANTOR *in Halle a/S.*

ARTICOLO PRIMO (*)

« Hypotheses non fingo ».

« Neque enim leges intellectui aut rebus damus ad arbitrium nostrum, sed tamquam scribae fideles ab ipsius naturae voce latas et prolatas excipimus et describimus ».

« Veniet tempus, quo ista quae nunc latent, in lucem dies extrahat et longioris aevi diligentia ».

§ 1.

La nozione di potenza o il numero cardinale.

Per « *insieme* » (Menge) noi intendiamo ogni riunione M in un tutto di determinati e ben distinti oggetti m dati dai nostri sensi o dal nostro pensiero (che son detti gli elementi di M). Ciò noi esprimiamo in segni con:

(1) $$M = \{m\}.$$

La riunione in un solo di più insiemi $M, N, P, \ldots$, che non hanno elementi comuni, è da noi rappresentata con

(2) $$(M, N, P, \ldots).$$

Gli elementi di questo insieme sono adunque gli elementi di M, di N, di P, ecc. presi insieme.

« *Parte* » o « *insieme parziale* » d'un insieme M chiamiamo ogni *altro* insieme M_1, i cui elementi sono ad un tempo elementi di M,

(*) Dai *Mathematische Annalen*, Bd. XLVI, pp. 481-512; traduzione di F. GERBALDI.

Se M_2 è una parte di M_1 ed M_1 una parte di M, è anche M_2 una parte di M.

Ad ogni insieme spetta una determinata « *potenza* » (Mächtigkeit), che noi chiamiamo anche il suo « *numero cardinale* ».

Potenza o numero cardinale di M chiamiamo quell'idea generale, che per mezzo della nostra attiva facoltà di pensare si deduce dallo insieme M, facendo astrazione dalla natura dei suoi diversi elementi e dall'ordine con cui vien dato. Il risultato di questo doppio atto di astrazione, il numero cardinale o la potenza di M, viene da noi indicato con

$$\overline{\overline{M}}. \tag{3}$$

Siccome da ogni singolo elemento m, quando si fa astrazione dalla sua natura, nasce un'*unità*, così il numero cardinale $\overline{\overline{M}}$ è esso stesso un determinato insieme costituito di pure unità, che ha esistenza come imagine intellettuale o proiezione nel nostro animo dell'insieme dato M.

Diciamo equivalenti due insiemi M ed N e denotiamo ciò con

$$M \sim N \text{ ovvero } N \sim M, \tag{4}$$

quando è possibile con una legge metterli in una siffatta reciproca relazione, che ad ogni elemento di uno di essi corrisponda uno ed un solo elemento dell'altro. Ad ogni parte M_1 di M corrisponde allora una determinata equivalente parte N_1 di N ed inversamente.

Avendosi una tal legge per riferire tra loro due insiemi equivalenti, essa si può in varie maniere modificare (escluso il caso che ciascuno degli insiemi consti di un solo elemento). In particolare si può sempre fare in modo che ad un determinato elemento m_0 di M corrisponda un elemento dato qualsiasi n_0 di N. Infatti, se gli elementi m_0 ed n_0 già non si corrispondono nella legge iniziale, ma all'elemento m_0 di M corrisponde l'elemento n_1 di N, ed all'elemento n_0 di N l'elemento m_1 di M, basta assumere come legge modificata quella per cui diventano elementi corrispondenti dei due insiemi m_0 ed n_0, e così pure m_1 ed n_1, e per tutti gli altri elementi si conserva la primitiva legge; a questo modo si ottiene lo scopo voluto.

Ogni insieme è equivalente a sè stesso:

$$M \sim M. \tag{5}$$

Se due insiemi sono equivalenti ad un terzo, essi sono anche equivalenti tra loro:

$$\text{da } M \sim P \text{ e } N \sim P \text{ segue } M \sim N. \tag{6}$$

È di fondamentale importanza questo che *due insiemi M ed N hanno lo stesso numero cardinale allora e solo allora quando essi sono equivalenti:*

$$\text{da } M \sim N \text{ segue } \overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}, \tag{7}$$

e

$$\text{da } \overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}} \text{ segue } M \sim N. \tag{8}$$

La equivalenza degli insiemi è dunque il criterio necessario e sufficiente per l'eguaglianza dei loro numeri cardinali.

Infatti per la definizione data della potenza il numero cardinale $\overline{\overline{M}}$ rimane invariato, quando in luogo di un elemento, o anche in luogo di più ed eziandio di tutti gli elementi m di M si sostituisce un altro oggetto, uno per elemento. Ora, se $M \sim N$, si può stabilire una legge tale che M ed N siano reciprocamente ed univocamente riferiti tra loro; corrisponda per essa all'elemento m di M l'elemento n di N. Noi possiamo allora in luogo di ogni elemento m di M pensare sostituito il corrispondente elemento n di N, e così M si trasforma in N senza alterazione del numero cardinale; si ha adunque

$$\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}.$$

Il teorema inverso si deduce dall'osservazione che tra gli elementi di M e le varie unità del suo numero cardinale $\overline{\overline{M}}$ sussiste una relazione reciprocamente univoca; perchè, come vedemmo, $\overline{\overline{M}}$ vien fuori in certa maniera da M, col dedurre da ogni elemento m di M una determinata unità di $\overline{\overline{M}}$; quindi possiamo dire che

$$M \sim \overline{\overline{M}}. \tag{9}$$

Similmente è $N \sim \overline{\overline{N}}$. Dunque, se $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$, segue dalla (6) $M \sim N$.

Rileviamo ancora il teorema seguente, che è conseguenza immediata della nozione dell'equivalenza:

Se $M, N, P, \ldots$ sono insiemi, che non hanno elementi comuni, ed $M', N', P', \ldots$ *sono insiemi a quelli corrispondenti, ancora senza elementi comuni, e se si ha*

$$M \sim M', \quad N \sim N', \quad P \sim P', \ldots,$$

si ha pur sempre

$$(M, N, P, \ldots) \sim (M', N', P', \ldots).$$

§ 2.
Il "maggiore„ ed il "minore„ per le potenze.

Se per due insiemi M ed N coi numeri cardinali $a = \overline{\overline{M}}$ e $b = \overline{\overline{N}}$ sono soddisfatte le due condizioni:

1) *non esiste alcuna parte di M, che sia equivalente ad N,*
2) *esiste una parte N_1 di N tale che $N_1 \sim M$,*

è anzitutto evidente che esse restano soddisfatte, quando M ed N si sostituiscano con due insiemi a quelli equivalenti M' ed N'; *quelle condizioni esprimono adunque una determinata relazione che passa fra i numeri cardinali a e b.*

Inoltre *è esclusa l'equivalenza di M ed N, e però l'eguaglianza di a e b*; perchè, se fosse $M \sim N$, essendo $N_1 \sim M$, sarebbe anche $N_1 \sim N$, ed in virtù di $M \sim N$ dovrebbe anche esistere una parte M_1 di M tale che $M_1 \sim M$, e quindi sarebbe anche $M_1 \sim N$, ciò che contradice alla condizione 1).

In terzo luogo *la relazione di a a b è tale, che è resa impossibile la stessa relazione di b ad a*; perchè, se in 1) e 2) si scambiano fra loro M ed N, ne nascono altre due condizioni che sono con quelle in contradizione.

Noi esprimiamo la relazione di a a b caratterizzata dalle 1) e 2) *col dire che: a è minore di b, ovvero anche b è maggiore di a;* in segni:

(1) $$a < b \quad \text{ovvero} \quad b > a.$$

Si dimostra facilmente, che

(2) $$\text{se } a < b,\ b < c, \text{ si ha } a < c.$$

Similmente segue senz'altro da quella definizione che *se P_1 è parte d'un insieme P, da $a < \overline{\overline{P_1}}$ segue sempre anche $a < \overline{\overline{P}}$, e da $\overline{\overline{P}} < b$ segue sempre anche $\overline{\overline{P_1}} < b$.*

Noi abbiamo visto che delle tre relazioni

$$a = b, \quad a < b, \quad a > b$$

ognuna esclude le altre due. Ma non è affatto evidente, ed a questo punto del nostro sviluppo a mala pena si potrebbe dimostrare, che *per due numeri cardinali qualunque a e b deve necessariamente aver luogo una di quelle tre relazioni* (*).

§ 3.
L'addizione e moltiplicazione dei numeri cardinali.

La riunione di due insiemi M ed N, che non hanno elementi comuni fu denotata al § 1, (2) con (M, N). Noi lo diciamo « *insieme somma* (Vereinigungsmenge) *di M ed N* ».

Se M' ed N' sono altri due insiemi senza elementi comuni, ed è $M \sim M'$, ed $N \sim N'$, vedemmo che anche

$$(M, N) \sim (M', N').$$

Quindi segue che il numero cardinale di (M, N) dipende soltanto dai numeri cardinali $\overline{\overline{M}} = a$ e $\overline{\overline{N}} = b$.

Ciò conduce alla definizione della somma di a e b, che si ha ponendo

(1) $$a + b = \overline{\overline{(M, N)}}.$$

Siccome nella nozione di potenza si fa astrazione dall'ordine degli elementi, così segue senz'altro:

(2) $$a + b = b + a,$$

(*) Più tardi, appena avremo dato uno sguardo alla successione crescente dei numeri cardinali transfiniti, ed avremo acquistato cognizione della loro connessione, risulterà la verità del teorema:

A. « *Se a e b sono due numeri cardinali qualunque, si ha: o $a = b$, o $a < b$, o $a > b$* ».

Da questo teorema si possono molto semplicemente dedurre i seguenti, dei quali tuttavia non dovremo presentemente fare alcun uso:

B. « Se due insiemi M ed N sono cosifatti che M è equivalente ad una parte N_1 di N, ed N è equivalente ad una parte M_1 di M, sono anche M ed N equivalenti ».

C. « Se M_1 è una parte d'un insieme M, M_2 una parte dell'insieme M_1, e se M ed M_2 sono equivalenti, anche M_1 è equivalente agli insiemi M ed M_2 ».

D. « Se per due insiemi M ed N è soddisfatta la condizione che N non è equivalente nè ad M stesso nè ad una parte di M, vi è una parte N_1 di N che è equivalente ad M ».

E. « Se due insiemi M ed N non sono equivalenti, e vi è una parte N_1 di N che è equivalente ad M, non vi è alcuna parte di M equivalente ad N ».

e per tre numeri cardinali a, b, c:

(3) $$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Passiamo alla moltiplicazione. Ogni elemento m di un insieme M si può combinare con ogni elemento n di un altro insieme N in un nuovo elemento (m, n); per l'insieme di tutte queste combinazioni (m, n) adottiamo la notazione $(M . N)$, e lo chiamiamo « *insieme prodotto* (Verbindungsmenge) *di* M *ed* N ». Si ha adunque

(4) $$(M . N) = \{(m, n)\}.$$

È facile persuadersi che anche la potenza di $(M . N)$ dipende solo dalle potenze $\overline{\overline{M}} = a$, $\overline{\overline{N}} = b$; perchè se si sostituiscono agli insiemi M ed N insiemi ad essi equivalenti

$$M' = \{m'\} \text{ ed } N' = \{n'\},$$

e si considerano m, m' come elementi corrispondenti e così pure n, n', l'insieme

$$(M' . N') = \{(m', n')\}$$

viene messo in relazione reciprocamente univoca a $(M . N)$, quando si riguardino come elementi corrispondenti (m, n) e (m', n'); si ha adunque

(5) $$(M' . N') \sim (M . N).$$

Ora noi definiamo il prodotto $a . b$ per mezzo dell'equazione

(6) $$a . b = \overline{\overline{(M . N)}}.$$

Un insieme col numero cardinale $a . b$ si può ancora costruire con due insiemi di numeri cardinali a e b colla regola seguente: si parta dall'insieme N ed in esso si sostituisca ad ogni elemento n un insieme $M_n \sim M$, indi si riuniscano in un tutto S gli elementi di tutti questi insiemi M_n; si vede facilmente che

(7) $$S \sim (M . N),$$

quindi

$$\overline{\overline{S}} = a . b.$$

Infatti, stabilita una legge qualunque per riferire tra loro i due insiemi equivalenti M ed M_n, si denoti con m_n l'elemento di M_n corrispondente all'elemento m di M, e si ha

(8) $$S = \{m_n\},$$

e perciò gli insiemi S ed $(M . N)$ si possono mettere in relazione reciproca e univoca, riguardando m_n e (m, n) come elementi corrispondenti.

Dalle nostre definizioni seguono facilmente i teoremi:

(9) $$a . b = b . a,$$

(10) $$a . (b . c) = (a . b) . c,$$

(11) $$a (b + c) = ab + ac,$$

perchè

$$(M . N) \sim (N . M),$$

$$(M . (N . P)) \sim ((M . N) . P),$$

$$(M . (N, P)) \sim ((M . N), (M . P)).$$

L'addizione e la moltiplicazione dei numeri cardinali soddisfano adunque alle leggi commutativa, associativa e distributiva.

§ 4.

Elevazione a potenza dei numeri cardinali.

Per un *coprimento* (Belegung) *dell'insieme* N *cogli elementi dell'insieme* M, o più semplicemente *coprimento di* N *con* M intendiamo una legge, colla quale ad ogni elemento n di N si congiunge un determinato elemento di M, potendo uno stesso elemento di M venire più volte impiegato. L'elemento di M congiunto con n è in certa maniera una funzione ad un sol valore di n e però si può rappresentare ad es. con $\mathfrak{f}(n)$, che diremo *funzione di ricoprimento*; il corrispondente coprimento di N si chiama $\mathfrak{f}(N)$.

Due coprimenti $\mathfrak{f}_1(N)$ e $\mathfrak{f}_2(N)$ si dicono allora e solo allora eguali, quando *per tutti gli elementi* n *di* N è soddisfatta la equazione

(1) $$\mathfrak{f}_1(n) = \mathfrak{f}_2(n),$$

di guisa che se anche per un solo particolare elemento $n = n_0$ questa equazione non sussiste, $\mathfrak{f}_1(N)$ e $\mathfrak{f}_2(N)$ sono da considerarsi come coprimenti diversi di N.

A mo' d'esempio, essendo m_0 un particolare elemento di M, può stabilirsi che per tutti gli n sia

$$\mathfrak{f}(n) = m_0;$$

questa legge costituisce un particolare coprimento di N con M.

Un'altra sorta di coprimento si ottiene, se m_0, m_1 sono due particolari e diversi elementi di M, ed n_0 un particolare elemento di N, quando si pone:

$$f(n_0) = m_0\,,$$
$$f(n) = m_1$$

per tutti gli n diversi da n_0.

La totalità dei diversi coprimenti di N con M forma un determinato insieme cogli elementi $f(N)$, che noi chiamiamo *l'insieme dei coprimenti di N con M* e denotiamo con $(N \mid M)$. Si ha dunque:

(2) $$(N \mid M) = \{f(N)\}.$$

Se $M \sim M'$ e $N \sim N'$, si vede facilmente che anche

(3) $$(N \mid M) \sim (N' \mid M').$$

Il numero cardinale di $(N \mid M)$ dipende dunque soltanto dai numeri cardinali $\overline{\overline{M}} = a$ e $\overline{\overline{N}} = b$; esso ci serve per definire la potenza a^b:

(4) $$a^b = \overline{\overline{(N \mid M)}}.$$

Per tre insiemi qualunque M, N, P si dimostrano facilmente i teoremi

(5) $$((N \mid M)\,.\,(P \mid M)) \sim ((N\,.\,P) \mid M)\,,$$
(6) $$((P \mid M)\,.\,(P \mid N)) \sim (P \mid (M\,.\,N))\,, \quad ((P.N) \mid M)$$
(7) $$(P \mid (N \mid M)) \sim ((P\,.\,N) \mid M) \quad (P \mid (M.N))$$

dai quali, se si pone $\overline{\overline{P}} = c$, in virtù della (4) e del § 3, si deducono i teoremi seguenti per tre numeri cardinali qualunque a, b, c:

(8) $$a^b\,.\,a^c = a^{b+c}\,,$$
(9) $$a^c\,.\,b^c = (a\,.\,b)^c\,,$$
(10) $$(a^b)^c = a^{b\,.\,c} \text{ (*)}.$$

(*) Quanto importanti e feconde siano queste semplici formole, estese alle potenze, si riconosce dal seguente esempio:

Denotiamo con o la potenza del continuo lineare X (cioè dell'insieme X di tutti i numeri reali x che sono $\geqq 0$ e < 1. Si stabilisce facilmente che essa si può rappresentare colla formola

(11) $$o = 2^{\aleph_0}$$

dove $\aleph_0$ ha il significato che viene spiegato al § 6.

§ 5.

I numeri cardinali finiti.

Vogliamo anzitutto mostrare, come i principî esposti, su cui baseremo più tardi la teoria dei numeri cardinali infiniti attuali o transfiniti, offrano anche il fondamento più naturale, più breve e più rigoroso della teoria dei numeri finiti.

Ad un unico oggetto e_0, volendolo considerare come un insieme $E_0 = (e_0)$, corrisponde come numero cardinale ciò che noi diciamo « uno » e denotiamo con 1; abbiamo:

(1) $$1 = \overline{\overline{E_0}}\,.$$

Infatti per la (4) $2^{\aleph_0}$ è niente altro che la potenza di tutte le rappresentazioni dei numeri x nel sistema duale

(12) $$x = \frac{f(1)}{1} + \frac{f(2)}{2^2} + \ldots + \frac{f(\nu)}{2^\nu} + \ldots$$

(dove $f(\nu) = 0$ oppure 1).

Se qui osserviamo che ogni numero x vien rappresentato in un sol modo, fatta eccezione dei numeri $x = \frac{2\nu+1}{2^\mu} < 1$, i quali vengono rappresentati in due modi, denotando con $\{s_\nu\}$ la totalità « numerabile » di questi ultimi, abbiamo anzitutto

$$2^{\aleph_0} = \overline{\overline{(\{s_\nu\}, X)}}\,.$$

Ora si sopprima da X un insieme qualunque « numerabile » $\{t_\nu\}$ e si denoti il resto con X_1, si avrà:

$$X = (\{t_\nu\}, X_1) = (\{t_{2\nu-1}\}, \{t_{2\nu}\}, X_1)\,,$$
$$(\{s_\nu\}, X) = (\{s_\nu\}, \{t_\nu\}, X_1)\,,$$
$$\{t_{2\nu-1}\} \sim \{s_\nu\}, \qquad \{t_{2\nu}\} \sim \{t_\nu\}, \qquad X_1 \sim X_1\,,$$

quindi

$$X \sim (\{s_\nu\}, X)\,,$$

dunque (§ 1)

$$2^{\aleph_0} = \overline{\overline{X}} = o\,.$$

Aggiungiamo ora ad E_0 un altro oggetto e_1, l'insieme somma chiamisi E_1, per guisa che

(2) $$E_1 = (E_0, e_1) = (e_0, e_1).$$

Il numero cardinale di E_1 dicesi « due » e si rappresenta con 2:

(3) $$2 = \overline{\overline{E}}_1 .$$

Aggiungendo nuovi elementi noi otteniamo la serie degli insiemi

$$E_2 = (E_1, e_2), \quad E_3 = (E_2, e_3), \ldots,$$

che ci forniscono in successione illimitata e l'un dopo l'altro i rimanenti *numeri cardinali finiti* rappresentati con 3, 4, 5, ... L'impiego che qui facciamo degli stessi numeri come indici, è giustificato da ciò che un numero viene a questo modo adoperato soltanto dopo che esso è stato definito come numero cardinale. Se si intende che $\nu - 1$ denoti il numero che in quella serie precede immediatamente il numero ν, abbiamo

(4) $$\nu = \overline{\overline{E}}_{\nu-1},$$

(5) $$E_\nu = (E_{\nu-1}, e_\nu) = (e_0, e_1, \ldots, e_\nu).$$

Dalla (11), quadrando, per la (6) del § 6, segue

$$o \cdot o = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = o,$$

e quindi continuando a moltiplicare per o

(13) $$o^\nu = o,$$

dove ν è un numero cardinale finito qualunque.

Innalzando ambi i membri della (11) alla potenza $\aleph_0$ si ottiene

$$o^{\aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0},$$

e, siccome per la (8) del § 6 $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$, così si ha

(14) $$o^{\aleph_0} = o.$$

Le formole (13) e (14) non hanno altro significato che questo: « Il continuo ν-dimensionale e così pure il continuo $\aleph_0$-dimensionale hanno la potenza del continuo unidimensionale ». E così *in queste poche righe, colle formole fondamentali del calcolo dei numeri cardinali* abbiamo in modo puramente algebrico ricavato *tutto il contenuto* del lavoro consegnato nel T. 84 del *Crelle's Journal,* pag. 242.

Dalla definizione di somma del § 3 segue:

(6) $$\overline{\overline{E}}_\nu = \overline{\overline{E}}_{\nu-1} + 1,$$

cioè ogni numero cardinale finito (escluso 1) è la somma di quello che immediatamente lo precede e di 1.

Per i nostri sviluppi sono fondamentali i seguenti tre teoremi:

A. « *I termini della serie illimitata dei numeri cardinali finiti*

$$1, 2, 3, \ldots \nu, \ldots$$

sono tutti fra loro diversi (cioè non è soddisfatta la condizione di equivalenza per i corrispondenti insiemi stabilita al § 1) ».

B. « *Ognuno di questi numeri* ν *è maggiore di quelli che lo precedono e minore di quelli che lo seguono* (§ 2) ».

C. « *Non esiste alcun numero cardinale che rispetto alla sua grandezza stia tra due termini successivi* ν *e* $\nu + 1$ (§ 2) ».

Le dimostrazioni di questi teoremi si fondano sui seguenti D ed E, di cui perciò ci occuperemo primieramente.

D. « *Se* M *è un insieme cosifatto che non ha potenza eguale a quella di alcuno dei suoi insiemi parziali, anche l'insieme* (M, e), *che nasce da* M *aggiungendovi un unico elemento* e, *ha la stessa proprietà di non avere potenza uguale a quella di alcuno dei suoi insiemi parziali* ».

E. « *Se* N *è un insieme col numero cardinale finito* ν, *ed* N_1 *uno qualunque degli insiemi parziali di* N, *il numero cardinale di* N_1 *è uguale ad uno dei numeri precedenti* $1, 2, 3, \ldots \nu - 1$ ».

Dimostrazione di D. — Supponiamo che l'insieme (M, e) abbia potenza uguale a quella di uno dei suoi insiemi parziali, che chiameremo N; due casi sono a distinguersi, che conducono entrambi all'assurdo:

1) L'insieme N contiene e come elemento. Sia $N = (M_1, e)$; allora M_1 è una parte di M, perchè N è una parte di (M, e). Come vedemmo al § 1, la legge di corrispondenza dei due insiemi equivalenti (M, e) e (M_1, e) si può modificare in guisa che all'elemento e dell'uno corrisponda lo stesso elemento e dell'altro; ma allora anche M ed M_1 risultano riferiti tra loro in modo reciprocamente univoco. Ora ciò contradice all'ipotesi che M non ha la stessa potenza della sua parte M_1.

2) L'insieme N non contiene e come elemento. Allora N o è M o è una parte di M. Supponiamo che per la legge di corrispondenza posta a fondamento tra (M, e) ed N all'elemento e del primo corrisponda l'elemento f del secondo. Sia $N = (M_1, f)$; allora sarà contemporaneamente l'insieme M posto in relazione reciprocamente univoca con M_1;

ma M_1 essendo parte di N è in ogni caso parte di M. Quindi anche qui M sarebbe equivalente ad una sua parte, ciò che è contrario all'ipotesi.

Dimostrazione di E. — Supporremo il teorema vero fino a un certo ν, indi concluderemo che esso sussiste per il successivo $\nu+1$.

Per insieme col numero cardinale $\nu+1$ assumiamo $E_\nu = (e_0, e_1, \ldots e_\nu)$; se il teorema per questo è vero, segue senz'altro (§ 1) la sua verità anche per ogni altro insieme collo stesso numero cardinale $\nu+1$. Sia E' una parte qualunque di E_ν; noi distinguiamo i seguenti casi:

1) E' non contiene e_ν come elemento; allora E' è o $E_{\nu-1}$ o una parte di $E_{\nu-1}$, e perciò ha per numero cardinale o ν o uno dei numeri $1, 2, 3, \ldots \nu-1$, perchè noi supponiamo già vero il nostro teorema per l'insieme $E_{\nu-1}$ col numero cardinale ν.

2) E' consta dell'unico elemento e_ν; allora è $\overline{\overline{E'}} = 1$.

3) E' consta di e_ν e di un insieme E'', cioè $E' = (E'', e_\nu)$; E'' è una parte di $E_{\nu-1}$ e quindi per quanto si è supposto ha per numero cardinale uno dei numeri $1, 2, 3, \ldots \nu-1$; ma si ha $\overline{\overline{E'}} = \overline{\overline{E''}} + 1$, dunque E' ha per numero cardinale uno dei numeri $2, 3, \ldots \nu$.

Dimostrazione di A. — Ognuno degli insiemi da noi denotati con E_ν ha la proprietà di non essere equivalente ad alcuno dei suoi insiemi parziali. Perchè se si suppone che ciò sia vero per un certo ν, segue dal teorema D che lo stesso vale per il successivo $\nu+1$. Ora per $\nu=1$ si riconosce immediatamente che l'insieme $E_1 = (e_0, e_1)$ non è equivalente ad alcuno dei suoi insiemi parziali che in questo caso sono (e_0) ed (e_1).

Consideriamo ora due numeri qualunque μ e ν della serie $1, 2, 3, \ldots$ e sia μ il precedente e ν il seguente; sarà $E_{\mu-1}$ una parte di $E_{\nu-1}$; perciò $E_{\mu-1}$ e $E_{\nu-1}$ non sono equivalenti; quindi non sono uguali i corrispondenti numeri cardinali $\mu = \overline{\overline{E}}_{\mu-1}$ e $\nu = \overline{\overline{E}}_{\nu-1}$.

Dimostrazione di B. — Se dei due numeri cardinali finiti μ e ν è μ il precedente e ν il seguente, si ha $\mu < \nu$. Infatti consideriamo i due insiemi $M = E_{\mu-1}$ e $N = E_{\nu-1}$, per essi sono soddisfatte entrambe le condizioni indicate al § 2 per essere $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{N}}$. La condizione 1) è soddisfatta, perchè per il teorema E un insieme parziale di $M = E_{\mu-1}$ può avere soltanto uno dei numeri cardinali $1, 2, 3, \ldots \mu-1$, e quindi per il teorema A non può essere equivalente allo insieme $N = E_{\nu-1}$. La condizione 2) è soddisfatta, perchè qui M stesso è una parte di N.

Dimostrazione di C. — Sia a un numero cardinale minore di $\nu+1$. Per la condizione 2) del § 2 esiste un insieme parziale di E_ν col numero cardinale a. Per il teorema E un insieme parziale di E_ν può avere soltanto uno dei numeri cardinali $1, 2, 3, \ldots \nu$. Quindi a è uguale

ad uno dei numeri $1, 2, 3, \ldots \nu$. Per il teorema B nessuno di questi è maggiore di ν. Per conseguenza non vi è alcun numero cardinale a che sia minore di $\nu+1$ e maggiore di ν.

Per il seguito ha importanza il seguente teorema:

F. « *Sia K un insieme qualunque costituito di numeri cardinali finiti e diversi; tra questi ve ne è uno $\varkappa_1$, che è minore degli altri, e perciò è il minore di tutti* ».

Dimostrazione. — L'insieme K o contiene il numero 1, e allora questo è il minimo, $\varkappa_1 = 1$; ovvero non lo contiene. In questo secondo caso sia J l'insieme di *tutti* quei numeri cardinali della nostra serie $1, 2, 3, \ldots$ che sono minori di quelli che si trovano in K. Se un numero ν appartiene a J, vi appartengono anche tutti i numeri $< \nu$. Ma J deve avere un elemento ν_1 tale che $\nu_1 + 1$ e quindi anche tutti i numeri maggiori di ν_1 non appartengono a J, perchè altrimenti J abbraccierebbe la totalità dei numeri cardinali finiti, ciò che non è perchè in J non sono contenuti i numeri appartenenti a K. Dunque J è niente altro che $(1, 2, 3, \ldots \nu_1)$. Il numero $\nu_1 + 1 = \varkappa_1$ è necessariamente un elemento di K e minore degli altri.

Al teorema F si connette il seguente:

G. « *Ogni insieme $K = \{\varkappa\}$ costituito di numeri cardinali finiti e diversi, si può mettere sotto la forma di serie*

$$K = (\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots)$$

essendo

$$\varkappa_1 < \varkappa_2 < \varkappa_3 \ldots \text{ ».}$$

§ 6.

Il più piccolo numero cardinale transfinito alef-zero.

Gli insiemi con numero cardinale finito diconsi « *insiemi finiti* »; tutti gli altri li vogliamo chiamare « *insiemi transfiniti* » ed i numeri cardinali che ad essi corrispondono « *numeri cardinali transfiniti* ».

La *totalità dei numeri cardinali finiti* ν ci offre un primo esempio d'un insieme transfinito; chiameremo *alef-zero*, in segni $\aleph_0$, il numero cardinale che gli corrisponde (§ 1); definiamo dunque

$$\aleph_0 = \overline{\overline{\{\nu\}}}. \tag{1}$$

Che $\aleph_0$ sia un *numero transfinito*, cioè che *non sia uguale ad alcun numero finito* μ, segue dal semplice fatto, che, se allo insieme $\{\nu\}$ si aggiunge un nuovo elemento e_0, l'insieme somma $(\{\nu\}, e_0)$ è equivalente al primitivo $\{\nu\}$. Infatti tra i due si può stabilire una relazione reciprocamente univoca, per la quale all'elemento e_0 si fa corrispondere l'elemento 1 del secondo, e all'elemento ν del primo l'elemento $\nu+1$ del secondo. Perciò abbiamo per il § 3:

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0 . \tag{2}$$

Ma nel § 5 si è mostrato che $\mu+1$ è sempre diverso da μ, quindi $\aleph_0$ non è uguale ad alcun numero finito μ.

Il numero $\aleph_0$ è maggiore di qualunque numero finito μ:

$$\aleph_0 > \mu . \tag{3}$$

Ciò segue, in virtù di quanto fu stabilito al § 3, da ciò che $\mu = \overline{\overline{(1, 2, 3, \dots \mu)}}$, niuna parte dell'insieme $(1, 2, 3, \dots \mu)$ è equivalente allo insieme $\{\nu\}$, e $(1, 2, 3, \dots \mu)$ è esso stesso una parte di $\{\nu\}$.

Inoltre $\aleph_0$ *è il più piccolo numero cardinale transfinito.* Se a è un numero cardinale transfinito qualunque diverso da $\aleph_0$, si ha

$$\aleph_0 < a. \tag{4}$$

Ciò è basato sui seguenti teoremi:

A. « *Ogni insieme transfinito T ha insiemi parziali il cui numero cardinale è $\aleph_0$* ».

Dimostrazione. — Se con una legge qualunque si sopprime da T un numero finito di elementi $t_1, t_2, \dots t_{\nu-1}$, vi è sempre la possibilità di levare da esso un altro elemento t_ν. L'insieme $\{t_\nu\}$ dove ν denota un numero cardinale finito qualunque è un insieme parziale di T il cui numero cardinale è $\aleph_0$, perchè $\{t_\nu\} \sim \{\nu\}$ (§ 1).

B. « *Se S è un insieme transfinito col numero cardinale $\aleph_0$, e S_1 un qualunque insieme transfinito parte di S, sarà anche $\overline{\overline{S_1}} = \aleph_0$* ».

Dimostrazione. — Si suppone che sia $S \sim \{\nu\}$; stabilita una legge di corrispondenza tra questi due insiemi, sia s_ν quell'elemento di S che corrisponde all'elemento ν di $\{\nu\}$, si ha

$$S = \{s_\nu\} .$$

L'insieme S_1 parte di S consta di certi elementi $s_\varkappa$ di S, e la totalità dei numeri $\varkappa$ forma un insieme transfinito K parte di $\{\nu\}$.

Per il teorema G del § 5, l'insieme K si può mettere sotto forma di serie

$$K = \{\varkappa_\nu\} ,$$

dove

$$\varkappa_\nu < \varkappa_{\nu+1} ,$$

quindi è anche

$$S_1 = \{s_{\varkappa_\nu}\} .$$

Di qui segue che $S_1 \sim S$, e per conseguenza $\overline{\overline{S_1}} = \aleph_0$.

Da A e B, in virtù del § 2, si deduce la formola (4).

Dalla (2), aggiungendo 1 ad ambi i membri, si ha:

$$\aleph_0 + 2 = \aleph_0 + 1 = \aleph_0 ,$$

e ripetendo la stessa osservazione:

$$\aleph_0 + \nu = \aleph_0 . \tag{5}$$

Ma noi abbiamo ancora

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 . \tag{6}$$

Infatti, per la (1) del § 3, $\aleph_0 + \aleph_0$ è il numero cardinale $\overline{\overline{(\{a_\nu\}, \{b_\nu\})}}$, essendo

$$\overline{\overline{\{a_\nu\}}} = \overline{\overline{\{b_\nu\}}} = \aleph_0 .$$

Ora si ha evidentemente

$$\{\nu\} = (\{2\nu-1\}, \{2\nu\}) ,$$

$$(\{2\nu-1\}, \{2\nu\}) \sim (\{a_\nu\}, \{b_\nu\}) ,$$

dunque

$$\overline{\overline{(\{a_\nu\}, \{b_\nu\})}} = \overline{\overline{\{\nu\}}} = \aleph_0 .$$

L'equazione (6) può anche scriversi:

$$\aleph_0 \cdot 2 = \aleph_0 ,$$

ed, aggiungendo ad ambi i membri ripetutamente $\aleph_0$, si deduce

$$\aleph_0 \cdot \nu = \nu \cdot \aleph_0 = \aleph_0 . \tag{7}$$

Ora noi abbiamo ancora

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0 . \tag{8}$$

Dimostrazione. — Per la (6) del § 3, $\aleph_0 \cdot \aleph_0$ è il numero cardinale che spetta all'insieme prodotto

$$\{(\mu, \nu)\} ,$$

dove μ e ν sono due qualunque, fra loro indipendenti, numeri cardinali finiti. Ora, se anche λ rappresenta un qualunque numero cardinale finito (per guisa che $\{\lambda\}$, $\{\mu\}$ e $\{\nu\}$ sono tre notazioni diverse per lo stesso insieme dei numeri cardinali finiti), noi dobbiamo dimostrare che

$$\{(\mu, \nu)\} \sim \{\lambda\}.$$

Denotiamo $\mu + \nu$ con ρ; ρ prende tutti i valori numerici 2, 3, 4, ... ed in tutto vi sono $\rho - 1$ elementi (μ, ν), per cui $\mu + \nu = \rho$, che sono

$$(1, \rho-1),\ (2, \rho-2),\ \dots\ (\rho-1, 1).$$

In questa successione si ponga anzitutto $\rho = 2$ e si scriva l'unico elemento (1, 1); indi si ponga $\rho = 3$ e si scrivano i due elementi (1, 2), (2, 1); poi si scrivano i tre elementi per cui $\rho = 4$, ecc.; si otterranno così tutti gli elementi (μ, ν) disposti in una semplice successione:

$$(1, 1);\ (1, 2),\ (2, 1);\ (1, 3),\ (2, 2),\ (3, 1);\ (1, 4),\ (2, 3),\ \dots,$$

e precisamente avviene (come facilmente si vede) che l'elemento (μ, ν) si trova scritto al λ^{esimo} posto, essendo

$$\lambda = \mu + \frac{(\mu + \nu - 1)(\mu + \nu - 2)}{2}. \tag{9}$$

Ora λ assume ciascun valore 1, 2, 3, ... una volta sola; quindi per mezzo della (9) si ha una relazione reciprocamente univoca tra i due insiemi $\{\lambda\}$ e $\{\mu, \nu\}$.

Moltiplicando i due membri dell'equazione (8) per $\aleph_0$ si ottiene $\aleph_0^3 = \aleph_0^2 = \aleph_0$, e dopo una ripetuta moltiplicazione per $\aleph_0$ si ha per ogni numero cardinale finito ν l'equazione

$$\aleph_0^{\nu} = \aleph_0. \tag{10}$$

I teoremi E ed A del § 5 conducono al seguente teorema sugli insiemi finiti:

C. « *Ogni insieme finito E è cosifatto che esso non è equivalente ad alcuno dei suoi insiemi parziali* ».

A questo teorema fa riscontro il seguente per gli insiemi transfiniti:

D. « *Ogni insieme transfinito T è cosifatto, che esso ha degli insiemi parziali T_1, che gli sono equivalenti* ».

Dimostrazione. — Per il teorema A di questo paragrafo vi è un insieme parziale $S = \{t_\nu\}$ di T che ha il numero cardinale $\aleph_0$. Sia $T = (S, U)$, di guisa che U è composto di quelli elementi di T, che son diversi dagli elementi t_ν. Poniamo $S_1 = \{t_{\nu+1}\}$, $T_1 = (S_1, U)$, sarà T_1 un insieme parziale di T, e precisamente quello che si ottiene da T sopprimendo il solo elemento t_1. Siccome è $S \sim S_1$ (teorema B di questo paragrafo), ed $U \sim U$, così è eziandio (§ 1) $T \sim T_1$.

Questi teoremi C e D mettono nella maniera più evidente in luce la differenza essenziale tra gli insiemi finiti e gli infiniti, siccome fin dal 1877 ho indicato nel t. 84 del *Crelle's Journal*, pag. 242.

Dopo di aver introdotto il più piccolo numero cardinale transfinito $\aleph_0$ e di averne stabilite le più immediate proprietà, si presenta la questione dei numeri cardinali più elevati e della loro deduzione da $\aleph_0$.

Mostreremo che i numeri cardinali transfiniti si possono ordinare rispetto alla loro grandezza, ed in quest'ordine formano, come i numeri cardinali finiti, ma in un senso più esteso, un *insieme ben ordinato*.

Da $\aleph_0$ si deduce con una determinata legge il numero cardinale immediatamente maggiore $\aleph_1$, da questo colla stessa legge l'immediatamente maggiore $\aleph_2$ e così di seguito.

Ma anche la serie illimitata dei numeri cardinali

$$\aleph_0,\ \aleph_1,\ \aleph_2,\ \dots\ \aleph_\nu,\ \dots$$

non esaurisce l'idea dei numeri cardinali transfiniti. Si dimostrerà l'esistenza d'un numero cardinale, che denoteremo con $\aleph_\omega$ e che si presenta come l'immediatamente maggiore di tutti gli $\aleph_\nu$; da esso e nella stessa maniera come $\aleph_1$ da $\aleph_0$, se ne deduce uno immediatamente maggiore $\aleph_{\omega+1}$, e così si seguita senza fine.

Per ogni numero cardinale transfinito a ve ne è uno immediatamente maggiore che si deduce da esso secondo un'unica legge; ed anche per ogni insieme $\{a\}$ illimitatamente crescente e ben ordinato di numeri cardinali transfiniti ve ne è uno immediatamente maggiore, che se ne deduce con unica legge.

A stabilire rigorosamente questi risultati da noi trovati nel 1882 ed esposti sia in un opuscolo « Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig 1883 », sia nel Vol. XXI dei « Mathematische Annalen » noi ci serviamo dei così detti « *tipi d'ordine* » (Ordnungstypen), di cui dobbiamo anzitutto esporre le teorie nei paragrafi seguenti.

§ 7.

I tipi d'ordine di insiemi semplicemente ordinati.

Chiamiamo *semplicemente ordinato* un insieme M quando tra i suoi elementi m sussiste un determinato ordine di posto (Rangordnung), per cui considerando due elementi qualunque m_1 ed m_2 l'uno prende il posto *inferiore* e l'altro il posto *superiore*, e ciò in guisa tale che, se di tre elementi m_1, m_2 ed m_3 è per il posto m_1 inferiore a m_2 ed m_2 inferiore ad m_3, anche m_1 è per il posto inferiore ad m_3.

La relazione tra due elementi m_1 e m_2, per cui m_1 occupa il posto inferiore, ed m_2 il posto superiore, nell'assegnato ordine, sarà designato colle formole

(1) $$m_1 < m_2, \qquad m_2 > m_1.$$

Così ad esempio ogni punteggiata P assegnata su una retta infinita è un insieme semplicemente ordinato, se considerando due punti qualunque p_1 e p_2 di essa si attribuisce il posto inferiore a quello, la cui coordinata (dopo di avere fissata l'origine e la direzione positiva) è minore.

È chiaro che uno stesso insieme può essere « ordinato semplicemente » secondo le più svariate leggi. Prendiamo ad esempio l'insieme R di tutti i numeri razionali positivi $\frac{p}{q}$ (dove p e q sono interi primi fra loro), che sono maggiori di 0 e minori di 1; si ha anzitutto il suo ordine « naturale » che è quello rispetto alla grandezza. Essi si possono però ancora ordinare (ed in questo nuovo ordine denoteremo l'insieme con R_0) in guisa che di due numeri $\frac{p_1}{q_1}$ e $\frac{p_2}{q_2}$, per cui le somme $p_1 + q_1$ e $p_2 + q_2$ hanno valori diversi, abbia posto inferiore quello per cui la corrispondente somma è minore, ed in guisa che il più piccolo dei due numeri razionali sia quello di posto inferiore nel caso in cui $p_1 + q_1 = p_2 + q_2$. In questo ordine, corrispondendo ad uno stesso valore di $p + q$ un numero finito di numeri razionali diversi $\frac{p}{q}$, il nostro insieme ha evidentemente la forma:

$$R_0 = (r_1, r_2, \ldots, r_\nu, \ldots) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \ldots\right),$$

dove

$$r_\nu < r_{\nu+1}.$$

Dunque, ogniqualvolta parliamo di un insieme M *semplicemente ordinato* noi imaginiamo stabilito un determinato ordine di posto per i suoi elementi nel senso sopra dichiarato.

Esistono insiemi doppiamente, triplamente, ν volte, α volte ordinati, ma da questi per ora nel nostro studio facciamo astrazione. Perciò ci permettiamo in quel che segue di adoperare l'espressione più breve « insieme ordinato » nel senso di « insieme semplicemente ordinato ».

Per ogni insieme ordinato M si ha un determinato « tipo ordinatore » o più brevemente un determinato « tipo », che noi denotiamo con

(2) $$\overline{M};$$

con ciò intendiamo *l'idea generale che si ricava da M, quando si fa astrazione soltanto dalla natura degli elementi m, ma si conserva per essi l'ordine di posto.*

Perciò il tipo d'ordine $\overline{M}$ è *esso stesso un insieme ordinato*, i cui elementi sono *unità pure*, le quali hanno fra loro lo stesso ordine di posto che hanno gli elementi corrispondenti di M, da cui quelle si dedussero coll'astrazione.

Chiamiamo « simili » (ähnlich) due insiemi M ed N se essi si possono riferire tra loro in modo reciprocamente univoco, in guisa che se m_1 ed m_2 sono due elementi qualunque di M, n_1 ed n_2 i corrispondenti elementi di N, la relazione di posto tra m_1 ed m_2 dentro M sia sempre la stessa che quella tra n_1 ed n_2 dentro N. Una siffatta corrispondenza di insiemi simili viene da noi chiamata una *rappresentazione* (Abbildung) di uno sull'altro. In essa ad un insieme parziale M_1 di M (che evidentemente viene ad essere anche un insieme ordinato) corrisponde un insieme parziale simile N_1 di N. La similitudine di due insiemi ordinati M e N viene espressa in formole con

(3) $$M \simeq N.$$

Ogni insieme ordinato è simile a sè stesso.

Se due insiemi ordinati sono simili ad un terzo, essi sono anche simili tra loro.

È facile dimostrare che *due insiemi ordinati hanno lo stesso tipo d'ordine allora e solo allora quando essi sono simili; di maniera che delle due formole*

(4) $$\overline{M} = \overline{N}, \qquad M \simeq N$$

una è sempre conseguenza dell'altra.

Se in un tipo d'ordine $\overline{M}$ si fa ancora astrazione dall'ordine degli elementi, si ottiene (§ 1) il numero cardinale $\overline{\overline{M}}$ dell'insieme ordinato M, che è ad un tempo il numero cardinale del tipo d'ordine $\overline{M}$.

Da $\overline{M} = \overline{N}$ segue sempre $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$, cioè insiemi ordinati dello stesso tipo hanno sempre la stessa potenza o numero cardinale; la similitudine di insiemi ordinati ne porta sempre la equivalenza. Per lo contrario due insiemi ordinati possono essere equivalenti, senza essere simili.

Per rappresentare i tipi d'ordine, faremo uso delle lettere minuscole dell'alfabeto greco. Se α è un tipo ordinatore, con

(5) $$\overline{\alpha}$$

intendiamo il corrispondente numero cardinale.

I tipi ordinatori di insiemi finiti semplicemente ordinati non offrono alcun particolare interesse. Perchè facilmente si dimostra, che per uno stesso numero cardinale finito ν tutti gli insiemi semplicemente ordinati sono simili tra loro, e però hanno uno stesso tipo. I tipi ordinatori finiti sono perciò soggetti alle stesse leggi dei numeri cardinali finiti, e per rappresentare gli elementi è lecito far uso degli stessi segni $1, 2, 3, \ldots \nu, \ldots$ sebbene questi siano da ritenersi diversi dai numeri cardinali.

Ben diverse sono le cose per i *tipi ordinatori transfiniti*; perchè per uno stesso numero cardinale transfinito vi sono innumerevoli tipi diversi di insiemi semplicemente ordinati, i quali nella loro totalità costituiscono una particolare « *classe di tipi* ».

Ognuna di queste classi di tipi è quindi determinata da un numero cardinale transfinito a, che è comune a tutti i tipi appartenenti alla classe; perciò noi la chiamiamo brevemente classe tipica $[a]$.

La classe che naturalmente ci si presenta la prima, di cui la trattazione completa deve essere l'immediato scopo della teoria degli insiemi transfiniti, è la classe tipica $[\aleph_0]$, la quale abbraccia tutti i tipi col numero cardinale transfinito minimo $\aleph_0$.

Dobbiamo ben distinguere dal numero cardinale a, che *determina* la classe tipica $[a]$, quel numero cardinale a', che *alla sua volta è determinato* dalla classe tipica $[a]$; questo è il numero cardinale, che spetta (§ 1) alla classe tipica $[a]$ in quanto questa rappresenta *un ben definito insieme, i cui elementi sono tutti i tipi α col numero cardinale a.* Vedremo che a' è diverso da a e precisamente è sempre maggiore di a.

Se in un insieme ordinato M si invertono tutte le relazioni di posto dei suoi elementi, in guisa che dappertutto un elemento superiore diventa inferiore, ed uno inferiore diventa superiore, si ottiene nuovamente un insieme ordinato, che denotiamo con

$$^*M \tag{6}$$

e chiamiamo l'« *inverso* » di M.

Se $\alpha = \overline{M}$, denotiamo il tipo ordinatore di $^*M$ con

$$^*\alpha. \tag{7}$$

Può avvenire che sia $^*\alpha = \alpha$, come p. es. nei tipi finiti, o nel tipo dell'insieme R di tutti i numeri razionali maggiori di 0 e minori di 1 nel loro ordine naturale, che noi studieremo denotandolo con η.

Osserviamo inoltre, che due insiemi ordinati simili possono essere rappresentati l'uno sull'altro o in una sola maniera o in più maniere; nel primo caso il corrispondente tipo è simile a sè stesso solo in una maniera, nel secondo in più maniere.

Così non solo tutti i tipi finiti, ma anche i tipi degli insiemi transfiniti « ben ordinati », dei quali più tardi ci occuperemo e che noi chiamiamo numeri ordinali transfiniti, sono di tal sorta da ammettere una sola rappresentazione in sè stessi. All'opposto il tipo η è simile a sè stesso in innumerevoli maniere.

Vogliamo chiarire questa differenza con due semplici esempi.

Con ω intendiamo il tipo d'un insieme ben ordinato

$$(e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots)$$

in cui

$$e_\nu \prec e_{\nu+1}$$

e dove ν è rappresentante di tutti i numeri cardinali finiti.

Un altro insieme ben ordinato

$$(f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots)$$

colla condizione

$$f_\nu \prec f_{\nu+1},$$

dello stesso tipo ω, può evidentemente essere « rappresentato » sul precedente soltanto coll'assumere e_ν ed f_ν come elementi corrispondenti. Perchè l'elemento e_1 del primo di posto infimo deve nella rappresentazione essere coordinato all'elemento infimo f_1 del secondo, e così l'elemento e_2 di posto successivo ad e_1 deve essere coordinato all'elemento f_2 di posto successivo ad f_1, ecc.

Ogni altra relazione reciprocamente univoca dei due insiemi equivalenti $\{e_\nu\}$ e $\{f_\nu\}$ non è una « rappresentazione » nel senso che abbiamo sopra stabilito per la teoria dei tipi.

Prendiamo ora un insieme ordinato della forma

$$\{e_{\nu'}\},$$

dove ν' è rappresentante di tutti i numeri interi finiti positivi e negativi, incluso lo 0, e dove si ha parimenti

$$e_{\nu'} \prec e_{\nu'+1}.$$

Questo insieme non ha alcun elemento di posto infimo, nè alcuno di posto supremo. Il suo tipo, secondo la definizione di somma che sarà data al § 8, è

$$^*\omega + \omega.$$

Esso è simile a sè stesso in innumerevoli maniere. Infatti consideriamo un insieme dello stesso tipo

$$\{f_{\nu'}\},$$

dove

$$\nu' < f_{\nu'+1};$$

i due insiemi ordinati possono essere rappresentati l'uno sull'altro, in guisa che all'elemento $e_{\nu'}$ del primo corrisponda l'elemento $f_{\nu'_0+\nu'}$ del secondo, essendo ν'_0 un determinato fra i numeri ν'. Per l'arbitrarietà di ν'_0 abbiamo dunque qui infinite rappresentazioni.

L'idea qui sviluppata di « tipo ordinatore » quando in ugual maniera sia trasportata agli « insiemi più volte ordinati », accanto all'idea di « numero cardinale o potenza » introdotta nel § 1, abbraccia tutto il « numerabile » che mai si possa pensare, e non ammette in questo senso alcuna ulteriore generalizzazione. Essa non contiene nulla di arbitrario, ma è la naturale estensione dell'idea di numero. *Merita qui di essere particolarmente rilevato, che il criterio di eguaglianza* (4) *segue con assoluta necessità dall'idea di tipo ordinatore e però non ammette cambiamento di sorta.* Nell'avere mal compreso questa circostanza è da ricercarsi la causa fondamentale dei gravi errori, che si trovano nell'opera del sig. G. VERONESE: « Grundzüge der Geometrie, Deutsch von A. Schepp, Leipzig 1894 ».

Là è spiegato a pag. 30 il « numero di un gruppo ordinato », che coincide del tutto con ciò che noi abbiamo chiamato « tipo d'ordine di un insieme semplicemente ordinato » (Zur Lehre von Transfiniten, Halle 1890, pag. 68-75, estratto dal Ztschr. f. Philos. u. philos. Kritik dell'anno 1887).

Ma il sig. V. crede di dover fare un'aggiunta al criterio dell'uguaglianza. Egli dice a pag. 27 dell'edizione originale italiana: « Numeri le unità dei quali si corrispondono univocamente e nel medesimo ordine e di cui l'uno non è parte o uguale ad una parte dell'altro, sono uguali ».

Questa definizione dell'uguaglianza contiene un *circolo* e perciò diventa un *non senso.*

Che intende egli mai colla sua aggiunta *non uguale ad una parte dell'altro?* Per rispondere a questa domanda, bisogna anzitutto sapere quando due numeri sono uguali o non uguali. Quindi *la sua definizione dell'uguaglianza* (fatta astrazione dalla sua arbitrarietà) *presuppone una definizione dell'uguaglianza, che nuovamente presuppone una definizione dell'uguaglianza, per cui occorre di nuovo sapere che cosa è uguale e che cosa disuguale, ecc. ecc. all'infinito.*

Dopo che il sig. V. in tal maniera ha, per così dire, volontariamente abbandonato il fondamento indispensabile per confrontare i numeri, non fa meraviglia la sregolatezza colla quale egli ulteriormente opera coi suoi numeri pseudotransfiniti, ed ascrive a questi proprietà, che non possono possedere per la semplice ragione che essi, nella forma da lui imaginata, non hanno esistenza di sorta a meno di quella che hanno sulla carta, ove sono scritti. Quindi si capisce anche la sorprendente rassomiglianza che riattacca le sue imagini di numeri ai « numeri infiniti » eminentemente assurdi di FONTENELLE nella sua « Géométrie de l'infini, Paris 1727 ».

Da poco tempo anche il sig. W. KILLING, nel suo « Index Lectionum » dell'Accademia di Münster (per il 1895-96), ha espresso le sue obbiezioni contro la base del libro del sig. VERONESE.

§ 8.

Addizione e moltiplicazione dei tipi d'ordine.

L'insieme (M, N) somma di due insiemi M ed N, quando questi sono ordinati, si può pure riguardare come un insieme ordinato, nel quale le relazioni di posto degli elementi di M fra loro, e così pure le relazioni di posto degli elementi di N fra loro, son rimaste le stesse rispettivamente come in M ed in N, inoltre tutti gli elementi di M hanno posto più basso di tutti gli elementi di N. Se M' ed N' sono altri due insiemi ordinati, $M \simeq M'$, $N \simeq N'$, è eziandio $(M, N) \simeq (M', N')$; il tipo ordinatore di (M, N) dipende dunque soltanto dai tipi ordinatori $\overline{M} = \alpha$, $\overline{N} = \beta$; quindi noi definiamo:

$$\alpha + \beta = \overline{(M, N)}. \tag{1}$$

Nella somma $\alpha + \beta$, α si dice l'« *augendus* » e β l'« *addendus* ».

Per tre tipi qualunque vige la legge associativa, facile a dimostrarsi,

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma. \tag{2}$$

Per lo contrario, la legge commutativa non è valida in generale per l'addizione di tipi. Ciò si vede già nel seguente semplice esempio.

Se ω è il tipo menzionato al § 7 dell'insieme ben ordinato

$$E = (e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots), \qquad e_\nu < e_{\nu+1},$$

$1 + \omega$ non è uguale a $\omega + 1$.

Perchè, se f è un nuovo elemento, si ha per la (1)

$$1 + \omega = \overline{(f, E)},$$
$$\omega + 1 = \overline{(E, f)}.$$

Ma l'insieme

$$(f, E) = (f, e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots)$$

è simile all'insieme E; dunque

$$1 + \omega = \omega .$$

Invece gli insiemi E e (E, f) non sono simili, poichè il primo non ha alcun termine di posto supremo, e il secondo ha il termine di posto supremo f. Quindi $\omega + 1$ è diverso da $\omega = 1 + \omega$.

Da due insiemi ordinati M ed N coi tipi α e β si può ricavare un insieme ordinato S nella maniera seguente: in N al posto d'ogni elemento n si sostituisce un insieme ordinato M_n, che ha lo stesso tipo α di M, cioè

$$(3) \qquad \overline{M_n} = \alpha ,$$

indi per ciò che riguarda l'ordine di

$$(4) \qquad S = \{M_n\}$$

si fanno le convenzioni seguenti:

1) due elementi qualunque di S che appartengono ad uno stesso insieme M_n, conservano in S la stessa relazione di posto che in M_n,

2) due elementi qualunque di S, che appartengono a due insiemi diversi M_{n_1} e M_{n_2}, prendono in S la relazione di posto, che n_1 ed n_2 hanno in N.

Il tipo ordinatore di S dipende, come è facile a vedersi, dai tipi α e β; noi definiamo:

$$(5) \qquad \alpha . \beta = \overline{S} .$$

In questo prodotto α si dice il « *multiplicandus* » e β il « *multiplicator* ».

Stabilita una rappresentazione qualunque di M su M_n, sia m_n l'elemento di M_n corrispondente all'elemento m di M. Allora noi possiamo anche scrivere

$$(6) \qquad S = \{m_n\} .$$

Assumiamo ora un terzo insieme ordinato $P = \{p\}$ col tipo ordinatore $\overline{P} = \gamma$; si ha per la (5)

$$\alpha . \beta = \overline{\{m_n\}} , \qquad \beta . \gamma = \overline{\{n_p\}} ,$$
$$(\alpha . \beta) . \gamma = \overline{\{(m_n)_p\}} , \qquad \alpha . (\beta . \gamma) = \overline{\{m_{(n_p)}\}} .$$

Ma i due insiemi ordinati $\{(m_n)_p\}$ e $\{m_{(n_p)}\}$ sono simili e vengono l'uno sull'altro rappresentati quando si riguardino come corrispondenti gli elementi $(m_n)_p$ e $m_{(n_p)}$.

Quindi per tre tipi α, β, γ sussiste la *legge associativa*

$$(7) \qquad (\alpha . \beta) . \gamma = \alpha . (\beta . \gamma).$$

Dalle (1) e (5) segue anche facilmente la *legge distributiva*

$$(8) \qquad \alpha . (\beta + \gamma) = \alpha . \beta + \alpha . \gamma ,$$

però soltanto nella forma qui scritta, ove *il fattore binomio fa da moltiplicatore*.

Per lo contrario la *legge commutativa* nella moltiplicazione dei tipi, come nell'addizione, non vale in generale. Ad esempio $2 . \omega$ e $\omega . 2$ sono tipi diversi; infatti si ha per la (5)

$$2 . \omega = \overline{(e_1, f_1; e_2, f_2; \ldots; e_\nu, f_\nu; \ldots)} = \omega ;$$

per lo contrario è

$$\omega . 2 = \overline{(e_1, e_2, \ldots, e_\nu; f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots)}$$

evidentemente diverso da ω.

Confrontando le definizioni date al § 3 delle operazioni fondamentali per i numeri cardinali con quelle qui stabilite per i tipi ordinatori, si riconosce facilmente, che il numero cardinale della somma di due tipi è uguale alla somma dei numeri cardinali di ciascun tipo, e che il numero cardinale del prodotto di due tipi è uguale al prodotto dei numeri cardinali di ciascun tipo. Ogni equazione adunque fra tipi d'ordine formata colle due operazioni fondamentali sussiste ancora quando in essa al posto di tutti i tipi si sostituiscono i loro numeri cardinali.

§ 9.

Il tipo d'ordine η dell'insieme R di tutti i numeri razionali, maggiori di 0 e minori di 1, nel loro ordine naturale.

Per R intendiamo, come al § 7, il sistema di tutti i numeri razionali $\frac{p}{q}$ (p e q interi primi tra loro), che sono > 0 e < 1, *nel loro ordine naturale*, cioè quello in cui il posto è determinato dalla grandezza del numero. Denotiamo poi con η il tipo ordinatore di R:

$$(1) \qquad \eta = \overline{R} .$$

Ma noi, al § 7, abbiamo anche indicato per lo stesso insieme un altro ordine, nel quale lo chiamiamo R_0, dove il posto è determinato in prima linea dalla grandezza di $p+q$, ed in seconda linea, e precisamente per quei numeri razionali per cui $p+q$ ha uno stesso valore, dalla grandezza di $\frac{p}{q}$. R_0 ha la forma di un insieme ben ordinato del tipo ω:

$$(2)\qquad R_0 = (r_1, r_2, \ldots, r_\nu, \ldots) \quad \text{dove} \quad r_\nu \prec r_{\nu+1},$$

$$(3)\qquad \overline{R_0} = \omega.$$

Siccome R ed R_0 differiscono soltanto per l'ordine degli elementi, così essi hanno lo stesso numero cardinale, e siccome evidentemente $\overline{\overline{R_0}} = \aleph_0$, così anche

$$(4)\qquad \overline{\overline{R}} = \overline{\eta} = \aleph_0.$$

Il tipo η appartiene dunque alla classe tipica $[\aleph_0]$.

Osserviamo in secondo luogo, che in R non si trova nè un elemento di posto infimo, nè un elemento di posto supremo.

In terzo luogo R ha la proprietà che tra due suoi elementi qualunque cadono altri elementi; questa proprietà viene da noi espressa colle parole: *R è dappertutto denso.*

Vogliamo ora dimostrare che queste tre proprietà caratterizzano il tipo η di R, in guisa che sussiste il seguente teorema:

« Se un insieme semplicemente ordinato M soddisfa alle tre condizioni:

1) $\overline{\overline{M}} = \aleph_0$,

2) M non ha elementi nè di posto infimo nè di posto supremo,

3) M è dappertutto denso;

il tipo ordinatore di M è uguale a η:

$$\overline{M} = \eta \text{ ».}$$

Dimostrazione. — Per la condizione 1) M si può mettere sotto la forma di un insieme ben ordinato del tipo ω; presa come base una tale forma, denotiamo M con M_0 e poniamo

$$(5)\qquad M_0 = (m_1, m_2, \ldots, m_\nu, \ldots).$$

Ora noi dobbiamo dimostrare che

$$(6)\qquad M \simeq R,$$

cioè dobbiamo dimostrare che M si può *rappresentare* su R in guisa

che la relazione di posto tra due elementi qualunque in M è la stessa che la relazione di posto tra i due elementi corrispondenti in R.

All'elemento r_1 in R sia fatto corrispondere l'elemento m_1 in M.

r_2 ha una determinata relazione di posto rispetto a r_1; per la condizione 2) vi sono infiniti elementi m_ν di M, che hanno rispetto a m_1 le stesse relazioni di posto, che ha in R r_2 rispetto a r_1; *tra essi* scegliamo quello che ha in M_0 l'indice minimo, denotiamolo con m_{ι_2} e coordiniamolo a r_2.

r_3 ha determinate relazioni di posto rispetto ad r_1 e r_2; per le condizioni 2) e 3) vi sono infiniti elementi m_ν di M, che hanno in M le stesse relazioni di posto rispetto a m_1 e m_{ι_2}, che ha r_3 in R rispetto a r_1 e r_2; tra essi scegliamo quello, e sia m_{ι_3}, che ha in M_0 l'indice minimo, e coordiniamolo a m_3.

Secondo la stessa legge imaginiamo continuato il processo di coordinazione; dopo che ai ν elementi

$$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_\nu$$

di R furono assegnati come imagini in M determinati elementi

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots m_{\iota_\nu}$$

i quali in M hanno fra loro le stesse relazioni di posto che i corrispondenti in R, si assegni come imagine dell'elemento $r_{\nu+1}$ di R l'elemento $m_{\iota_{\nu+1}}$ di M, che ha in M_0 l'indice minimo e che rispetto a

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_\nu}$$

ha in M le stesse relazioni di posto, che ha $r_{\nu+1}$ in R rispetto a r_1, r_2, r_3, ..., r_ν.

In questa maniera noi abbiamo per tutti gli elementi r_ν di R assegnati come imagini determinati elementi m_{ι_ν} di M e gli elementi m_{ι_ν} hanno in M lo stesso ordine che i corrispondenti elementi r_ν hanno in R.

Ma deve ancora essere dimostrato che gli elementi m_{ι_ν} comprendono tutti gli elementi m_ν di M, ovvero, ciò che è lo stesso, che la serie

$$1, \iota_2, \iota_3, \ldots, \iota_\nu, \ldots$$

è soltanto una permutazione della serie

$$1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$$

Noi dimostriamo ciò con una *induzione completa,* facendo vedere che se nella rappresentazione si impiegano gli elementi $m_1, m_2, \ldots m_\nu$ *lo stesso avviene anche per l'elemento seguente* $m_{\nu+1}$.

Sia λ così grande che tra gli elementi

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_\lambda}$$

si trovino gli elementi

$$m_1, m_2, \ldots, m_\nu,$$

(i quali per ipotesi compariscono nella rappresentazione). Può avvenire che tra essi si trovi anche $m_{\nu+1}$, e allora $m_{\nu+1}$ viene impiegato nella rappresentazione.

Ma se $m_{\nu+1}$ *non si trova fra gli elementi*

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_\lambda},$$

$m_{\nu+1}$ ha rispetto a questi elementi dentro M una determinata relazione di posto; la stessa relazione di posto rispetto a $r_1, r_2, \ldots, r_\lambda$ hanno in R infiniti elementi di R, tra questi sia $r_{\lambda+\sigma}$ quello che in R_0 ha l'indice minimo.

Allora $m_{\nu+1}$, come è facile persuadersi, ha in M rispetto a

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_{\lambda+\sigma-1}}$$

la stessa relazione di posto, che ha $r_{\lambda+\sigma}$ in R rispetto a

$$r_1, r_2, \ldots, r_{\lambda+\sigma-1}.$$

Siccome $m_1, m_2, \ldots m_\nu$ già sono comparsi nella rappresentazione, così è $m_{\nu+1}$ l'elemento dotato del minimo indice in M_0 che ha questa relazione di posto rispetto a

$$m_1, m_{\iota_2}, \ldots, m_{\iota_{\lambda+\sigma-1}}.$$

Per conseguenza seguendo la nostra legge di corrispondenza si ha

$$m_{\iota_{\lambda+\sigma}} = m_{\nu+1}.$$

Dunque anche in questo caso l'elemento $m_{\nu+1}$ viene ad essere rappresentato, e precisamente è $r_{\lambda+\sigma}$ il suo corrispondente in R.

E così noi vediamo, che col nostro modo di corrispondenza *tutto l'insieme* M viene ad essere rappresentato su tutto l'insieme R; M ed R sono insiemi simili, c. v. d.

Dal teorema ora dimostrato si deducono a mo' d'esempio i seguenti:

« η è il tipo ordinatore dell'insieme di tutti i numeri razionali negativi e positivi, incluso lo zero, nel loro ordine naturale. »

« η è il tipo ordinatore dell'insieme di tutti i numeri razionali maggiori di a e minori di b, nel loro ordine naturale, dove a e b son due numeri reali qualunque, e $a < b$. »

« η è il tipo ordinatore dell'insieme di tutti i numeri reali algebrici nel loro ordine naturale. »

« η è il tipo ordinatore dell'insieme di tutti i numeri reali algebrici, maggiori di a e minori di b, nel loro ordine naturale, dove a e b sono due numeri reali qualunque, e $a < b$. »

Infatti tutti questi insiemi ordinati soddisfano alle tre condizioni richieste per M dal nostro teorema (*Crelle's Journal*, Bd. 77, pag. 258).

Consideriamo inoltre degli insiemi che, secondo le definizioni del § 8, hanno i tipi $\eta+\eta$, $\eta\eta$, $(1+\eta)\eta$, $(\eta+1)\eta$, $(1+\eta+1)\eta$, per essi sono ancora soddisfatte quelle tre condizioni. Quindi abbiamo i teoremi:

(7) $$\eta+\eta=\eta,$$

(8) $$\eta\eta=\eta,$$

(9) $$(1+\eta)\eta=\eta,$$

(10) $$(\eta+1)\eta=\eta,$$

(11) $$(1+\eta+1)\eta=\eta.$$

Applicando più volte la (7) e la (8) si trova per ogni numero finito ν:

(12) $$\eta\,.\,\nu=\eta,$$

(13) $$\eta^\nu=\eta.$$

Per lo contrario, per $\nu>1$, i tipi $1+\eta$, $\eta+1$, $\nu\,.\,\eta$, $1+\eta+1$ sono, come si vede facilmente, diversi fra loro e ancora diversi da η. D'altra parte è

(14) $$\eta+1+\eta=\eta,$$

ma $\eta+\nu+\eta$ per $\nu>1$ è diverso da η.

Finalmente conviene ancora mettere in rilievo che

(15) $$^*\eta=\eta.$$

§ 10.

Le serie fondamentali contenute in un insieme ordinato transfinito.

Prendiamo a considerare un insieme M transfinito, semplicemente ordinato, qualunque. Ogni insieme parziale di M è esso pure un insieme ordinato. Per lo studio del tipo $\overline{M}$ si manifestano particolarmente utili quegli insiemi parziali di M, che appartengono ai tipi ω ed $^*\omega$; noi li chiameremo « *serie fondamentali di primo ordine contenute in M* » e precisamente i primi (quelli del tipo ω) « *ascendenti* », gli altri (del tipo $^*\omega$) « *discendenti* ».

Siccome noi qui ci limitiamo alla considerazione delle serie fondamentali *del primo ordine* (in studii successivi ne verranno in campo anche altre d'ordine superiore), così noi le chiameremo qui semplicemente « *serie fondamentali* ».

Una « serie fondamentale » ascendente ha dunque la forma

(1) $$\{a_\nu\}, \quad \text{ove} \quad a_\nu < a_{\nu+1},$$

una « serie fondamentale discendente » è della forma

(2) $$\{b_\nu\}, \quad \text{ove} \quad b_\nu > b_{\nu+1}.$$

In tutte le nostre considerazioni ν (come pure anche $\varkappa$, λ, μ) ha il significato d'un numero cardinale finito qualunque oppure anche di un tipo finito rispettivamente d'un numero ordinale finito.

Chiamiamo « *compartecipanti* » (zusammengehörig) due serie fondamentali ascendenti $\{a_\nu\}$ e $\{a'_\nu\}$ contenute in M, e scriviamo

(3) $$\{a_\nu\} \,||\, \{a'_\nu\},$$

quando, sia per ogni elemento a_ν esistono elementi a'_λ, tali che

$$a_\nu < a'_\lambda,$$

sia ancora per ogni elemento a'_ν esistono elementi a_μ, tali che

$$a'_\nu < a_\mu.$$

Chiamiamo « *compartecipanti* » due serie fondamentali discendenti $\{b_\nu\}$ e $\{b'_\nu\}$ contenute in M, e scriviamo

(4) $$\{b_\nu\} \,||\, \{b'_\nu\},$$

quando per ogni elemento b_ν esistono elementi b'_λ, tali che

$$b_\nu > b'_\lambda,$$

e per ogni elemento b'_ν esistono elementi b_μ, tali che

$$b'_\nu > b_\mu.$$

Una serie fondamentale ascendente $\{a_\nu\}$ ed una discendente $\{b_\nu\}$ si chiamano « *compartecipanti* » e si scrive

$$\{a_\nu\} \,||\, \{b_\nu\},$$

1) se per tutti i ν e μ si ha

$$a_\nu < b_\mu,$$

2) se in M esiste *al più* un elemento m_0 (cioè o uno solo o nessuno) tale che per tutti i ν sia

$$a_\nu < m_0 < b_\nu.$$

Ciò posto, sussistono i teoremi:

A. « *Se due serie fondamentali sono compartecipanti con una terza, esse sono anche compartecipanti tra loro.* »

B. « *Due serie fondamentali collo stesso verso, di cui l'una sia parte dell'altra, sono sempre compartecipanti.* »

Quando in M esiste un elemento m_0, il quale rispetto alla serie ascendente $\{a_\nu\}$ ha un posto tale, che

1) per ogni ν

$$a_\nu < m_0,$$

2) per ogni elemento m di M, che sia $< m_0$, esiste un numero ν_0 siffatto che

$$a_\nu > m \quad \text{per} \quad \nu \geqq \nu_0,$$

noi chiamiamo m_0 « *elemento limite di $\{a_\nu\}$ in M* » e nello stesso tempo un « *elemento principale di M* ».

Similmente noi chiamiamo ancora m_0 un « elemento principale di M » e ad un tempo « elemento limite di b_ν in M » quando sono soddisfatte le condizioni:

1) per ogni ν

$$b_\nu > m_0,$$

2) per ogni elemento m di M, che sia $> m_0$, esiste un certo numero ν_0 siffatto che

$$b_\nu < m \quad \text{per} \quad \nu \geqq \nu_0.$$

Una serie fondamentale *non può mai avere più di un* elemento limite in M, ma M ha in generale molti elementi principali.

È facile persuadersi della verità dei seguenti teoremi:

C. « *Se una serie fondamentale ha un elemento limite in M, tutte le serie fondamentali con essa compartecipanti hanno lo stesso elemento limite in M.* »

D. « *Se due serie fondamentali (collo stesso verso o con versi opposti) hanno uno stesso elemento limite in M, esse sono compartecipanti.* »

Siano M ed M' due insiemi ordinati simili, per guisa che

$$\overline{M} = \overline{M'}, \tag{6}$$

e pongasi a fondamento una rappresentazione qualunque dei due insiemi; sussistono, come si vede facilmente, i seguenti teoremi:

E. « *Ad ogni serie fondamentale in M corrisponde come imagine una serie fondamentale in M', ed inversamente; ad ogni serie ascendente una ascendente; ad ogni discendente una discendente; a serie fondamentali compartecipanti in M corrispondono come imagini serie fondamentali compartecipanti in M', e viceversa.* »

F. « *Se una serie fondamentale in M possiede un elemento limite in M, anche la serie fondamentale corrispondente in M' possiede un elemento limite in M', e inversamente; e questi due elementi limiti sono imagini l'uno dell'altro nella rappresentazione.* »

G. « *Agli elementi fondamentali di M corrispondono come imagini elementi fondamentali di M', e inversamente.* »

Se un insieme M consta di soli elementi principali, per modo che ognuno dei suoi elementi è un elemento principale, noi lo chiamiamo « *un insieme condensato* » (insichdichte Menge).

Se per ogni serie fondamentale in M esiste un elemento limite in M, noi chiamiamo M « *un insieme chiuso* » (abgeschlossene Menge).

Un insieme che è ad un tempo condensato e chiuso dicesi « *insieme perfetto* ».

Se un insieme ha uno di questi tre predicati, lo stesso predicato spetta eziandio ad ogni insieme simile; quindi gli stessi predicati si possono anche attribuire ai corrispondenti tipi ordinatori, e così vi sono « *tipi condensati* », « *tipi chiusi* », « *tipi perfetti* », come pure « *tipi densi dappertutto* » (§ 9).

Così ad es. η è un tipo « condensato »; esso è anche, come fu mostrato al § 9, « dappertutto denso », ma non « chiuso ».

ω ed $^*\omega$ non hanno elementi principali (unità principali); per lo contrario $\omega + \nu$ e $\nu + {}^*\omega$ hanno ciascuno un elemento principale e sono « tipi chiusi ».

Il tipo $\omega . 3$ ha due elementi principali, ma non è « chiuso »; il tipo $\omega . 3 + \nu$ ha tre elementi principali ed è « chiuso ».

§ 11.

Il tipo ordinatore θ del continuo lineare X.

Passiamo allo studio del tipo ordinatore dell'insieme $X = \{x\}$ di tutti i numeri reali x, che sono $\geqq 0$ e $\leqq 1$, nel loro ordine naturale, per

guisa che per due elementi arbitrari x e x' si ha

$$x \prec x' \quad \text{quando} \quad x < x'. \tag{1}$$

La notazione di questo tipo sia

$$\overline{X} = \theta.$$

Dagli elementi della teoria dei numeri razionali e irrazionali si sa che ogni serie fondamentale $\{x_\nu\}$ in X ha un limite x_0 in X, e che anche inversamente ogni elemento x di X è elemento limite di serie compartecipanti in X. Perciò X è un « *insieme perfetto* » e θ un « *tipo perfetto* ».

Ma con ciò θ non è ancora sufficientemente caratterizzato; noi dobbiamo oltre a ciò tener presente la seguente proprietà di X.

X *contiene* come insieme parziale l'insieme R, studiato al § 9, di tipo ordinatore η, e *particolarmente in modo che tra due elementi qualunque x_0 ed x_1 di X* trovano posto elementi di R.

Ora dobbiamo dimostrare che *queste proprietà prese insieme* caratterizzano completamente il tipo ordinatore θ del continuo lineare X, per guisa che sussiste il teorema:

« *Se un insieme ordinato M ha tale impronta che:* 1) *esso è perfetto,* 2) *in esso è contenuto un insieme S col numero cardinale $\overline{\overline{S}} = \aleph_0$, il quale ha siffatta relazione con M che tra due elementi qualsivogliano m_0 ed m_1 di M trovano posto elementi di S, si ha $\overline{M} = \theta$.*

DIMOSTRAZIONE. — Se S contenesse un elemento supremo ed un infimo, questi in causa della 2) avrebbero lo stesso carattere anche come elementi di M; noi potremmo allora sopprimerli da S senza che perciò quest'insieme perda la relazione con M espressa nella 2).

Noi supponiamo perciò fin da principio che S sia senza elemento supremo od infimo; allora S ha, per il § 9, il tipo ordinatore η. Perchè, essendo S una parte di M, tra due elementi arbitrarii s_0 e s_1 di S debbono per la 2) trovar posto altri elementi di S; inoltre si ha per la 2) $\overline{\overline{S}} = \aleph_0$. I due insiemi S ed R sono dunque « *simili* »,

$$S \simeq R. \tag{2}$$

Imaginiamo ora stabilita una qualunque « *rappresentazione* » di R su S; asseriamo che essa fornisce ad un tempo una « *rappresentazione* » di X su M, e precisamente nella maniera che segue.

Tutti gli elementi di X, che appartengono ad un tempo all'insieme R, si fanno corrispondere come imagini a quegli elementi di M, che sono ad un tempo elementi di S e che, per la rappresentazione stabilita di R su S, corrispondono a quegli elementi di R.

Ma se x_0 è un elemento di X non appartenente a R, esso si può riguardare come elemento limite d'una serie fondamentale $\{x_\nu\}$ contenuta in X, la quale può essere sostituita con una serie fondamentale $\{r_{\chi_\nu}\}$ compartecipante con essa contenuta in R. A quest'ultima corrisponde come imagine una serie fondamentale $\{s_{\lambda_\nu}\}$ in S e M, la quale per la 1) è limitata da un solo elemento m_0 in M, che non appartiene ad S (F, § 10). Questo elemento m_0 in M (che rimane lo stesso, quando in luogo delle serie fondamentali $\{x_\nu\}$ e $\{r_{\chi_\nu}\}$ se ne pensano altre limitate dallo stesso elemento x_0 in X [E, C, D, § 10]) serve come imagine di x_0 in X. Inversamente, ad ogni elemento m_0 di M, che non si trova in S, corrisponde un ben determinato elemento x_0 di X, che non appartiene ad R, e del quale m_0 è l'imagine.

In questa maniera viene stabilita una relazione reciprocamente univoca tra X ed M, la quale bisogna dimostrare che costituisce una « rappresentazione » di questi insiemi.

Ciò sussiste anzitutto per quegli elementi di X ed M che appartengono ad un tempo agli insiemi R ed S rispettivamente.

Confrontiamo ora un elemento r di R con un elemento x_0 di X non appartenente ad R; i corrispondenti elementi di M siano s ed m_0.

Se è $r < x_0$, esiste una serie fondamentale $\{r_{\chi_\nu}\}$ ascendente limitata da x_0, e per un certo valore ν_0 si ha

$$r > r_{\chi_\nu} \quad \text{per} \quad \nu \geqq \nu_0 .$$

L'imagine di $\{r_{\chi_\nu}\}$ in M è una serie fondamentale ascendente $\{s_{\lambda_\nu}\}$ limitata in M da m_0, e si ha (§ 10) in primo luogo $s_{\lambda_\nu} < m_0$ per ogni ν ed in secondo luogo $s < s_{\lambda_\nu}$ per $\nu \geqq \nu_0$, perciò (§ 7) $s < m_0$.

Se è $r > x_0$, si conchiude similmente che $s > m_0$.

Consideriamo finalmente due elementi x_0 ed x'_0 non appartenenti ad R e gli elementi m_0 ed m'_0 ad essi corrispondenti in M; con un procedimento analogo si dimostra che, se $x < x'_0$ si ha $m_0 < m'_0$.

Con ciò risulta dimostrata la similitudine di X ed M, e quindi si ha

$$\overline{M} = \theta .$$

Halle, marzo 1895.

Nuove pubblicazioni.

N. Jadanza. — *Rivista di topografia e catasto.* Torino. Associazione annua L. 12.

G. Pesci. — *Trattato elementare di trigonometria piana e sferica.* Livorno, Giusti, 1895, pag. 313, L. 4.

— *Appendice al trattato elementare di trigonometria.* Livorno, Giusti, 1895, pag. 77, L. 1.

G. Testi. — *Corso di Matematiche.* Vol. III. *Geometria elementare,* Parte I. Livorno, Giusti, 1896. Prezzo delle parti I e II L. 3,50.

D. Gambioli. — *Raccolta di esercizi di aritmetica generale, algebra e meccanica elementare.* Bologna, Zanichelli, 1896, pag. 496, L. 4.

O. Biermann. — *Elemente der höheren Mathematik.* Leipzig, Teubner, 1895, pag. 381.

G. Riboni. — *Elementi di Geometria, ad uso delle scuole secondarie inferiori,* corredati da una raccolta di esercizi per cura di D. Gambioli. Bologna, Zanichelli, 1896, pag. 278, L. 2.

G. Ingrami. — *Elementi di Algebra, ad uso delle scuole secondarie superiori.* Bologna, 1895, p. 222, L. 3.

— *Calcolo numerico e letterale ad uso delle scuole secondarie inferiori.* Bologna, 1895, pag. 134, L. 2.

E. D'Ovidio. — *Geometria analitica.* Torino, Bocca, 1896, p. XVI+444, L. 10.

E. Webber. — *Applicazioni geometriche e analitiche di Calcolo differenziale ed integrale.* Milano, Rechiedei, 1895, pag. 263, L. 3,50.

A. Tournois. — *Leçons complémentaires d'Algèbre et notions de Géométrie analytique.* Paris (sans date), pag. 208, prix 4 fr., 50.

Gérard. — *Bulletin de Mathématiques élémentaires.* Paris. Abonnement pour l'Italie 6 frs.

F. Klein. *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie, ausgearbeitet von F. Tägert.* Leipzig, Teubner, 1895. 8° V-66 p. e 2 tav.

Questo opuscolo è il riassunto di un corso di lezioni tenuto da F. Klein a Gottinga nell'estate 1894. Esso ci presenta, risolta coi mezzi più facili e più semplici di cui dispone l'analisi, una questione che è fondamentale per la geometria elementare, ma che questa per sè sola non è atta ad esaurire; quella cioè di determinare quali siano i problemi geometrici risolubili colla riga e col compasso.

Dopo aver mostrato (Introduzione), come un'espressione analitica possa costruirsi colla riga e col compasso sempre e soltanto quando essa sia radice d'un'equazione algebrica risolubile con un numero finito di estrazioni di radici quadratiche, l'autore tratta (Parte I) della costruzione delle espressioni algebriche. Fa vedere anzitutto (Cap. I) che un'espressione costruibile geometricamente dev'essere radice d'una equazione irriducibile il cui grado sia una potenza di 2, e ne trae come conseguenze l'impossibilità di risolvere (Cap. 2) il problema di Delo e quello della trisezione dell'angolo, che si riducono all'equazione $x^3 = r$ dove $r = 2$ o $r = e^{i\varphi}$, e la determinazione (Cap. 3) della forma che deve avere il numero primo p perchè la circonferenza sia divisibile geometricamente in p parti eguali. Il processo di divisione viene (Cap. 4) effettivamente sviluppato pel caso di $p = 17$, e l'autore fa seguire alcuni cenni storici sulle costruzioni col solo compasso (Mascheroni), colla sola riga (Brianchon), colla riga e con un cerchio fisso (Poncelet, Steiner), mostrando come basti un unico cerchio fisso, insieme alla riga, per risolvere graficamente ogni equazione quadratica. Un ultimo capitolo (Cap. 5) è dedicato alle costruzioni algebriche mediante coniche o curve d'ordine superiore.

Passando poi (Parte II) ai numeri trascendenti, l'autore ne dimostra anzitutto (Cap. 1) l'esistenza sulle tracce di G. Cantor, indi, dopo alcune notizie storiche (Cap. 2) sulla quadratura del cerchio, espone (Cap. 3-4) le dimostrazioni date da Gordan (Math. Ann. T. 43) della trascendenza di e e π.

Un'appendice contiene un cenno sulla macchina integratrice (*Integraph*) di Abdank-Abakanowicz e sull'applicazione di questa al problema della quadratura del cerchio.

Modesto per la mole e per l'argomento, l'opuscolo che ci sta dinanzi è pregevolissimo per l'eleganza, la chiarezza e la potenza sintetica di vedute che distinguono gli scritti del dotto professore di Gottinga. E sarebbe desiderabile che tutti gli insegnanti di matematica delle scuole secondarie imparassero a conoscerlo, perchè vi apprenderebbero con lieve fatica le ragioni vere dei limiti che s'impongono naturalmente alla geometria elementare e della irresolubilità di certi problemi che entrano apparentemente nel campo di questa; nè più si ripeterebbe il caso, che ci si narra avvenuto di recente, d'un insegnante che esortava i giovani a concentrare i loro sforzi sulla quadratura del cerchio, colla speranza di un grosso premio promesso da un'Accademia... imaginaria!

Allo scopo appunto di rendere il lavoro del Klein più facilmente accessibile ai nostri matematici, il prof. F. Giudice ne ha intrapresa una versione italiana, di cui gli editori Rosenberg e Sellier di Torino hanno coraggiosamente assunto la pubblicazione. Di ciò va dato all'uno e agli altri sincera lode; poichè chi scrive o stampa di matematica in Italia non può attendere alcun compenso, tranne tutt'al più l'intima soddisfazione di aver fatto cosa utile e buona. Noi speriamo tuttavia che il nome dell'autore, la natura dell'argomento e la piccola mole del libro incoraggeranno il nostro pubblico matematico a far buon viso alla nuova pubblicazione, e che, come gl'insegnanti tedeschi sono accorsi numerosi ad ascoltare la parola dell'illustre maestro, così i nostri giovani professori vorranno tutti leggerne e meditarne lo scritto. È questo il migliore augurio che possiamo fare al traduttore ed agli editori.

Mantova, 22 settembre 1895

G. Vivanti.

Zum Infinitärcalcul.

Mit Befremden bemerke ich, dass Herr G. CANTOR in dem auf S. 104 des V Bandes Ihres Journals abgedrackten Briefe den Einwurf, welcher gegen den Infinitärcalcul von P. DU BOIS-REYMOND erhoben werden muss, auch gegen meine Darstellung desselben richtet. Und doch habe ich an allen Stellen, wo ichda von gehandelt habe, ausdrücklich gesagt, dass das System von Functionen, deren « Nullen » unter einander verglichen werden sollen, gehörig zu beschränken sei ([1]). Ich wähle unter den Functionen, welche bei $\lim x = +0$ den Grenzwerth $+0$ haben, jene Functionen $f(x)$ aus, welche die Eigenschaft haben, dass *der Quotient von je zweien von ihnen bei lim* $x = +0$ *einen* (endlichen oder unendlichen) *Grenzwerth hat.* Jeder solchen Function $f(x)$ werde ein Ding ingeordnet, das « die Null von $f(x)$ » heissen und mit $\mathrm{u}(f(x))$ bezeichnet werden mag. Ist $g(x)$ eine andere von diesen Functionen, so heisse $\mathrm{u}(f(x))$ gleich $\mathrm{u}(g(x))$, wenn der Quotient $f(x):g(x)$ bei $\lim x = +0$ einen endlichen, von Null verschiedenen Grenzwerth hat, dagegen sei $\mathrm{u}(f(x))$ grösser oder kleiner als $\mathrm{u}(g(x))$, je nachdem $f(x):g(x)$ bei $\lim x = +0$ den Grenzwerth $+0$ oder $+\infty$ hat. Nunmehr sind die Dinge $\mathrm{u}(f(x))$ zu Grössen (im Sinne von H. Grassmann) gemacht. Sollen unter den Grössen $\mathrm{u}\{f(x)\}$ Verknüpfungen vorgenommen werden, so muss das System der Functionen $f(x)$ noch weiter beschränkt werden.

Nach dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft ist es freilich nicht möglich, eine explicite Definition der obigen Functionensystems zu geben. Immerhin giebt es aber Systeme von Functionen, welche die genannte Beschaffenheit besitzen. Man braucht nur von den Ausdrücken, welche rational gebildet sind aus einer endlichen Anzahl von positiven Potenzen der Functionen

$$x\,,\quad \lambda_1(x) = -1 : \mathrm{l}x\,,\quad \lambda_2(x) = -1 : \mathrm{l}(\lambda_1(x)) \,\ldots..\, [\lambda_n(x) = -1 : \mathrm{l}(\lambda_{n-1}(x))]$$

([1]) Vgl. z. B. meines Vorles. ü. allgemeine Arithmetik I. S. 213 und dazu II. S. 325.

und der reciproken Werthe von

$$e^{1:x} = e_1(1:x) \qquad e_1(e_1[1:x]) = e_2(1:x) \;\ldots..\; [e_1(e_{n-1}[1:x]) = e_n(1:x)]$$

jene zurückzubehalten, welche bei $\lim x = +0$ den Grenzwerth $+0$ haben ([1]).

Man wird freilich sagen, durch die vorstehenden Beschränkungen des den neuen Grössen zu Grunde liegenden Functionensystems büssen diese Grössen ihr haptsächliches Interesse ein. Das mag richtig sein. Allein darauf kommt es nicht an; von Bedeutung ist lediglich die Frage, ob solche Grössen zulässig seien. Und diese muss ich bejahen. Ist ja das Verfahren, nach welchem sie eingeführt werden, kein anderes, als das von EUCLID im V Buch der Elemente angewandte, um zu den Verhältnissen der gleichartigen geometrischen Grössen zu gelangen. In der That ordnet er je zweien solchen Grössen bei gegebener Aufeinanderfolge ein Ding, ihr Verhältniss, zu und definirt sodann bloss die gleichen Verhaltnisse und das grössere Verhältniss unter je zweien ungleichen.

In dem soeben erwähnten, besonderen Systeme von « Nullen » erscheint neben den positiven Zahlen α als Exponenten der positiven Potenzen x^α die Grösse $\mathrm{u}(\lambda_1(x))$, welche Herr CANTOR a. a. O. mit j bezeichnet. Sie ist zufolge der obigen Definition kleiner als jede positive Zahl, also, da die Null und die negativen Zahlen im genannten Grössensysteme nicht vorkommen, sicher keine reelle Zahl. Daher ist, wenn man das Symbol x^j überhaupt gebrauchen will, zunächst dessen Bedeutung festzustellen. Solange als dies nicht geschehen ist, kann die scharfsinnige Erörterung des Herrn CANTOR über jene Grösse j nicht überzeugend wirken.

Am 1 October 1895.

O. STOLZ.

([1]) Bekanntlich hat jeder solche Ausdruck bei $\lim x = +0$ einen Grenzwerth.

“ Association internationale pour l’avancement des Quaternions, et d’autres méthodes vectorielles ”

M.

Les notions mathémathiques liées au traitement direct de vecteurs et de fonctions vectorielles attirent de plus en plus l’attention des géomètres et des physiciens. Il y a cinquante ans environ les bases de la théorie des vecteurs furent amplement développées dans l’ouvrage de Hamilton : « *Elements of Quaternions* » et dans celui de Grassmann: « *Ausdehnungslehre* ». Dans sa seconde oeuvre monumentale Hamilton donna un calcul vectoriel complet et applicable a toutes sortes de problèmes et particulièrement aux problèmes géométriques et physiques. Ces deux systèmes qui se distinguent de toutes les autres méthodes mathématiques par leur richesse de transformations, leur généralité de traitement, leur simplicité d’expression et d’interprétation, n’ont pas été dûment appréciés et développés.

Cependant le besoin toujours croissant d’un calcul vectoriel ou du moins d’une manière d’écrire vectorielle compacte surtout en rapport avec le progrès considérable de la théorie de l’électricité a porté plus d’un savant des dernières années à introduire un nouveau système. Tous ces systèmes cependant ont beaucoup de commun avec ceux que Hamilton et Grassmann ont développés.

C’est pourquoi il nous parait que le temps est venu de réunir nos forces, afin que ceux qui cultivent cette branche importante de la science puissent apprendre à se connaître et que l’intérêt des autres mathématiciens puisse être excité et entretenu.

Poussés par ces considérations nous avons l’honneur de proposer l’organisation de ce que nous nommerons provisoirement: *Association internationale pour l’avancement des Quaternions et d’autres méthodes vectorielles.*

Une telle association pourrait faire beaucoup pour la propagation de l’analyse vectorielle. Un journal paraissant de temps à autre pourrait mettre les membres de l’association en contact avec les différentes formes de cette science et pourrait faciliter les discussions sur l’introduction et l’acceptation de nouvelles manières d’écrire.

Nous avons tâché de développer dans ce peu de lignes la tâche importante de la nouvelle association: il va sans dire que nous accueillerons avec empressement chaque observation qui puisse améliorer cette organisation. Inutile de dire que nous ne faisons que préparer le terrain; dès que l’association sera constituée, nous serons prêts à confier à des personnes plus compétentes que nous le soin de veiller à ses intérêts. Nous espérons de grand cœur que nos efforts seront sympathiques à tous les amis de cette branche des sciences mathématiques et que nous ne tarderons pas à recevoir les preuves de leur adhésion.

P. MOLENBROEK (la Haye, Pays-Bas).
S. KIMURA (Yale-University, U. S. A.)

Octobre, 1895.

NB. Nous prions ceux qui demeurent in Europe de s’adresser au premier signataire, et ceux qui demeurent en Amérique de s’adresser au second.

La R. d. M., mentre appoggia vivamente siffatto progetto, terrà informati i lettori del suo sviluppo.

Le forme geometriche prospettive.

Nota del Prof. DIEGO FELLINI *(Forlì)*

L'illustre Prof. L. CREMONA [1] chiama *prospettive*:

due punteggiate se sono sezioni di uno stesso fascio di raggi;

due fasci di raggi se proiettano una medesima punteggiata da due centri diversi, ovvero se sono sezioni di uno stesso fascio di piani;

due fasci di piani se proiettano uno stesso fascio di raggi da due centri diversi;

una punteggiata ed un fascio di raggi, ovvero un fascio di raggi e un fascio di piani, se la prima forma è una sezione della seconda;

due piani se sono sezioni di una medesima stella;

due stelle se proiettano uno stesso piano da due centri diversi;

un piano ed una stella, se il piano è una sezione della stella.

Però questa definizione non è integralmente adottata dai vari autori. Così ad esempio l'illustre prof. V. MURER [2], premesso doversi intendere per *congiungente due punti* la retta che li unisce, per *congiungente un punto e una retta* il piano che per essi passa, espone la seguente definizione:

Due forme proiettive si diranno in particolare prospettive se le congiungenti o le intersezioni delle coppie di elementi corrispondenti si trovano in una medesima forma fondamentale: oppure se l'una è contenuta nell'altra.

E, a parlare con maggior diffusione, si diranno prospettive:

a) *Due punteggiate se sezioni dello stesso fascio di raggi;*

b) *Una punteggiata e un fascio di raggi o di piani, se la prima è sezione del secondo;*

c) *Due fasci di raggi se proiezioni della stessa punteggiata o sezioni dello stesso fascio di piani;*

(1) *Elementi di Geometria Proiettiva* di LUIGI CREMONA (1873), pag. 21.

(2) *Primi elementi di Geometria Proiettiva e Descrittiva* del Dott. VITTORIO MURER (1885), pag. 15.

d) *Un fascio di raggi ed uno di piani se il primo è sezione del secondo;*

f) *Due fasci di piani se proiezioni dello stesso fascio di raggi;*

g) *Due sistemi piani se sezioni della stessa stella;*

h) *Due stelle se proiezioni dello stesso sistema piano;*

l) *Una stella e un sistema piano se il secondo è una sezione della prima.*

Ora il dettaglio che tiene dietro alla definizione generale, mentre considera come prospettivi una punteggiata ed un fascio di piani se la prima è sezione del secondo (caso che non figura fra quelli enumerati dal CREMONA), non contempla però tutti i casi compresi nella definizione premessa, poichè per essa sono prospettivi anche:

Una punteggiata ed un fascio di raggi se sezioni di uno stesso fascio di piani;

Un fascio di piani ed un fascio di raggi se proiettano una stessa punteggiata.

L'illustre prof. F. ASCHIERI [1] dà la definizione seguente:

Due forme fondamentali di 1ª e 2ª specie si dicono prospettive se si deducono l'una dall'altra con una sola operazione. E si dicono prospettive le seguenti coppie di forme:

Due punteggiate che siano sezioni di uno stesso fascio di raggi;

Due fasci di raggi che essendo in uno stesso piano proiettano una stessa punteggiata;

Due sistemi piani che siano sezioni di una stessa stella;

Due stelle che proiettano uno stesso sistema piano.

Vale a dire che Egli come il MULLER, ed al contrario del CREMONA, considera come prospettivi una punteggiata ed un fascio di piani, se la prima è sezione del secondo; considera come prospettivi due fasci di raggi che proiettano una stessa punteggiata, solo quando siano situati in uno stesso piano, e non quindi se sono sezioni di uno stesso fascio di piani; e non considera affatto come prospettivi due fasci di piani che proiettano da centri diversi uno stesso fascio di raggi.

Qualunque sia il modo di vedere, due forme, solo perchè si trovano in una delle suaccennate condizioni, non godono di alcuna proprietà comune; tanto varrebbe allora considerare come prospettive anche due punteggiate sezioni di uno stesso fascio di piani e dire senz'altro in generale:

Sono prospettive due forme se una è sezione dell'altra, o se tutte e due sono sezioni o proiezioni di una terza.

(1) F. ASCHIERI. — *Geometria Proiettiva* (Manuale Hœpli, 1886), pag. 27.

Crediamo invece più opportuno tener presente che le forme sono figure, e che quindi (a meno che non si voglia dare alla parola *prospettiva* due significati diversi, secondochè si tratta di figure o semplicemente di forme) il concetto di prospettività delle forme deve rientrare nel concetto generale di prospettività delle figure.

Secondo STEINER e STAUDT *sono prospettive due figure se ai punti* A, B, C,... *dell'una corrispondono i punti* A', B', C',... *dell'altra in base ad una legge qualsivoglia, e se le due figure si trovano in tale posizione che le rette* AA', BB', CC',... *congiungenti i punti corrispondenti formino una stella di raggi, cioè passino per uno stesso punto (a distanza finita od infinita).*

Per questa definizione adottata pure dal BALTZER (1) e dal CREMONA (2), venendo a parlare delle forme geometriche, sono prospettive due punteggiate e sono prospettivi due sistemi piani (piani punteggiati), se sono rispettivamente sezioni dello stesso fascio di raggi e della stessa stella (stella di raggi). I centri di proiezione e prospettività di due punteggiate prospettive e di due sistemi piani prospettivi sono rispettivamente i centri del fascio di raggi e della stella di cui sono sezioni. Due punteggiate prospettive hanno un elemento unito, il punto comune alle due rette sulle quali si trovano; due sistemi piani hanno un elemento unito, la retta (punteggiata) comune ai due piani sui quali si trovano.

Con ciò nulla è tolto al concetto generale di figure prospettive. Dalla prospettività, come caso particolare, si ha poi l'omologia, e da quest'ultima l'omotetia.

(1) *Elementi di Matematica* del Dott. RICCARDO BALTZER, Prima versione italiana per LUIGI CREMONA. — Parte 5ª. *Stereometria* (1867), pag. 73.

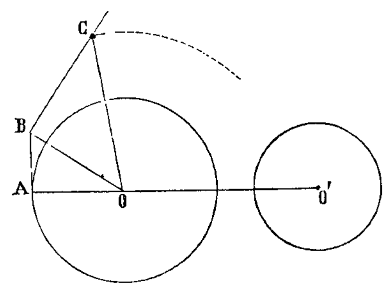
(2) Opera citata, pag. 3.

Sobre los circolos radicales

por Don Juan J. Duràn Loriga. - Comandante de Artilleria; Coruña-Spagna

Se sabe que el lugar geometrico de los puntos tales que sus potencias con relacion á dos circunferencias fijas guardan la relacion $\frac{m}{n}$ es una circunferencia, y si suponemos $m = -n$, esta linea tambien será el lugar de los puntos que tienen respecto á otras dos de esta clase potencias iguales y de signos contrarios y que la analogia nos conduce á llamarla *circunferencia radical* (*) de las propuestas. Es muy facil determinar su centro y radio.

Llamenos P_o y $P_{o'}$ las potencias de un punto P del plano respecto á las circunferencias O y O' (fig. 1ª). Se tendrà $P_o = -P_{o'}$ ó lo que es lo mismo, llamando l y l' las distancias de P á los centros y d la distancia O O'



$$l^2 - R^2 = R^2 - l^2$$

es decir

$$l^2 + l'^2 = R^2 + R'^2$$

El centro de la circunferencia que buscamos será por consiguiente el medio de O O' y su radio será

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{2(R^2 + R'^2) - d^2}$$

(*) Algunos Autores en particular los ingleses llman « circulo radical » (radical circle) al que corta ortogonalmente á otros tres pero nos parece preferible la denominacion muy usada de « circulo ortotomico » y llamar circulo radical al que es objeto de este estudio.

Para que la circunferencia radical exista es preciso que se tenga

$$d < \sqrt{2(R^2 + R'^2)}$$

esta condicion se cumple siempre, cuando las circunferencias son tangentes (ya exteriores ó interiores), secantes, ó interiores pero si son exteriores podrá existir ó no la circunferencia radical.

Cuando las circunferencias son secantes, teniendo evidentemente que pasar la circunferencia radical por los dos puntos de corte (de potencia cero), podrá describirse inmediatamente.

Cuando son tangentes exteriores, la circunferencia radical será tangente interior á la de mayor radio y en el punto de tangencia de las dadas (puesto que este punto tiene potencia cero respecto á ambas) y como su centro es en todos los casos el medio de la linea de centros, es tambien su trazado inmediato.

Si se quiere numericamente determinar su radio sin recurrir al hecho visto á priori, se hara $d = R + R'$ en el valor de ρ y resulta como es consiguiente $\rho = \frac{1}{2}(R - R')$.

Si son tangentes interiores tambien resultarà la circunferencia radical tangente á las dadas y su radio serà $\rho = \frac{1}{2}(R + R')$.

Si las circunferencias son concentricas, tambien lo serà con ellas la radical y su radio se obtendra haciendo $d = 0$ en el valor ρ con lo que resulta

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{2(R^2 + R'^2)}$$

Para el trazado grafico de la circunferencia radical de dos exteriores (cuando existe) 0' de dos interiores se utilizaran las consideraciones que vamos à exponer.

Consideremos tres circunferencias O, O' y O'', llamemos $\pi_{00'}$ la circunferencia radical de O y O' y $\pi_{00''}$ la de O y O''; si estas circunferencias se cortan se tendrá en los puntos de interseccion

$$\left\{\begin{array}{l} P_0 = -P_{0'} \\ P_0 = -P_{0''} \end{array}\right. \quad \text{por consiguiente } P_{0'} = P_{0''}$$

es decir que el eje radical de O' y O'' lo es tambien de $\pi_{00'}$ y $\pi_{00''}$

Cuando las circunferencias radicales no se cortan, tambien, es facil dar una demostracion geometrica y aun mas sencillo, demostrarlo analiticamente, como haremos mas adelante.

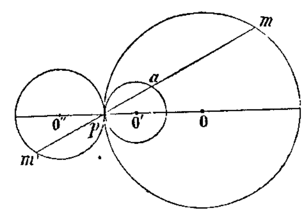
Esta observacion sugiere el medio de encontrar la circunferencia radical de dos exteriores (si existe) ó de dos interiores O y O'. Cortense por una tercera O'', determinese la circunferencia radical de O y O'' y el eje radical de O' y O'' y se tendrà uno ó dos puntos de la circunferencia que se quiere determinar y de la que el centro es conocido.

La circunferencia O'' debe elegirse de un modo conveniente para que se corten el eje y circunferencia radical auxiliares, lo cual es facil conseguir.

Puede verse graficamente si existe la circunferencia radical en el caso de ser las dadas exteriores (unico caso en que puede haber imposibilidad) por la siguiente construccion. Levantase en el extremo del radio OA (fig. 1ª) la perpendicular AB igual al radio R' de la otra circunferencia, unase O con B tracese la perpendicular BC = OB y si la circunferencia descrita con el radio OC envuelve el centro O' la circunferencia radical existe.

La sencillez de esta construccion evita otras explicaciones.

Cuando dos circunferencias son ortogonales, se ve claramente que la radical pasa por los centros de ellas, como se deduce tambien del valor de ρ pues siendo $R^2 + R'^2 = \overline{OO'}^2$ resulta $\rho = \frac{1}{2}OO'$. La reciproca es tambien cierta como se ve facilmente.



La consideracion de circunferencias radicales permite resolver inmediatamente el seguiente problema.

Se tienen dos circunferencias tangentes, por ejemplo interiores, O y O' (fig. 2ª) de radios respectivos R y R' por el punto de tangencia p se trazan secantes, tales como $p\,a\,m$ y se toma en sentido contrario una longitud $am' = am$. ¿Cual es el lugar geometrico de el punto m'?

Tracemos la circunferencia O'' que tenga por circunferencia radical respecto á la O, la O' y se tendrá en valor absoluto $ap.\,am = ap.\,am'$ y por lo tanto $am' = am$, el lugar buscado es por consiguiente la circunferencia O''; para determinar su radio x, notemos que se tiene $R' = \frac{1}{2}(R - x)$ de donde se deduce $x = R - 2R'$. La circunferencia encontrada es tangente exterior ó interior á la O segun sea $R - 2R' \gtrless 0$.

Si la circunferencia O' pasa por el punto O el lugar geometrico se reduce al punto p lo cual es evidente.

Hemos dicho anteriormente que si se tienen tres circunferencias O, O' y O'' y se determinan las radicales de dos grupos OO' y OO'' por ejemplo, el eje radical de estas circunferencias radicales es el mismo que el de las del tercer grupo. — Esto permite demostrar con gran sencillez que las circunferencias descritas sobre las medianas de un triangulo como diametros, tienen de dos en dos por eje radical las alturas de dicho triangulo. Observemos en efecto que si sobre los lados de un triangulo como diametros se describen circunferencias, las radicales de estas, son las trazadas sobre las medianas (asi p. e. la correspondiente á las descritas sobre b y c es la que tiene por diametro la mediana relativa al lado a), resulta pues en virtud de nuestra observacion que los ejes radicales de las últimas seran los mismos que los correspondientes á las primeras, es decir las alturas del triangulo. Tenemos pues seis circunferencias que tienen por centro radical comun el ortocentro del triangulo dado.

Si consideramos ahora las circunferencias descritas desde los medios de los lados como centros con un radio igual á las medianas correspondientes y á las que hemos llamado por ciertas razones que en otra ocasion espusimos circunferencias potenciales (vease nuestra nota del Progreso matematico tomo V pag. 70), es evidente que dichas circunferencias son las descritas tomando como diametros las medianas del triangulo anticomplementario, pero por otra parte en virtud de lo anteriormente dicho, estas circunferencias son las radicales de las descritas sobre los lados de este último triangulo, podemos en consecuencia decir que las circunferencias descritas desde los vertices de un triangulo como centros con radios iguales á los lados opuestos tienen por circunferencias radicales, las potenciales de dicho triangulo y que por lo tanto su centro radical es el ortocentro del triangulo anticomplementario del propuesto. Fenemos pues un segundo grupo de seis circunferencias que tienen el mismo centro radical.

Hemos dicho que cuando dos circunferencias son ortogonales la circunferencia radical tiene por diametro la linea de centros y como el circulo de Longchamps es ortotomico de los descritos desde los vertices como centros con radios iguales á los lados opuestos, resulta que las circunferencias que tienen por diametros las rectas que unen los vertices de un triangulo con el ortocentro de su complementario son las radicales del circulo de Longchamps y de los otros tres de que hemos hecho merito.

El mismo criterio puede servir para encontrar las circunferencias radicales de algunas otras del triangulo, pero en todos los casos puede recurrirse á la geometria analitica, es en efecto evidente que si $C=0$ y $C'=0$ son las ecuaciones de dos circunferencias, la de la radical será $C+C'=0$ ya se trate de coordenadas, cartesianas ó trilineales, asi la circunferencia radical de las rapresentadas por las ecuaciones

$$x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$$
$$x^2+y^2+2A'x+2B'y+C'=0$$

es la siguiente

$$x^2+y^2+(A+A')x+(B+B')y+\tfrac{1}{2}(C+C')=o$$

y si en particular se toma por eje de las X la linea de centros y una de ellas tiene el suyo en el origen (suponemos rectangular el sistema) la circunferencia radical será

$$\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)^2+y^2=\frac{2(R^2+R'^2)-\alpha^2}{4}$$

resultado que comprueba lo que anteriormente hemos dicho, que para que la circunferencia radical exista tiene que ser la distancia de centros menor que $\sqrt{2(R^2+R'^2)}$. Si esta distancia es $\sqrt{2(R^2+R'^2)}$ la circunferencia se reduce á un punto situado en la linea de centros, interiormente á la circunferencia de mayor radio y á una distancia de su centro igual á la anterior cantidad radical dividida por dos.

Si se trata de coordenadas baricentricas y las circunferencias dadas son

$$\Sigma\alpha\times\Sigma u\alpha-\Sigma a^2\rho\Upsilon=0$$
$$\Sigma\alpha\times\Sigma u'\alpha-\Sigma a^2\rho\Upsilon=0$$

la circunferencia radical es

$$\Sigma\alpha.\Sigma(u+u')\alpha-2\Sigma a^2\rho\Upsilon=0$$

Es muy facil probar analiticamente un hecho que anteriormente hemos consignado y es que si tenemos tres circunferencias O, O', O'' y las agrupamos de dos en dos, el eje radical de las circunferencias radicales de dos grupos lo es del tercer grupo. — Tenemos en efecto llamando.

$$C=0\ ..\ C'=0\ ..\ C''=0$$

las ecuaciones de las tres circunferencias dadas.

$$\text{La circunferencia radical de}\left\{\begin{array}{l}C=0\\ C'=0\end{array}\right.\text{ es } C+C'=0$$

$$\text{Eje radical de}\left\{\begin{array}{l} C+C'=0 \\ C+C''=0 \end{array}\right. \text{es } C'-C'=0$$

$$\text{La circunferencia radical de}\left\{\begin{array}{l} C=0 \\ C''=0 \end{array}\right. \text{es } C+C''=0$$

$$\text{Eje radical de}\left\{\begin{array}{l} C'=0 \\ C''=0 \end{array}\right. \text{es } C'-C''=0$$

Si despues de encontrar las circunferencias radicales de tres dadas operamos lo mismo (cuando es posible) con las que sucesivamente vamos obteniendo, podran resultar series triples de circulos sometidos á ciertas ligazones cuyo estudio puede ser curioso.

La consideracion de circunferencias radicales en la geometria del triangulo relacionando las relativas á circulos notables de este, con otros circulos, rectas y puntos ligados al mismo, podrá quizas dar lugar à resultados interesantes, pero faltos hoy de tiempo para hacer un estudio detenido solo hemos apuntado ideas, que nos proponemos desarrollar en otra ocasion.

La Coruña, Junio 95.

JUAN J. DURÀN LORIGA.

ELENCO BIBLIOGRAFICO

sull' " Ausdehnungslehre „ di H. Grassmann

Hermann Grassmann (1809-1877) pubblicò il suo capolavoro « *Ausdehnungslehre* » nel 1844. Ma per lunghi anni su questo libro regnò il silenzio. Solo da poco si va sempre più riconoscendo la potenza di questo nuovo strumento per trattare le più svariate parti della matematica: determinanti, invarianti, geometria analitica e projettiva, fisica matematica, ecc.

Nell'elenco che segue non sono menzionati i lavori del Grassmann, poichè ora si stanno appunto stampando le sue opere complete. Su questa pubblicazione vedasi: Rivista di Matematica, a. 1894, p. 167; Bulletin des sciences mathématiques, a. 1895, p. 234; e specialmente l'ampia ed importantissima relazione: V. SCHLEGEL, *Die Grassmann'sche Ausdehnungslehre*; ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik in den letzten fünfzig Jahren, nel Zeitschrift für Mathematik, a. 1896.

Questo elenco non contiene i lavori sul calcolo geometrico che precedettero quelli di Grassmann, quali quelli di Möbius, Bellavitis, ecc., nè quelli che seguirono cronologicamente, benchè indipendentemente, quali quelli di Cauchy, St Venant, e specialmente quanto si riferisce ai quaternioni di Hamilton.

(P.)

ALLÉ — *Ueber die Ableitung der Gleichungen der drehenden Bewegung eines starren Körpers nach der Grassmann'schen Analyse.* Mittheilungen der deutschen math. Gesellschaft in Prag, 1892, p. 64.

R. S. BALL — *The theory of schrews.* Dublin, 1876.

H. BURKHARDT — *Ueber Functionen von Vectorgrössen, welche selbst wieder Vectorgrössen sind. Eine Anwendung invariantentheoretischer Methoden auf eine Frage der mathematischen Physik.* Math. Annalen, Bd. 43, a. 1893.

— Nachrichten v. d. K. Gesellschaft d. W. z. Göttingen, 1893.

E. Carvallo — *Sur une généralisation du théorème des projections.* Nouvelles Annales, t. IX, 1891. — Rivista di Matem., I, pag. 269.
— *Sur les surfaces minima.* Bulletin des sciences mathém., 1894.
— *La méthode de Grassmann.* Nouvelles Annales, 1892.
— *Théorèmes de mécanique.* Nouvelles Annales, 1893.
— *Nouveau théorème de mécanique.* Nouvelles Annales, 1893.
— *Sur les forces centrales.* Nouv. Ann., 1893 (Riv. di Mat., III, p. 137).
— *Sur les systèmes linéaires.* Monatshefte f. Math. u. Physik, t. 2.
— *Exposition d'une méthode de M. Caspary, pour l'étude des courbes gauches.* Bulletin de la Société math. de France, t. XV, a. 1887.
F. Caspary — *Sur une méthode générale de la géometrie qui forme le lien entre la géométrie synthétique et la géométrie analytique.* Bull. des Sciences Mathém., t. XIII, 1889.
— *Nouvelles manières d'exprimer au moyen des fonctions hyperelliptiques de primière espèce, les coordonnées etc.* Bull. des Sciences Mathém., t. XV, 1891.
— *Ueber einige Determinanten-Identitäten, welche in der Lehre von den perspectivischen Dreiecken vorkommen.* Crelle's Journal, t. 95, p. 36.
— *Ueber die Erzeugung algebraischer Raumcurven durch veränderliche Figuren.* Crelle's Journal, t. 100, p. 405.
F. Castellano — *Alcune applicazioni cinematiche della teoria dei vettori.* Rivista di Matematica, 1892, pag. 19.
— *Lezioni di Meccanica razionale*, Torino 1894 (Rivista di Matematica, a. 1895, p. 11).
Chelini — *Sulla composizione geometrica dei sistemi di rette, di aree e di punti.* Mem. Acc. Bologna, 1871.
— *Nuova geometria dei complessi.* Id., 1871.
Clifford — *Applications of Grassmann's extensive Algebra.* American Journal of Math., I, p. 350.
Homersham Cox — *Application of Grassmann's Ausdehnungslehre to properties of circles.* Quaterly Journal, a. 1890.
L. Cremona — *Elementi di Calcolo grafico.* Torino 1874.
Dillner — *Théorie du Calcul géométrique.* Tidskrift för Matem. och Fysik, 1869.
B. Élie — *La fonction vectorielle et ses applications à la Physique.* Mém. Soc. Bordeaux, 1893, pag. 1-137.
Favaro — *La statica grafica.* Venezia 1873.
J. W. Gibbs — *Elements of vector analysis.* New-Haven, 1884.
H. Grassmann (jun.) — *Anwendung der Ausdehnungslehre auf die allgemeine Theorie der Raumkurven und krummen Flächen.* Halle a/S. 1888.
— *Punktrechnung und projective Geometrie.* Halle 1894.

E. W. Hyde — *Calculus of direction and position.* American Journal of Math., VI, pag. 1.
— *The schrew as a unit in a Grassmannian System of the sixth order.* Annals of Mathematics, vol. VIII.
Kirchner — *Ein Beitrag zur Bewegung unveränderlicher ebener Sisteme.* Programm Meiningen, 1887.
F. Kraft — *Abriss des Geometrischen Kalküls,* Leipzig, Teubner, 1893, p. 255.
Kraft — *Aequivalenz der Linientheilsysteme.* Schlöm. Zeitschr., 1894.
Lüroth — *Grundriss der Mechanik,* 1881.
A. Macfarlane — *Principles of the Algebra of Physics.* Proceed. of the American J. for the Adv. of. S., vol. XL, 1891.
Mahler — *Einleitung in die Ausdehnungslehre* (Schulprogramm der Gymnasienns in Ulm, 1883-84).
R. Mehmke — *Ueber eine allgemeine Construction der Krümmungsmittelpunkte ebener Curven und eine neue Begründung der Fundamentalsätze der Flächentheorie.* Rivista di Matem., II, pag. 65.
— *Ueber die Aenderung der Hauptkrümmungen einer Fläche bei einer beliebigen Berührungstransformation.* Riv. di Matem., II, p. 159.
— *Ueber die Bewegung einer starren ebenen Systems in seiner Ebene.* Schlöm. Zeitschrift, t. 35, a. 1889.
— *Anwendung der Grassmann'schen Ausdehnuugslehre auf die Geometrie der Kreise in der Ebene.* Stuttgart 1880.
— *Ueber zwei, die Krümmung von Curven und das Gauss'sche Krümmungsmaass von Flächen betreffende charakteristische Eigenschaften der linearen Punkttransformationen.* Schlöm. Zeitschr., a. 1891.
— *Kleine Beiträge zu den Anwendungen der Methoden von Grassmann.* Schlöm. Zeitschrift, 1892.
— *Ueber die Bestimmung von Trägheitsmomenten mit Hülfe Grassmann'scher Methoden.* Math. Ann., t. XXIII, pag. 143.
— *Ueber die Geschwindigkeiten beliebiger Ordnung.* Civilingenieur, t. XXIX.
— *Eine mathematische Aufgabe,* 1886.
— *Einfache Darstellung der Trägheitsmomenten.* Schlöm. Zeitschr. 1883.
E. Müller — *Die Kugelgeometrie nach den Prinzipien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre.* Monatshefte für Math., t. III.
— *Neue Methode zur Ableitung der Statischen Gegetze.* Mittheilungen des k. k. Technologischen Gewerbe-Museums in Wien, 1893, p. 17-72.
— *Die Liniengeometrie nach den Prinzipien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre.* Monatshefte f. Math. u. Ph., 1891.
— *Anwendung der Grassmann'schen Methoden auf die Theorie der Curven und Flächen zweiten Grades.* Crelle J., t. 115, a. '95, p. 234.

H. Noth — *Aritmetik der Lage,* a. 1882.

G. Peano — *Calcolo Geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann.* Torino 1888.

— *Gli elementi di calcolo geometrico.* Torino 1891.

— *Die Grundzüge des Geometrischen Calculs; deutsche Aufg. v. Schepp.* Leipzig 1891.

— *Teoremi su massimi e minimi geometrici, e su normali a curve e superficie.* Rend. Circolo Mat. Palermo, 1888.

— *Lezioni di analisi infinitesimale.* Torino 1893.

— *Sulla definizione dell'area d'una superficie.* Rend. Accad. Lincei, 1890, pag. 54.

— *Sul moto del polo terrestre.* Atti Acc. Torino, 5 maggio e 6 giugno 1895.

L. Schendel — *Grundzüge der Algebra, nach Grassmann'schen Prinzipien.* Halle 1895.

V. Schlegel — *Ueber die geometrische Darstellung des Imaginären vom Standpunkte der Ausdehnungslehre.* Schlöm. Zeitschr., XXIII, p. 141.

— *Ueber neuere geometrische Methoden und ihre Verwandschaft mit der Grassmann'schen Ausdehnungslehre.* Id., XXIV, p. 83.

— *Untersuchungen über eine Fläche dritter Ordnung mittelst der Grassmann'schen Ausdehnungstheorie.*

— *System der Raumlehre, nach den Prinzipien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre.* Leipzig 1872-75.

— *On the problem of the minimum sum of the distances of a point from given points.* Bulletin of the American Math. Society, 1894.

— *Die Hauptmethoden der* Grassmann'*schen Ausdehnungslehre in ihrer Anwerdung auf die Mechanik dargestellt.* Civilingenieur, XL Band, 1894.

— *Zwei Sätze vom Schwerpunkt.* Schlöm. Zeitschrift, Bd. XXI.

— *Sur le théorème de M. Laisant.* Bull. Société math. de France, t. X.

— *Zum Gauss'schen Fundamentalsatz der Axonometrie.* Hoffmann's Zeitschr., Bd. XVIII.

Sturm — *Sulle forze in equilibrio.* Annali di Mat., t. VII, pag. 217.

Sulle proprietà caratteristiche delle varietà a una dimensione

Nota di G. Vailati *in Torino.*

In una Nota « *Sulle relazioni di posizione tra i punti d'una linea chiusa* » pubblicata recentemente in questa Rivista (Vol. V, pag. 75) ho assunto a base d'uno studio elementare sulle proprietà caratteristiche delle varietà a una dimensione la possibilità di definire, tra i loro elementi, una relazione che soddisfi alle condizioni espresse dalle seguenti formole (nelle quali S_1 sta per indicare la classe degli elementi che appartengono alla varietà che si considera ed il segno $||$ designa la relazione che si vuol definire):

$a, b, c, d \,\varepsilon\, S_1 \,.\supset:$

(1) $ab \,||\, cd \,.=.\, cd \,||\, ab$

(2) $ab \,||\, cd \,.=.\, ab \,||\, dc$

(3) $ab \,||\, cd \,.\, ac \,||\, bd \,.=.\, \Lambda$

(4) $ab \,||\, cd \,.\cup.\, ac \,||\, bd \,.\cup.\, ad \,||\, bc$

$a, b, c, d, e \,\varepsilon\, S_1 \,.\supset:$

(5) $ab \,||\, cd \,.\, ac \,||\, be \,.\supset.\, ac \,||\, de$

(6) $ab \,||\, cd \,.\, ac \,||\, be \,.\supset.\, cd \,||\, be$

(7) $ab \,||\, cd \,.\, ab \,||\, ce \,.\, ab \,||\, de \,.=\, \Lambda \,.$

Osservavo poi che ad esaurire la trattazione dell'argomento da questo punto di vista sarebbe stato necessario verificare se le dette proposizioni, oltre a esser sufficienti per la deduzione di tutte le proprietà della relazione a cui si riferiscono, fossero anche tutte necessarie, se non ve ne fosse cioè tra esse alcuna che si potesse dedurre dalle rimanenti.

Partendo ora da considerazioni suggeritemi da un lavoro recentemente pubblicato (*) nel quale questa stessa questione è trattata da un

(*) *Sui principî che reggono la Geometria di posizione.* Memoria del Dott. Mario Pieri (Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, 1894-5). V. il capitolo che porta il titolo: *Principî sul separarsi e sulla connessione degli elementi d'una forma di* 1ª *specie.*

altro punto di vista, sono riuscito a dedurre le proposizioni (6) e (7) dalle altre cinque.

Per dimostrare la (6) osservo anzi tutto che la (5), mediante lo scambio delle lettere a, b rispettivamente con c, d, si trasforma nella seguente:

$$(5') \qquad cd \parallel ab \,.\, ca \parallel de : \supset ca \parallel be$$

la quale ultima, scambiandovi a e b rispettivamente con d ed e, dà luogo a quest'altra:

$$(5'') \qquad ca \parallel de \,.\, cd \parallel ab : \supset cd \parallel be \,.$$

Ora le (5) e (5') possono essere anche scritte rispettivamente come segue:

$$ab \parallel cd \,.\, \supset : ac \parallel be \,.\, \supset \,.\, ac \parallel de$$
$$cd \parallel ab \,.\, \supset : ca \parallel de \,.\, \supset \,.\, ca \parallel be$$

dalle quali, tenendo conto delle (1) e (2), si ricava:

$$ab \parallel cd \,.\, \supset : ca \parallel be \,. = .\, ca \parallel de \,.$$

Sostituendo ora nella (5''), all'espressione $ca \parallel de$ l'altra $ca \parallel be$, ora dimostrata equivalente, si ottiene:

$$ca \parallel be \,.\, cd \parallel ab : \supset cd \parallel be$$

la quale, applicando di nuovo le (1) e (2), dà immediatamente la (6).

Passo ora a dimostrare la (7). Tenendo conto della (4), basterà far vedere che il prodotto delle due espressioni seguenti:

$$bc \parallel de \cup bd \parallel ce \cup be \parallel cd$$
$$ab \parallel cd \,.\, ab \parallel ce \,.\, ab \parallel ed$$

si riduce a Λ. Ora ciò risulta immediatamente dal fatto che ciascuno dei tre termini che si ottengono eseguendo questo prodotto si riducono a Λ in virtù delle (1), (2), (3). Infatti:

$$ab \parallel cd \,.\, ab \parallel ce \,.\, ab \parallel ed \,.\, bc \parallel de : = : cd \parallel ba \,.\, cb \parallel de \,.\, ab \parallel ce \,.\, ab \parallel ed : \supset : cb \parallel ae \,.\, ab \parallel ce \,.\, ab \parallel ed : = \Lambda$$
$$ab \parallel cd \,.\, ab \parallel ce \,.\, ab \parallel ed \,.\, bd \parallel ce : = : dc \parallel ba \,.\, db \parallel ce \,.\, ab \parallel ce \,.\, ab \parallel ed : \supset : db \parallel ae \,.\, ab \parallel ed \,.\, ab \parallel ce : = \Lambda$$
$$ab \parallel cd \,.\, ab \parallel ce \,.\, ab \parallel ed \,.\, be \parallel cd : = ec \parallel ba \,.\, eb \parallel cd \,.\, ab \parallel cd \,.\, ab \parallel ed : \supset : eb \parallel ad \,.\, ab \parallel cd \,.\, ab \parallel ed : = \Lambda \,.$$

Restano in tal modo dimostrate le proposizioni (6) e (7). Si noti che nella dimostrazione della (6) ci siamo serviti solo delle proposizioni (1), (2), (5) senza far uso delle (3) e (4), mentre nella dimostrazione della (7) abbiamo dovuto servirci anche di queste ultime due.

Rimarrebbe a provare che, delle cinque proposizioni che costituiscono ora i soli nostri postulati, nessuna può esser dedotta dalle altre quattro. Perciò, seguendo l'unico metodo di dimostrazione applicabile in casi di questa natura, non occorrerà altro che trovare cinque modi d'interpretare il simbolo $ab \parallel cd$ per ciascuno dei quali non si verifichi una delle cinque condizioni espresse dalle (1)-(5), pure verificandosi le altre quattro (*).

(*) Mentre è in corso di pubblicazione il presente scritto il mio egregio amico Dott. A. Padoa, al quale avevo proposta la soluzione di questa questione, mi annuncia di esser riuscito a stabilire ciò che egli chiama l'*indipendenza ordinata* delle proposizioni (1)-(5), a dimostrare, cioè, che ciascuna di esse, prese nell'ordine secondo il quale sono enunciate, non si può dedurre dalle precedenti. Ecco le quattro interpretazioni del simbolo $ab \parallel cd$ che lo hanno condotto a questo risultato che egli gentilmente mi permette di render qui noto:

Se con $ab \parallel cd$ s'intende: *il segmento di estremi a, b è equipollente a quello di estremi c, d*, è vera la (1) e sono false le altre quattro. Se s'intende: *a dista da b come c da d*, sono vere le (1), (2) e false le altre tre. Se s'intende: *il punto medio del segmento ab coincide col punto medio del segmento cd*, sono vere le (1), (2), (3) e false le altre due. Se infine, essendo $a, b, c \ldots$ punti d'un piano assegnato, s'intende asserire col simbolo $ab \parallel cd$ che *i segmenti finiti ab e cd hanno almeno un punto in comune*, sono vere le (1), (2), (3), (4) ed è falsa la (5).

Sulle espressioni analitiche rappresentanti porzioni di funzioni analitiche diverse

Nota di FRANCESCO D'ARCAIS

È noto come una espressione analitica possa rappresentare, pei valori di una variabile complessa pei quali ha significato, porzioni di funzioni analitiche diverse. Mediante le seguenti semplici proposizioni sulle serie si ottengono facilmente quante si vogliano di tali espressioni ed in modo da vedere la ragione di questo fatto analitico relativo ad esse. Il che potrà forse presentare, non fosse altro che didatticamente, qualche utilità.

Posto

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n\,,$$

dove le u sono quantità finite qualunque, la serie

$$(1)\qquad \frac{u_2}{S_1 S_2} + \frac{u_3}{S_2 S_3} + \dots + \frac{u_n}{S_{n-1} S_n} + \dots$$

è convergente ed ha il valore $\frac{1}{u_1}$ se la serie

$$(2)\qquad u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

è divergente, ed ha il valore $\frac{1}{u_1} - \frac{1}{S}$ se la serie (2) è convergente ed ha il valore S diverso da zero (*).

Basta, infatti, osservare che la somma dei primi n termini della serie (1) è

$$\left(\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2}\right) + \left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}\right) = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{S_n}\,.$$

(*) V. il mio *Corso di Calcolo Infinitesimale*, vol. I, pag. 322, esercizi 2° e 3°.

In modo analogo si prova che:

Se $n_1, n_2, n_3, \dots$ sono numeri interi positivi, dati secondo una certa legge, e tali che

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots\,, \quad \lim_{r=\infty} n_r = \infty\,,$$

la serie

$$(3)\qquad \sum_{r=1}^{\infty} \frac{u_{n_r+1} + u_{n_r+2} + \dots + u_{n_{r+1}}}{S_{n_r} S_{n_{r+1}}}$$

è convergente ed ha per valore $\dfrac{1}{u_1 + u_2 + \dots + u_{n_1}}$ se la serie (2) è divergente, ed ha per valore $\dfrac{1}{u_1 + u_2 + \dots + u_{n_1}} - \dfrac{1}{S}$ se la serie (2) è convergente e vale S, S diverso da zero.

Per $n = 1$, $n_{r+1} = n_r + 1 = r + 1$ si ha il teorema precedente.

Da quanto precede risulta che:

Se le u sono funzioni di una variabile complessa x, e la (2) è convergente ed ha per valore S, diverso da zero, in un campo C, *ed è divergente nei punti non appartenenti a* C, *la serie* (3) *rappresenta una porzione della funzione analitica* $\dfrac{1}{u_1 + u_2 + \dots + u_{n_1}} - \dfrac{1}{S}$ *nel campo* C, *e una porzione della funzione analitica* $\dfrac{1}{u_1 + u_2 + \dots + u_{n_1}}$ *fuori del campo* C.

Ad esempio: partendoci dalla serie geometrica

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots\,,$$

si riconoscerà subito, applicando il primo teorema, che la serie

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{x}{(1-x^2)(1-x^3)} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(1-x^n)(1-x^{n-1})} + \dots$$

rappresenta la funzione $\dfrac{1}{x(1-x)^2}$ fuori del circolo di raggio *uno* col centro nell'origine, e la funzione $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ nei punti interni a questo circolo (*).

(*) V. l. c., pag. 323, esercizio 5°, pel caso di x reale.

Applicando alla stessa serie geometrica il secondo teorema, si vedrà che la serie

$$\frac{1-x^{n_2-n_1}}{\left(1-x^{n_1}\right)\left(1-x^{n_2}\right)}+\frac{x^{n_2-n_1}\left(1-x^{n_3-n_2}\right)}{\left(1-x^{n_2}\right)\left(1-x^{n_3}\right)}+\ldots$$

$$+\frac{x^{n_r-n_1}\left(1-x^{n_{r+1}-n_r}\right)}{\left(1-x^{n_r}\right)\left(1-x^{n_{r+1}}\right)}+\ldots$$

rappresenta la funzione $\frac{1}{1-x^{n_1}}$ se $|x|<1$, e la funzione $\frac{1}{x^{n_1}\left(1-x^{n_1}\right)}$ se $|x|>1$. In particolare, per $n_1=1$, $n_{r+1}=2n_r=2^r$, la serie

$$\frac{1}{1-x^2}+\frac{x}{1-x^4}+\frac{x^3}{1-x^8}+\ldots+\frac{x^{2^r-1}-1}{1-x^{2^r}}+\ldots$$

vale $\frac{1}{1-x}$ se $|x|<1$, e vale $\frac{1}{x(1-x)}$ se $|x|>1$.

Dal che si deduce subito che le serie

$$\frac{1+x^{n_1}}{1-x^{n_1}}+\sum_{r=1}\frac{2x^{n_r}\left(x^{n_{r+1}-n_r}-1\right)}{\left(1-x^{n_r}\right)\left(1-x^{n_{r+1}}\right)}\,,\quad \frac{1+x}{1-x}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2x^{2^r-1}}{x^{2^r}-1}$$

hanno per valore $+1$ se $|x|<1$, e -1 se $|x|>1$, risultato dovuto, in altro modo, al sig. J. Tannery (*).

Partendoci dalla serie

$$1+x(1+x)+x^2(1+x+x^2)+\ldots+x^{n-1}(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})+\ldots,$$

che è convergente e vale $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$ se $(x)<1$, ed è divergente se $|x|>1$, giacchè per essa $S_n=\frac{(1-x^n)(1-x^{n+1})}{(1-x)(1-x^2)}$, ed applicando il

(*) V. *Bulletin des Sciences Mathématiques, etc.*, vol. V, serie 2ª, pag. 182.

primo teorema, si riconoscerà che la serie

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}+\frac{x}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}+\ldots$$

$$+\frac{x^{n-1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})}+\ldots$$

rappresenta la funzione $\frac{1+x-x^2}{(1-x)(1-x^2)^2}$ se $|x|<1$, e la funzione $\frac{1}{x(1-x)(1-x^2)^2}$ se $|x|>1$.

Padova, 27 dicembre 1895.

Nuove pubblicazioni.

W. W. Beman and d. E. Smith. — *Plane and solid Geometry*. Boston, Ginn, a. 1895, p. 320.

P. Painlevé. — *Leçon sur le frottement*. Paris, A. Hermann, a. 1895, p. 111.

M. Demartres. — *Cours d'Analyse* rédigé par M. E. Lemaire. Paris, A. Hermann, a. 1896, p. 156.

F. Aschieri. — *Lezioni di Geometria descrittiva*. Milano, Hoepli, a. 1896, pag. IX+443, prezzo L. 8,50.

G. A. Maggi. — *Principio della teoria matematica del movimento dei corpi. Corso di meccanica razionale*. Milano, Hoepli, a. 1896, pag. XVIII+503; prezzo L. 12.

E. Pascal. — *Funzioni ellittiche*. Manuali Hoepli, a. 1896; prezzo L. 1,50.

INDICE DEI VOLUMI I-V (1891-1895)

(Il primo numero indica il volume, il secondo la pagina)