REVUE

DE

MATHÉMATIQUES

(RIVISTA DI MATEMATICA)

PUBLIÉE PAR

G. PEANO

Professeur d'Analyse infinitésimale à l'Université de Turin

Tome VI

TURIN

BOCCA FRÈRES

LIBRAIRES

1896-1899

TABLE DES MATIÈRES

REVUE DE MATHÉMATIQUES
Tome VI — 1896

Introduction au tome II du "Formulaire de Mathématiques"

par G. Peano

Gottfried Wilhelm Leibniz, pendant toute sa vie (1646-1716) s'est occupé d' « une manière de Spécieuse Générale, où toutes les vérités de raison seroient réduites à une façon de calcul. Ce pourroit être en mêmes tems une manière de Langue ou d'Écriture universelle, mais infinement différente de toutes celles qu'on a projetées jusqu'ici; car les caractères, et les paroles mêmes, y dirigeroient la Raison; et les erreurs excepté celles de fait, n'y seroient que des erreurs de calcul. Il seroit très difficile de former ou d'inventer cette langue ou caractéristique; mais très aisé de l'apprendre sans aucuns dictionnaires » (Opera philosophica, a. 1840, p. 701).

Il énonce ce projet dans son premier travail, ou, comme il l'appelle, dans son « essai d'écolier » intitulé « de arte combinatoria a. 1666 ». Dans l' « Historia et commentatio linguae charactericae universalis, quae simul sit ars inveniendi et judicandi » (ib. p. 162), il dit que ces pensées « semper altissime infixae menti haesere ». Il fixe le temps nécessaire à la former: « aliquot selectos homines rem intra quinquennium absolvere posse puto ». Il trouve cette découverte plus importante que l'invention des télescopes et des microscopes; elle est l'étoile polaire du raisonnement. Il ajoute enfin « Itaque repeto, quod saepe dixi, hominem, qui neque Propheta sit neque Princeps, majus aliquid generis humani bono, nec divinae gloriae accomodatius suscipere nunquam posse ».

Dans ses dernières lettres il regrette « que si j'avois été moins distrait, ou si j'étois plus jeune, ou assisté par des jeunes gents bien disposés, j'espérerois donner une manière de » cette spécieuse (pag. 701). Il dit aussi (pag. 703) « J'ai parlé de ma spécieuse générale à Mr. le Marquis de l'Hospital, et à d'autres; mais ils n' y ont point donné plus d' attention que si je leur avois conté un songe. Il foudrait que je l'appuyasse par quelque usage palpable; mais pour cet effet il faudroit fabriquer une partie au moins de ma Charactéristique; ce qui n'est pas aisé, surtout dans l'était où je suis ».

Après deux siècles, ce « songe » de l'inventeur du Calcul infinitésimal est devenu une réalité. Leibniz a publié bien peu sur ce problème; mais dans ses manuscrits, publiés en 1840 par Erdmann, on trouve des idées précises, et beaucoup de propositions qui constituent la Logique mathématique (1ère partie du Formulaire). Plusieurs auteurs ont continués ces études (1). Enfin nous sommes arrivés à terminer l'analyse des idées de logique, exprimées dans le langage ordinaire par une foule de termes (est, sont, soit, être, exister, avoir, pouvoir, donner, prendre, oui, non, et, ou, si, lorsque, déduire, tout, rien, quelque, chaque, égal, partie,...), en les exprimant toutes au moyen des idées représentées par les signes ε, Ɔ, =, ∪, ∩, −, Λ, lesquelles sont encore réductibles.

Dans le petit livre « Arithmetices principia, nova methodo esposita, a. 1889 », nous avons pour la première fois exposé toute une théorie, théorèmes, définitions et démonstrations, en symboles qui remplacent tout-à-fait le langage ordinaire.

Nous avons donc la solution du problème proposé par Leibniz. Je dis « la solution » et non « une solution », car elle est unique. La Logique mathématique, la nouvelle science composée de ces recherches, a pour objet les propriétés des opérations et des relations de logique. Son objet est donc un ensemble de vérités, et non de conventions.

L'étude des propriétés différentes des idées représentées par les signes ε et Ɔ nous empêche de les représenter par le même signe, bien que dans le langage ils correspondent à peu près au même terme « être ». L'identité des propriétés des expressions « est contenu » et « on déduit » nous indique qu'il n'y a entre elles qu'une différence grammaticale, et nous porte à les indiquer par le même signe Ɔ. Et ainsi de suite. En changeant le forme des signes ε, Ɔ,... on ne change pas ces vérités.

Ces résultats sont merveilleux, et bien dignes des éloges de Leibniz à la science qu'il avait deviné. Toutefois pour apprendre l'usage des symboles il faut de l'exercice. Nous disons par ex. q'on peut lire les signes ∩, ∪, − par les mots « et, ou, non »; en effet on obtient ainsi en général une passable lecture des formules; mais avec un peu d'habitude on lit les propositions en symboles avec la forme même qu'ont les propositions dans le langage ordinaire.

La transformation du langage ordinaire en symboles présente des difficultés plus grandes. Il faut d'abord analyser complètement les

(1) Les travaux plus importants sur ce sujet ont été mentionnés et analysés dans les volumes de la « Rivista di Matematica » a. 1891 et suivants.

propositions qu'on veut écrire en symboles. Mais cette analyse a son avantage; combien de fois la proposition se transforme-t-elle en une identité, ou on y découvre des inexactitudes, des lacunes, des ambiguités!

On a déjà appliqué ces résultats soit à énoncer avec précision quelques propositions, soit à analyser des théories complètes, spécialement relatives aux principes toujours controversés des mathématiques. « Itaque profertur hic calculus quidam novus et mirificus, qui in omnibus nostris ratiocinationibus locum habet, et qui non minus accurate procedit quam Arithmetica aut Algebra. Quo adhibito semper terminari possunt controversiae quantum ex datis eas determinari possibile est, manu tantum ad calamum admoto, ut sufficiat duos disputantes omissis verborum concertationibus sibi invecem dicere: *calculemus*, ita enim perinde ac si duo Arithmetici disputarent de quodam calculi errore » (Leibniz, p. 98).

L'écriture simple et précise qui découle de la Logique mathématique nons donne l'instrument pour résoudre une question pratique qui s'impose tous les jours davantage. Citons encore Leibniz (p. 165):

« Quand je considère combien nous avons de belles découvertes, combien de méditations solides et importantes, et combien se trouvent d'esprits excellens qui ne manquent pas d'ardeur pour la recherche de la vérité, je crois que nous sommes en état d'aller plus loin et que les affaires du genre humain, quant aux sciences, pourraient en peu de temps merveilleusement changer de face. Mais quand je vois de l'autre côté le peu de concert des desseins, les routes opposées qu'on tient,... enfin quand je considère... qu'on se contente des discours spécieux au lieu d'une méthode sérieuse et décisive, j'apprehende que nous ne soyons pour demeurer long tems dans la confusion... Je crains même, qu'on ne se dégoûte des sciences et que par un désespoir fatal les hommes ne retombent dans la barbarie. À quoi cette horrible masse de livres, qui va toujours en augmentant, pourrait contribuer beaucoup. Car enfin le désordre se rendra presque insurmontable, la multitude des auteurs qui deviendra infinie en peu de tems, les exposera tous ensemble au danger d'un oubli général, l'experance de la gloire, qui anime bien des gens dans le travail des études, cessera tout d'un coup, il sera peut être aussi honteux d'être auteur, qu'il étoit honorable autre fois ».

Mais il ajoute « je ne laisse pas d'espérer le contraire pour des raisons très fortes ». En effet bien de travaux sont justement récompensés par l'oubli complet, qui s'attache aussi à des travaux qui ne mériteraient pas cette fin.

Or il est possible de publier un *Formulaire de Mathématiques* qui contienne toutes les propositions connues dans les sciences mathématiques, toutes les démonstrations, toutes les méthodes. Elles, écrites en symboles, occupent peu de place, beaucoup moins qu'on ne pourrait croire. Il y a une infinité de livres et de Mémoires inutiles, erronés, ou dans lesquelles on répète ce que d'autres auteurs ont déjà dit. Ce qui reste à écrire dans le Formulaire n'est qu'une partie infiniment petite de ce qu'on a publié jusqu'à présent.

Je suppose ce formulaire terminé, ou près de l'être. Veut-on étudier un sujet quelconque? On ouvre ce Formulaire à la place convenable car on peut ordonner les sujets selon les signes qui les composent, comme on ordonne dans un dictionnaire les mots selon les lettres qui les constituent. On trouvera en quelques pages toutes les vérités connues sur ce sujet, avec leurs démonstrations et indications historiques. Si le lecteur connaît encore une proposition, qu'il a découverte, ou qu'il a trouvée, dans quelque livre, ou s'il remarque quelque inexactitude dans ces propositions, il communiquera ces additions et corrections à la Rédaction du Formulaire, qui l'annoncera dans quelque publication périodique, et en tiendra compte dans une édition suivante.

Chaque professeur pourra adopter pour texte ce Formulaire, car il doit contenir toutes les propositions et toutes les méthodes. Son enseignement sera réduit à montrer à lire ces formules, et à indiquer aux élèves les propositions qu'il désire expliquer dans son cours.

Ce projet est assurément beau. Malheureusement son execution surpasse les forces, non d'un homme, mais de plusieurs hommes. Seulement une société nombreuse et bien organisée pourrait l'accomplir.

En attendant que quelque société savante s'empare de ce projet, nous avons publié, avec la collaboration de plusieurs collègues, le I tome du Formulaire.

Car il n'est pas nécessaire que tout ce travail soit fini pour porter son avantage. Chaque partie publiée sert déjà aux étudiants de ces sujets particuliers.

Ce premier essai présente naturellement des lacunes. Nous commençons maintenant le II volume du Formulaire; et nous publions de nouveau les parties du I tome, sur lesquelles on nous a indiqué de nombreuses corrections et additions.

La loi des racines en Logique

par M. P. Poretsky, *à Gorodnia (Russie).*

Soit donnée une équation logique générale

$$f(a, b, c, d, \ldots) = 0 \tag{1}$$

contenant $n+1$ lettres $a, b, c, d, \ldots$ Nous pouvons résoudre cette équation relativement à chacun des $n+1$ symboles $a, b, c, \ldots$ et aux $n+1$ négations $a_0, b_0, c_0, \ldots$ Pour la résoudre relativement à a ou a_0 nous commençons par la réduire à la forme suivante:

$$Ga + Ha_0 = 0, \tag{2}$$

où G et H sont les fonctions de n lettres restantes $b, c, d, \ldots$ En multipliant les deux membres de l'équation (2) par le produit GH nous avons la conclusion:

$$GHa + GHa_0 = GH = 0. \tag{3}$$

La condition (3) est l'une des conséquences nécessaires de l'équation (1) ou (2).

J'ai démontré (en 1884) que l'équation (2) est équivalente à l'équation

$$a = G_0a + Ha_0, \tag{4}$$

qui nous donne la description logique de tous les a satisfaisant à l'équation donnée (1) ou (2). Je veux à présent utiliser cette description pour trouver le nombre et les valeurs de toutes les racines a de l'équation donnée (1).

Voici cette description: la classe a est contenue en G_0 et contient H. Pour que cette description soit réelle, il faut que H soit contenu en G_0; ce qui coïncide avec l'équation (3).

Allons plus loin. Nous pouvons écrire ainsi les fonctions G_0 et H:

$$G_0 = G_0H + G_0H_0\,, \qquad H = G_0H\,. \tag{5}$$

Le terme GH étant égal à 0, nous le rejetons de la formule pour H. La description de la classe a devient alors: a contient G_0H et est contenu en $G_0H + G_0H_0$, c'est-à-dire que les a diverses contiennent tout G_0H et des parties diverses de la classe G_0H_0. Il s'en suit que tous les a doivent satisfaire à la condition suivante:

$$a = G_0H + xG_0H_0\,, \tag{6}$$

où x est une classe tout-à-fait arbitraire.

Ici se présente cette question grave: devons-nous chercher les a exprimés au moyen des n lettres restantes du discours seulement, c'est-à-dire des lettres $b, c, d, \ldots$, ou ne pouvons-nous pas nous borner aux limites du discours, et chercher les a avec l'aide des lettres $b, c, d, \ldots$ et des lettres étrangères $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$?

M. Schröder pense que les limites du discours ne sont pas obligatoires pour nous. En tel cas nous devons nous contenter de la formule (6) et dire que le nombre des racines a est infini. Mais je pense autrement et j'avoue que chercher les valeurs de a exprimées à l'aide des lettres étrangères au discours est une action non logique. Par cette raison nous devons traiter la classe arbitraire x comme une fonction de n lettres seulement $b, c, d, \ldots$ et aller encore plus loin. Cette voie nous conduit à la loi même des racines en Logique.

On sait que avec n lettres nous pouvons composer seulement le nombre 2^{2^n} des classes diverses. Par conséquent le nombre des racines a ne doit pas surpasser ce nombre. Mais beaucoup des valeurs de x substituées dans la formule (6) ne nous donnent qu'une seule valeur de a. Par exemple les valeurs $x = 0$, G, H, GH, GH_0, G_0H, $G + H$ nous donnent la même valeur $a = G_0H$. Par cette raison le nombre des racines a devient encore plus limité.

On sait que avec n lettres nous pouvons composer le nombre 2^n de classes indécomposables en subclasses sans l'aide de lettres étrangères au discours. Nous nommerons ces classes *les éléments du discours*. L'un de ces éléments est le produit des n lettres du discours. Tous les autres éléments s'obtiennent de ce même produit en attribuant le signe $_0$ consécutivement à l'un de ses facteurs, à deux, à trois et ainsi de suite.

On peut démontrer que les éléments possèdent les propriétés suivantes: 1) le produit de deux éléments est égal à zéro; 2) le produit d'un élément quelconque par la fonction quelconque du discours est

égal ou à zéro ou à ce même élément; et 3) chaque classe du discours est composée de la somme de quelques éléments.

Pour décomposer une classe donnée dans la somme des éléments, il faut décomposer chacun des ses termes (monômes) séparément et rejeter toutes les réitérations de chacun des éléments. Pour décomposer le monôme ayant i facteurs, il faut le multiplier par le produit de $n - i$ binômes de la forme $q + q_0$ composés à l'aide de toutes les lettres manquantes à ce monôme, après quoi le monôme donné se transforme dans la somme des éléments, en nombre 2^{n-i}.

Supposons à présent que la fonction G_0H_0, qui figure dans la formule (6) se décompose dans la somme de m éléments divers suivants:

$$G_0H_0 = e^{(1)} + e^{(2)} + e^{(3)} + \ldots + e^{(m)}\,. \tag{7}$$

La formule (6) devient alors:

$$a = G_0H + x\,(e^{(1)} + e^{(2)} + \ldots - e^{(m)})\,. \tag{8}$$

Mais nous savons déjà par ce qui précède, que le produit de la fonction quelconque x du discours pour la somme de m éléments ne peut nous donner que la somme de quelques-uns de ces mêmes éléments. Pour cette cause toutes les valeurs possibles de x en nombre 2^{2^n} multipliées par la somme de m éléments doivent nous donner toutes les 2^m classes diverses que l'on peut composer avec ces m éléments. D'où nous concluons que *le nombre total des racines diverses a est égal à 2^m, m étant le nombre des éléments divers de la fonction G_0H_0.*

Si nous désignons par le symbole $\Sigma\,(e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(m)})$ toutes les 2^m classes que l'on peut composer des éléments $e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(m)}$, la formule (8) devient:

$$a = G_0H + \Sigma\,(e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(m)}).$$

Cette formule exprime *la loi des racines* en Logique. *Toutes les 2^m racines a s'obtiennent en ajoutant à la même fonction G_0H toutes les combinaisons des éléments de la fonction G_0H_0.*

Pour les racines a_0 nous aurons la formule:

$$a_0 = GH_0 + \Sigma\,(e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(m)}).$$

Pour avoir les racines b et b_0 il faut réduire l'équation donnée (1) à la forme $G'b + H'b_0 = 0$. Et ainsi de suite.

Exemple. — Pour l'équation

$$a(bc + b_0c_0) + a_0b = 0$$

nous avons:

$$G = bc + b_0c_0\,, \quad H = b\,, \quad G_0 = bc_0 + b_0c\,, \quad H_0 = b_0\,, \quad G_0H_0 = b_0c\,,$$
$$G_0H = bc_0\,, \quad GH_0 = b_0c_0\,.$$

Le nombre m est égal a 1, et les deux racines a et a_0 sont:

$$a^{(1)} = bc_0\,, \quad a^{(2)} = bc_0 + b_0c\,; \quad a_0^{(1)} = b_0c_0\,, \quad a_0^{(2)} = b_0c_0 + b_0c = b_0\,.$$

La réduction de la même équation à la forme

$$b\,(a_0 + c) + b_0ac_0 = 0$$

nous donne:

$$G = a_0 + c\,, \quad H = ac_0\,, \quad G_0 = ac\,, \quad H_0 = e_0 + c\,, \quad G_0H_0 = 0\,,$$
$$G_0H = ac_0\,, \quad GH_0 = a_0 + c.$$

Ici le nombre m est égal à zéro et les racines uniques b et b_0 seront:

$$b = ac_0\,, \quad b_0 = a_0 + c.$$

Enfin la réduction de la même équation à la forme

$$cb + c_0\,(ab_0 + a_0b) = 0$$

nous donne

$$G = b\,, \quad H = ab_0 + a_0b\,, \quad G_0 = b_0\,, \quad H_0 = ab + a_0b_0\,, \quad G_0H_0 = a_0b_0\,,$$
$$G_0H = ab_0\,, \quad NH_0 = ab\,;$$
$$c^{(1)} = ab_0\,, \quad c^{(2)} = ab_0 + a_0b_0 = b_0\,; \quad c_0^{(1)} = ab\,, \quad c_0^{(2)} = ab + a_0b_0\,.$$

P. Poretsky.

Un sistema di postulati per la Geometria Projettiva astratta degli iperspazî

Nota di Mario Pieri

§ 1. — La Geometria projettiva degli spazî da quante si vogliano dimensioni, intesa come scienza autonoma, rimane tuttavia soggetto di controversia per molti, a cui non sembra che tutti i suoi principî siano affermati con quel grado di chiarezza e di rigore, che si pretende a ragione in ogni ramo di scienza esatta. Una succinta analisi delle premesse, su cui potrebbe logicamente fondarsi una dottrina projettiva degli iperspazî, non è dunque fuor di proposito; quantunque non manchino lavori di molto pregio vôlti al medesimo scopo, od aventi un fine prossimo a quello (*).

In uno studio recente « *Sui principî che reggono la Geometria di Posizione* » (**) ho proposto diciannove postulati atti a fondare l'ordinaria Geometria Projettiva come scienza deduttiva astratta, indipendente da ogni altro corpo di dottrine matematiche o fisiche, e in particolare dagli assiomi, od ipotesi, della Geometria elementare euclidèa; e successivamente ho mostrato (***) che essi sono realmente sufficienti agli scopi della pura Geometria di posizione (« costruirende Geometrie »), poichè se ne deduce la rappresentazione dei punti projettivi mediante coordinate. Qui nulla ho da mutare circa l'indirizzo ivi adottato, che

(*) Ved. p. e. Amodeo « *Quali possono essere i postulati, ecc.* » (Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, 1891). — Veronese « *Fondamenti di Geometria a più dimensioni, ecc.* (Padova, 1891). — Fano « *Sui postulati fondamentali della Geometria Projettiva, ecc.* (Giornale di Matematiche, 1891). — Enriques « *Sui fondamenti della Geometria Projettiva* » (Rendic. del R. Istituto Lombardo, 1894).

(**) Atti d. Accad. d. Scienze di Torino, 1895. Citerò appresso questa memoria col segno *m*.1.

(***) In altre due Note, che fan seguito a quella (Atti di Torino, 1896).

è un indirizzo *puramente deduttivo* ed *astratto* (*); e poco da aggiungere e togliere per passare dal campo delle rette e dei piani projettivi a quello molto più vasto delle forme lineari di n^a specie in uno *spazio generale*; entro un ambiente, cioè, dove esistano forme lineari di specie comunque grande: così che il presente scritto può aversi come appendice, o complemento, di quello. In particolare nulla è da modificare circa i postulati *del separarsi,* i quali saranno qui riprodotti (§ 5) senza amplificazione di sorta, rinviandosi per maggiori notizie il lettore alla memoria citata. Dalla quale è sperabile che emerga eziandio la possibilità di provare coi metodi della logica algebrica alcune affermazioni, che i termini del presente articolo non consentono di approfondire quanto sarebbe opportuno.

Circa i seguenti postulati non è detto che siano *indipendenti* fra loro, nè *irreduttibili*: condizioni queste, che toccano quasi alla perfezione ideale; soltanto si afferma che essi *bastano* (in un cogli assiomi logici (**), o leggi del pensiero) a sostener l'intero edifizio d'una geometria projettiva astratta degli iperspazî.

§ 2. — Il simbolo [0] leggasi « *punto projettivo* », o « *classe dei punti projettivi* », od anche « *spazio generale* ». Il fatto che la parola « punto » denota qui una *classe* di enti, ossia che ha valore di nome *collettivo*, può affermarsi esplicitamente con un primo postulato:

(I) $\qquad [0]\, \varepsilon\, \mathrm{K} \qquad$ Pp

Con un secondo postulato si dirà poi che questa classe non è *illusoria*, ossia che contiene almeno un individuo:

(II) $\qquad [0] - = \Lambda \qquad$ Pp.

(*) *Astratto,* in quanto prescinde da ogni interpretazione *fisica* delle premesse, e quindi anche dalla loro *evidenza,* ed *intuitività geometrica*: a differenza di un altro indirizzo (che chiamerei *fisico-geometrico*) secondo il quale gli enti primitivi e gli assiomi voglion esser desunti dall'osservazione diretta del mondo esterno, e identificati con le idee che si acquistano per via d'induzione sperimentale da certi determinati oggetti e fatti fisici (Pasch, Peano, ...).

(**) Alle quali (seguendo in questo il Dedekind ed altri) ascriveremo altresì le proposizioni primitive sul *numero intero positivo* — come ad es. il principio d'*induzione* (o, piuttosto, di *deduzione*) *completa* — poichè non par guari possibile alcuna scienza deduttiva senza il loro concorso. — Questa comunanza di assiomi (è noto che l'*Analisi pura* non ha postulati suoi propri, se tali non siano i principî sul *numero* (int. pos.) e sull'idea di *successivo ad un numero*) è una conferma della solidarietà esistente fra le discipline analitiche e geometriche.

Questo ente « punto » *non è definito,* o (come altri si esprime) è *definito in sè stesso* da tutte quelle proprietà che gli verranno attribuite man mano (*). Col postulato seguente s'impone, ad es., che « se a è un punto, esista ancora un punto diverso da quello »:

(III) $\qquad a\, \varepsilon\, [0] \,.\, \supset : [0] - \iota\, a \,.\, - = \Lambda \qquad$ Pp.

Essendo a, b due punti non coincidenti (ipotesi non assurda in virtù di (I) e (II)), col simbolo ab si rappresenta un nuovo ente primitivo, a cui si attribuiscono intanto le qualità seguenti:

(IV) $\qquad a, b\, \varepsilon\, [0] \,.\, a - = b : \supset .\, ab\, \varepsilon\, \mathrm{K} \qquad$ Pp.
(V) $\qquad$ » $\quad$ » $\quad : \supset .\, ab \supset [0] \qquad$ Pp.

che si potrebbero entrambe racchiudere nell'unica proposizione $a, b\, \varepsilon\, [0] .\, a - = b : \supset .\, ab\, \varepsilon\, \mathrm{K}[0]$ (**) esprimente che « se a, b sono punti distinti, ab è una classe o varietà di punti, ossia *una figura* ». Con ciò non è detto ancora che il simbolo ab rappresenti una figura *individuata* mediante a, b: questa ed altre determinazioni del contenuto di « ab » risulteranno a poco per volta dai postulati seguenti:

(VI) $\qquad a, b\, \varepsilon\, [0] \,.\, a - = b : \supset .\, a\, \varepsilon\, ab \qquad$ Pp.
(VII) $\qquad$ » $\quad$ » $\quad : \supset .\, ab \supset ba \qquad$ Pp.

Cioè « sotto le stesse ipotesi, la figura ab deve contenere il punto a ed esser contenuta nella figura ba ». Di qui segue immediatamente:

$a, b\, \varepsilon\, [0] \,.\, a - = b : \supset .\, ab = ba \qquad$ Teor.
» $\quad$ » $\quad : \supset .\, b\, \varepsilon\, ab \qquad$ Teor.

Adesso può *definirsi,* come l'insieme di tutti i possibili enti « ab », un nuovo ente « [1] » da chiamarsi « *retta projettiva* »:

$[1] = \overline{r\, \varepsilon}\, \{a, b\, \varepsilon\, [0] \,.\, a - = b \,.\, r = ab : - =_{a,\, b} \Lambda\} \qquad$ Def.

[1] è pertanto il simbolo d'una *classe di classi di punti,* non illusoria in virtù delle cose precedenti:

$[1]\, \varepsilon\, \mathrm{KK}[0] \qquad [1] - = \Lambda \qquad$ Teor^i

---

(*) Ved. Burali-Forti « *Logica matematica* » (Milano, Hœpli, 1894), pag. 129.
(**) Così fu fatto in *m.*1, § 2, dove è anche taciuto il postulato (I).

In ordine agl'individui di questa classe ammetteremo ancora i postulati seguenti:

$$\text{(VIII)} \qquad a, b \,\varepsilon\, [0] \,.\, a - = b : \supset : ab - \iota a - \iota b \,.\, - = \Lambda \qquad \text{Pp.}$$

$$\text{(IX)} \qquad a, b \,\varepsilon\, [0] \,.\, a - = b \,.\, c \,\varepsilon\, ab - \iota a : \supset \,.\, ab \supset ac \qquad \text{Pp.}$$

cioè che « essendo a, b due punti distinti, la figura ab contiene un punto almeno diverso da a e da b; e se c è un punto di ab diverso da a, ab è contenuta in ac ». E da questi e dai precedenti si deduce:

$$a, b \,\varepsilon\, [0] \,.\, a - = b \,.\, c \,\varepsilon\, ab - \iota a : \supset \,.\, ab = ac \qquad \text{Teor.}$$

$$\text{»} \qquad \text{»} \qquad c \,\varepsilon\, ab - \iota b : \supset \,.\, ab = bc \;(*) \qquad \text{Teor.}$$

$$\text{»} \qquad \text{»} \qquad c \,\varepsilon\, ab - \iota a - \iota b : \supset \,.\, ac = bc \qquad \text{Teor.}$$

onde si può dimostrare (m.1, § 2) qualmente:

$$a, b, c, d \,\varepsilon\, [0] \,.\, a - = b \,.\, a = c \,.\, b = d : \supset \,.\, ab = cd \qquad \text{Teor.}$$

ossia che « essendo dati i punti (distinti) a e b, l'ente ab non può mutare, se questi punti non mutano ». Il simbolo « ab » può leggersi « retta projettiva ab ».

§ 3. — Essendo a un punto e k una classe arbitraria di punti, col simbolo ak denoteremo « la *visuale* (**) di k da a » vale a dire l'insieme di tutti i punti delle rette che uniscono il punto a coi varî punti di k diversi da a:

$$k \,\varepsilon\, \mathrm{K}[0] \,.\, a \,\varepsilon\, [0] : \supset \,.\, ak = \overline{x\,\varepsilon}\,(y \,\varepsilon\, k - \iota a \,.\, x \,\varepsilon\, ay : - =_y \Lambda) \qquad \text{Def.}$$

Tale nozione è fondamentale in Geometria Projettiva: per mezzo di essa è possibile una *definizione* delle varie *forme fondamentali* o *spazî lineari,* a cominciare dal *piano projettivo.* Essendo r una retta, ed a un punto fuori di r, si chiamerà « piano projettivo ar » la visuale di r da a; cosicchè:

$$r \,\varepsilon\, [1] \,.\, a \,\varepsilon\, [0] - r : \supset \,.\, ar \,\varepsilon\, \mathrm{K}[0] \qquad \text{Def.}$$

Diremo poi « *classe dei piani projettivi* », o semplicemente « *piano projettivo* », e indicheremo con [2], l'insieme di tutti i possibili piani ar; vale a dire:

$$[2] = \overline{p\,\varepsilon}\,\{r \,\varepsilon\, [1] \,.\, a \,\varepsilon\, [0] - r \,.\, p = ar : - =_{r,a} \Lambda\} \qquad \text{Def.}$$

La classe [2] è, come la [1], una *classe di classi di punti*: $[2] \,\varepsilon\, \mathrm{KK}[0]$; ma non è anche detto che essa contenga individui, cioè che sia $r \,\varepsilon\, [1] \,.\, a \,\varepsilon\, [0] - r : - =_{r,a} \Lambda$; ciò per altro risulterà dal postulato (XI). È poi facile a vedersi, che un individuo qualsivoglia della classe [2] non può esser nè *retta,* nè *punto*; e viceversa.

In ordine al piano projettivo sembra altresì necessario un postulato speciale, che si può scegliere ad es. sotto la forma (Ved. m.1, § 5):

$$\text{(X)} \qquad a, b, c \,\varepsilon\, [0] \,.\, b - = c \,.\, a - \varepsilon\, bc \,.\, d \,\varepsilon\, a(bc) - \iota b : \supset \,.\, bd \supset a(bc) \qquad \text{Pp.}$$

per mezzo del quale si dimostra che « un piano è individuato da tre qualunque dei suoi punti non allineati »; che « due rette giacenti in un medesimo piano hanno sempre almeno un punto a comune »; ecc., ecc. (Ved. m. 1, § 5). La proposizione (X) è in fondo un nuovo predicato sulle categorie « punto projettivo » e « congiungente due punti projettivi » (§ 2).

Procedendo in modo al tutto simile, può introdursi la *forma fondamentale di 3ª specie,* o *spazio projettivo (lineare) a tre dimensioni,* mediante la definizione seguente:

$$[3] = \overline{s\,\varepsilon}\,\{p \,\varepsilon\, [2] \,.\, a \,\varepsilon\, [0] - p \,.\, s = ap : - =_{p,a} \Lambda\} \qquad \text{Def.}$$

in virtù della quale $[3] \,\varepsilon\, \mathrm{KK}[0]$, ecc. Se ora ad es. si vuole che il massimo ambiente possibile per le figure, cioè la *classe dei punti,* sia precisamente uno spazio [3] — cioè se si vuol fare la geometria projettiva *a tre dimensioni* — conviene dar luogo ulteriormente ai tre postulati seguenti (Ved. m.1, §§ 2 e 6):

$$r \,\varepsilon\, [1] \,.\, \supset : [0] - r \,.\, - = \Lambda$$

$$p \,\varepsilon\, [2] \,.\, \supset : [0] - p \,.\, - = \Lambda$$

$$r \,\varepsilon\, [1] \,.\, p \,\varepsilon\, [2] : \supset \,.\, r \cap p - = \Lambda$$

oltre a quelli che han per soggetto il *segmento projettivo* e saranno enunciati fra poco (§ 5); cosicchè allora si potranno contare in tutto *ventidue* postulati (*).

(*) Questa proposizione, equivalente al prodotto logico di (VII) e (IX), teneva luogo dapprima (m.1, § 2) a questi postulati: la sua scomposizione in (VII) e (IX) mi fu poi suggerita dal sig. Dott. A. PADOA.

(**) Parola da me proposta per rendere il tedesco « Schein » nel senso di STAUDT.

(*) Il simile è da dire circa la geometria projettiva ad n dimensioni, posto che n sia un numero (int. pos.) dato aritmeticamente. I postulati (sufficienti) saranno per essa in numero di $10 + n + 9 = n + 19$. In questi casi per altro, il simbolo [0] non è da chiamarsi spazio *generale* (§ 1).

§ 4. — Ma il mio scopo è di protrarre *in infinito* la serie [1], [2], [3], ..., mediante un numero *finito* di definizioni e postulati. A ciò si riesce in virtù del principio logico d'*induzione completa* (*). Accanto alla definizione (§ 2):

$$(\alpha) \qquad [1] = \overline{r\,\varepsilon}\,\{a\,,b\,\varepsilon\,[0]\,.\,a\mathrel{-}=b\,.\,r=ab:\mathrel{-}=_{a,\,b}\Lambda\} \qquad \text{Def.}$$

pongasi l'altra:

$$(\beta) \quad n\,\varepsilon\,1+\mathrm{N}\,.\supset.\,[n]=\mathrm{K}[0]\cap\overline{x\,\varepsilon}\,\{y\,\varepsilon\,[n-1]\,.\,a\,\varepsilon\,[0]-y\,.\,x=ay:\mathrel{-}=_{y,\,a}\Lambda\} \quad \text{Def.}$$

dove il simbolo $[n]$ può leggersi « *forma fondamentale di* n^a *specie* » o « *spazio projettivo (lineare) ad* n *dimensioni* (**). L'ultima dice in sostanza che « l'$[n]$, o spazio lineare ad n dimensioni — supposto n numero intero positivo maggior d'uno — è la classe di tutte le possibili *figure* x, per ognuna delle quali esiste un individuo y della classe $[n-1]$ (il quale alla sua volta sarà classe di punti o *figura* quand'anche fosse $n-1=1$ (§ 2)) ed un punto a fuori di esso, di guisa che x sia la visuale di y da a ». Le proposizioni (α) e (β) prese insieme costituiscono una *definizione induttiva di* 2^a *specie* (***), la quale determina pienamente il valore del segno $[n]$ *per* n *intero positivo arbitrario*. Il numero n si dirà *specie*, o *dimensione*, di $[n]$.

Per affermar poi l'esistenza (ideale) di così fatti enti $[n]$, basterà che si ammetta p. e. il postulato seguente:

$$(\mathrm{XI}) \qquad n\,\varepsilon\,\mathrm{N}\,.\,\sigma\,\varepsilon\,[n]:\supset:[0]-\sigma\,.\mathrel{-}=\Lambda \qquad \text{Pp.}$$

cioè che « dato uno spazio lineare di n^a specie, esiste almeno un punto che non gli appartiene » — onde si può dimostrare che:

$$n\,\varepsilon\,\mathrm{N}\,.\supset.\,[n]\mathrel{-}=\Lambda\,. \qquad \text{Teor.}$$

Supposto invero $n>1$ ed $[n-1]\mathrel{-}=\Lambda$, non sarà assurda l'ipotesi $y\,\varepsilon\,[n-1]$; e quindi, per il postulato (XI), nemmeno la proposizione $a\,\varepsilon\,[0]-y$. Di poi, per la definizione $(\alpha)(\beta)$, y sarà una classe di punti, e tale p. e. anche la sua visuale $x=ay$ presa dal punto a. Esisterà

(*) Ved. p. es. Burali-Forti, loc. cit., pagg. 100-103 e 126-128.

(**) Il segno $[n]$ è tolto da H. Schubert: Math. Annalen, Bd. 26.

(***) Burali-Forti, loc. cit., pag. 128. La condizione imposta ad ogni spazio $[n]$ di essere una K[0] giova a che tutti i segni del secondo membro di (β) abbiano un senso ancorchè resti indeterminato il valore numerico di n; ma essa potrebbe ciò non ostante sopprimersi, dopo di che quel secondo membro avrebbe sempre un significato preciso, quando ad n si dessero *successivamente* i valori 2, 3, 4, ...

dunque allora un individuo x almeno della classe rappresentata nel secondo membro di (β). D'altra parte si sa già (§ 2) che $[1]\mathrel{-}=\Lambda$: quindi il teorema, in forza del principio d'induzione completa, dovrà esser vero per qualsivoglia n (*).

Per le proprietà che si aggirano intorno *all'appartenersi* degli enti [0] ed $[n]$, ossia intorno alle mutue projezioni e intersezioni di spazî lineari, non c'è bisogno d'altri postulati oltre quelli ammessi finora (*undici* in tutto). Così p. e. il fatto che « una retta ed un piano giacenti in un medesimo spazio projettivo di 3^a specie hanno sempre (almeno) un punto a comune », ossia che:

$$\sigma\,\varepsilon\,[3]\,.\,r\,\varepsilon\,[1]\,.\,p\,\varepsilon\,[2]\,.\,r\cup p\supset\sigma:\supset.\,r\cap p\mathrel{-}=\Lambda \qquad \text{Teor.}$$

si può dimostrare in modo perfettamente simile a quello da me seguito nel caso di due rette giacenti nel medesimo piano (*m*.1, pag. 18). Ed è similmente un teorema la proposizione che « una retta ed un piano che non abbiano alcun punto comune individuano un [4] che li contiene ». Ecc., ecc.

§ 5. — Essendo $a\,,b\,,c$ tre punti distinti sopra una retta projettiva data, il simbolo (abc) leggasi « *segmento projettivo abc* ».

$$(\mathrm{XII}) \quad r\,\varepsilon\,[1]\,.\,a\,,b\,,c\,\varepsilon\,r\,.\,a\mathrel{-}=b\,.\,b\mathrel{-}=c\,.\,c\mathrel{-}=a:\supset.\,(abc)\,\varepsilon\,\mathrm{K}r \qquad \text{Pp.}$$

$$(\mathrm{XIII}) \quad \text{»} \qquad \text{»} \qquad \text{»} \qquad :\supset.\,a\mathrel{-}\varepsilon\,(abc) \qquad \text{»}$$

$$(\mathrm{XIV}) \quad \text{»} \qquad \text{»} \qquad \text{»} \qquad :\supset.\,(abc)=(cba) \qquad \text{»}$$

$$(\mathrm{XV}) \quad r\,\varepsilon\,[1]\,.\,a,b,c\,\varepsilon\,r\,.\,a\mathrel{-}=b\,.\,b\mathrel{-}=c\,.\,c\mathrel{-}=a\,.\,d\,\varepsilon\,r-(abc)-\iota\,a: \\ :\supset.\,d\,\varepsilon\,(bca) \qquad \text{Pp.}$$

$$(\mathrm{XVI}) \quad r\,\varepsilon\,[1]\,.\,a\,,b\,,c\,\varepsilon\,r\,.\,a\mathrel{-}=b\,.\,b\mathrel{-}=c\,.\,c\mathrel{-}=a:\supset:r-\iota\,a-\iota\,c- \\ -(abc)\,.\mathrel{-}=\Lambda \qquad \text{Pp.}$$

$$(\mathrm{XVII}) \quad r\,\varepsilon\,[1]\,.\,a\,,b\,,c\,\varepsilon\,r\,.\,a\mathrel{-}=b\,.\,b\mathrel{-}=c\,.\,c\mathrel{-}=a\,.\,d\,\varepsilon\,(bca)\cap(cab): \\ :\supset.\,d\mathrel{-}\varepsilon\,(abc) \qquad \text{Pp.}$$

$$(\mathrm{XVIII}) \quad r\,\varepsilon\,[1]\,.\,a\,,b\,,c\,\varepsilon\,r\,.\,a\mathrel{-}=b\,.\,b\mathrel{-}=c\,.\,c\mathrel{-}=a\,.\,d\,\varepsilon\,(abc): \\ :\supset.\,(abc)=(adc) \qquad \text{Pp.}$$

(*) Viceversa dal teorema si deduce il postulato; onde questo potrebbe esser sostituito da quello. — Si può osservare che il postulato (XI) abbraccia *infinite* affermazioni, per altro organizzate sotto *un'unica legge*. Un fatto simile accade p. e. nell'assioma:

$$a\,\varepsilon\,\mathrm{N}\,.\supset.\,a+1\,\varepsilon\,\mathrm{N}$$

che si può sciogliere in infinite proposizioni, cioè: se 1 è un numero, il successivo di 1 (cioè 2) è un numero; se 2 è un numero ...

$$\text{(XIX)}\quad r\,\varepsilon\,[1]\,.\,a,b,c\,\varepsilon\,r\,.\,a -\!= b\,.\,b -\!= c\,.\,c -\!= a : h,k\,\varepsilon\,\mathrm{K}[0].$$
$$h,k -\!= \Lambda\,.\,h \cup k = (abc)\,.\!\cdot.\,x\,\varepsilon\,h\,.\,y\,\varepsilon\,k : \supset_{x,y}\,.\,y\,\varepsilon\,(acx)::$$
$$:: \supset :\cdot: z\,\varepsilon\,(abc)\,.\!\cdot.\,u\,\varepsilon\,(abc)\,.\,z\,\varepsilon\,(acu) : \supset_u\,.\,u\,\varepsilon\,h\,.\!\cdot.\,v\,\varepsilon\,(abc).$$
$$.\,v\,\varepsilon\,(acz) : \supset_v\,.\,v\,\varepsilon\,k :: -\!=_z \Lambda \qquad \text{Pp.}$$

Queste proposizioni corrono al tutto indipendenti dai Postulati (I), ..., (XI), potendosi qui legger dovunque $r\,\varepsilon\,\mathrm{K}$ al posto di $r\,\varepsilon\,[1]$. Sopra di esse potrebbe dunque costruirsi un trattato *della struttura* o *connessione* di certe classi (ad una dimensione), di cui la *retta projettiva* non è che un caso particolare.

Conviene per ultimo ammettere il postulato seguente, che giova agli scopi della Geometria projettiva:

$$\text{(XX)}\quad r,r'\,\varepsilon\,[1]\,.\,r -\!= r'\,.\,a,b,c,d\,\varepsilon\,r\,.\,a -\!= b\,.\,b -\!= c\,.\,c -\!= a\,.$$
$$a',b',c',d'\,\varepsilon\,r'\,.\,a' -\!= b'\,.\,b' -\!= c'\,.\,c' -\!= a'\,.\!\cdot.\,p\,\varepsilon\,[0]\,.\,(a,a',p)\,\varepsilon\,\mathrm{Cl}\,.$$
$$.\,(b,b',p)\,\varepsilon\,\mathrm{Cl}\,.\,(c,c',p)\,\varepsilon\,\mathrm{Cl}\,.\,(d,d',p)\,\varepsilon\,\mathrm{Cl} : -\!=_p \Lambda :: \supset : d\,\varepsilon\,(abc)\,.$$
$$.\,\supset\,.\,d'\,\varepsilon\,(a'b'c') \qquad \text{Pp.}$$

dove il valore del segno « ε Cl » (sono *collineari*) viene espresso da:

$$a,b,c\,\varepsilon\,[0]\,.\supset::(a,b,c)\,\varepsilon\,\mathrm{Cl}\,.=.\!\cdot.\,x,y\,\varepsilon\,[0]\,.\,x -\!= y\,.\,a,b,c\,\varepsilon\,xy : -\!=_{x,y} \Lambda \qquad \text{Def.}$$

Torino, febbraio 1896.

El cultivo de la matematica y la forma deductiva de la inferencia por el ingeniero geografo Ezequiel Perez, jefe del Departamento de Pesos y medidas del Ministerio de Fomento. — Mexico (*Memorias y Revistas de la Sociedad cientifica « Antonio Alzate »*, Tomo VIII).

Questo breve scritto contiene parecchie sensate osservazioni sulla convenienza di trattare la teoria del sillogismo e in generale la logica deduttiva con procedimenti matematici e sul vantaggio che presenta lo studio della matematica per tutti quelli che devono spesso far uso del ragionamento deduttivo (*para todos los que cultivan la forma deductiva de la prueba*).

L'Autore dice di essere stato spinto a occuparsi di questi argomenti dal desiderio di determinare le cause che conferiscono al ragionamento per deduzione quel rigore che lo contraddistingue dalle altre forme d'inferenza (*par el interes de buscar el porquè del rigor de las conclusiones syllogisticas*). Non mi pare però che il suo lavoro porti alcun contributo sostanziale verso la soluzione di tale questione che, come tante altre delle questioni cosidette *filosofiche*, presenta maggior difficoltà ad essere bene posta ed esattamente formulata che non a essere risolta, una volta che sia stata enunciata in modo preciso e determinato. Il che certamente non equivale a dire che essa sia una questione di poca importanza e che non esiga per esser trattata convenientemente una conoscenza profonda e comprensiva dei varî metodi e processi mentali che entrano in azione nelle ricerche scientifiche, dei loro rispettivi pregi ed inconvenienti ed in modo speciale della funzione (rôle) del ragionamento deduttivo e delle cause che lo rendono applicabile ed efficace in certi rami d'investigazione e non in certi altri (*).

(*) Tra i filosofi contemporanei quello che, a mio parere, ha trattato più a fondo e in modo più esauriente questa questione è lo Stuart Mill nel suo « *System of Logic inductive and deductive* ». Anche il *Cours de philosophie positive* del Comte nella parte dedicata alle scienze matematiche e fisiche (v. specialmente il II volume dove parla dell'importanza delle ipotesi per la ricerca scientifica) è pieno di osservazioni acute e di geniali *aperçus* su questo soggetto. Dell'influenza esercitata a questo riguardo dagli scritti di questi due grandi pensatori, porta evidenti traccie la classica opera del Prof. Mach sulla Storia della Meccanica (*Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt*. Leizig, Brockhaus) la

Dopo aver accennato vagamente ad alcune superficiali analogie tra le operazioni della logica e quelle dell'algebra l'A. passa ad esporre un suo sistema di notazioni logiche il quale a dir vero non differisce che per qualche dettaglio da quelli comunemente adottati dai cultori della logica matematica anteriori al Leibniz e al Boole e da quei molti altri posteriori che non ne hanno subita l'influenza (come per es. lo Stanley Jevons). Il torto principale loro e del Perez è quello di volere ad ogni costo investire le operazioni della logica di *tutte* le proprietà delle corrispondenti dell'algebra e di non essersi ancora reso perfettamente conto che ciò che rende opportuna e vantaggiosa l'introduzione dei simboli è semplicemente il fatto di poterli assoggettare a delle *regole fisse e generali*, coincidano poi queste o no, o coincidano in tutto o solo in parte colle regole dell'algebra ordinaria. Questa tendenza, che si riconnette a un concetto troppo ristretto di ciò che è *l'algebra*, conduce da una parte a una inutile complicazione nei simboli adottati mentre la sola ragione d'essere di questi starebbe nel portare una semplificazione ai processi del linguaggio ordinario (*), e d'altra parte induce a porre a base della trattazione non le operazioni e relazioni effettivamente più atte ad occupare tal posto, ma invece altre che non presentano, in compenso di molti inconvenienti, altro vantaggio che quello di offrire qualche maggiore analogia con quelle adoperate dall'aritmetica (**).

L'articolo finisce colla traduzione di parecchie pagine d'un discorso del Prof. Bougaieff dell'Università di Mosca, sul valore degli studi matematici come preparazione per le ricerche scientifiche e come disciplina mentale (*como instrumento cientifico y pedagogico*).

G. VAILATI.

quale alla sua volta ha direttamente contribuito a determinare le vedute generali sui metodi d'investigazione scientifica che informano la magistrale opera postuma dello Herz sui principî della meccanica (Die Prinzipien der Mechanik, Leipzig 1890, v. la prefazione a pag. XXVI e l'introduzione a pag. 10).

(*) Così per esempio nel simbolo: $A = \frac{B}{n}$ che il Perez adopera per indicare l'inclusione della classe A nella classe B, figurano, oltre ad A e B, tre segni mentre non c'è affatto ragione di adoperarne più di uno.

(**) Così l'operazione di « somma di classi », che il Perez considera, è ancora la somma nel senso dell'algebra.

Dimostrazione di una formula di calcolo integrale.

Il Direttore della « *Rivista* » recentemente mi faceva notare che « una funzione di due variabili, integrabile in un'area piana, può non essere integrabile lungo segmenti rettilinei che cadono in quell'area ».

Questa osservazione rende necessario modificare la consueta dimostrazione della notissima formula;

$$\int \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x}\, ds = -\int \mathrm{f} \cos(n \,.\, x)\, dl\,,$$

dove: f rappresenta una funzione uniforme, finita e continua nell'area s, limitata dalla linea l, ed n indica la direzione della normale interna al contorno.

La formula in parola si dimostra solitamente ponendo $ds = dxdy$ ed eseguendo dapprima la integrazione rispetto ad x. Ora perchè tale dimostrazione sia rigorosa bisogna supporre $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x}$ integrabile lungo ogni segmento rettilineo del campo s, parallelo all'asse delle x, il che non è dimostrato dover necessariamente accadere quando si *supponga soltanto che* $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x}$ *sia finita ed integrabile in tutta l'area* s.

Ritenuta la linea l percorsa nel senso positivo, cioè in guisa che l'osservatore abbia sempre l'area racchiusa da quella stessa parte dalla quale un'osservatore, percorrente l'asse delle x nel senso positivo, ha la regione delle y positive, si ha ovviamente:

$$-\int \mathrm{f} \cos(n\,, x)\, dl = \int_l \mathrm{f}\, dy\,.$$

Si immagini suddivisa l in tante parti per mezzo di tante parallele all'asse delle x; detta Δy la distanza fra due parallele consecutive $(y\,, y+\Delta y)$ e distinti cogli indici e ed u un punto di entrata ed il successivo punto di uscita nell'area s della parallela y all'asse delle x, avremo:

$$-\int f\cos(n\,.\,x)\,dl = \lim \sum_{(\Delta y)} \big(f(x_u\,,y) - f(x_e\,,y)\big)\,\Delta y \quad (*).$$

Si immagini inoltre condotte attraverso l'area s tante parallele x all'asse delle y: il segmento eu riuscirà così suddiviso in tante parti Δx, ed avremo:

$$f(x_u\,,y) - f(x_e\,,u) = \sum_{(\Delta x)} f'_x(x_i\,,y)\,\Delta x\,,$$

dove x_i è uno dei valori che la x prende lungo il segmento Δx.

Sarà quindi:

$$-\int f\cos(n\,,x)\,dl = \lim \sum_{(\Delta y)} \sum_{(\Delta x)} f'_x(x_i\,,y)\,.\,\Delta x\,.\,\Delta y\,,$$

dove il numero delle dividenti parallele all'asse delle y è arbitrario.

Si può adunque fare in guisa che le Δx, crescendo il loro numero all'infinito, divengano tutte quante infinitesime insieme alle Δy e perciò essendo $f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ integrabile, si conchiude:

$$-\int f\cos(n\,,x)\,dl = \int \frac{\partial f}{\partial x}\,ds\,. \qquad \text{c. d. d.}$$

La formula continua a sussistere anche quando $\frac{\partial f}{\partial x}$ diventi infinito, con segno determinato o non, in un numero finito di punti del campo s o del suo contorno. Infatti, esclusi questi dal campo di integrazione togliendo dal medesimo tanti intorni dei punti stessi, all'area residua è applicabile la formula: ma qualunque sia la forma degli intorni gli integrali $\int f\cos(n\,.\,x)\,dl$, estesi ai rispettivi contorni, sono tutti evanescenti colle dimensioni degli intorni stessi, e però col passaggio al limite si conclude la validità della formula.

Così pure si dimostra valida la formula anche quando il numero dei punti di infinito sia infinitamente grande, ma tale però che divenga finito togliendo intorni arbitrariamente piccoli di parecchi punti limiti.

Con considerazioni affatto simili si dimostra rigorosamente la validità delle note formule congeneri, relative alle funzioni di 3 variabili, per es. di quella formula da me data ultimamente nei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo » (**).

G. Morera.

(*) Per semplicità si suppone che le parallele y all'asse delle x non incontrino la linea l in più di due punti.

(**) Cfr. il tomo X, adunanza del 22 Dicembre 1895.

Alcuni teoremi intorno alle funzioni logiche.

Già il Boole aveva dimostrato che, per ottenere il prodotto di due funzioni, basta moltiplicare i coefficienti omonimi dei loro sviluppi secondo un determinato argomento. Lo Schröder, nelle sue *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, riprodusse questo teorema al n° 45 (Vol. I, p. 421), vi premise l'analogo per la somma (Vorbemerkung zu Th. 45, p. 420) e vi aggiunse l'altro (n° 46, p. 422): « la negazione di una funzione sviluppata si ottiene negando i coefficienti e lasciando invariati i costituenti ». Donde concluse che « in virtù di tali teoremi si può dire che ogni operazione, da eseguirsi con o su funzioni, si può semplicemente trasportare ai coefficienti dei loro sviluppi ».

Nella Nota presente si dimostra direttamente tale teorema, dividendolo in due e preponendovi come lemmi, I° una proposizione analoga al teorema così detto dei coefficienti eguali, nella teoria delle funzioni analitiche, e II° la proposizione intorno alla negazione (n° 46 dello Schröder).

Lemma I° — Per una funzione vi è uno ed un solo sviluppo secondo un dato argomento. Ossia:

1) Due funzioni $f(a)$ e $g(a)$ tra loro identiche, cioè eguali per ogni valore di a, hanno i coefficienti di sviluppo omonimi rispettivamente eguali.

Diffatti, sussistendo la eguaglianza

$$f(a) = g(a)$$

per tutti i valori di a, sarà, per $a = 1$ e per $a = 0$:

$$f(1) = g(1) \quad \text{e} \quad f(0) = g(0)\,. \qquad \text{c. v. d.}$$

2) Due funzioni che hanno i coefficienti di sviluppo omonimi rispettivamente eguali, sono tra loro identiche.

Si ha per ipotesi:

$$f(1) = g(1)$$
$$f(0) = g(0)\,.$$

Presi un qualunque valore a della variabile e la sua negazione a_1, si ha, moltiplicando la prima equazione per a e la seconda per a_1 ed addendo:

$$f(1)a + f(0)a_1 = g(1)a + g(0)a_1 ;$$

ossia

$$f(a) = g(a) . \qquad \text{c. v. d.}$$

Lemma II° — Per negare una funzione sviluppata basta negare i coefficienti.

$$\begin{aligned} f_1(a) = [f(1)a + f(0)a_1]_1 &= [f_1(1) + a_1]\,[f_1(0) + a] \\ &= f_1(1)\,f_1(0) + f_1(1)a + f_1(0)a_1 \\ &= f_1(1)\,f_1(0)a + f_1(1)\,f_1(0)a_1 + f_1(1)a + f_1(0)a_1 \\ &= f_1(1)a + f_1(0)a_1 . \qquad \text{c. v. d.} \end{aligned}$$

Teorema I° — Per eseguire una qualsiasi operazione (G) su di una funzione sviluppata (f) basta eseguirla sui coefficienti.

Ossia: posto

$$G[f(a)] = \psi(a) ,$$

sarà:

$$\psi(1) = G[f(1)] \quad \text{e} \quad \psi(0) = G[f(0)] .$$

Difatti, sviluppando G per $f(a)$:

$$\psi(a) = G(1)f(a) + G(0)f_1(a)$$

e quindi sviluppando per a è

$$= G(1)\,\{f(1)a + f(0)a_1\} + G(0)\,\{f_1(1)a + f_1(0)a_1\} ,$$

per il lemma II°.

Mettendo in evidenza a ed a_1:

$$\begin{aligned} &= \{G(1)f(1) + G(0)f_1(1)\}a + \{G(1)f(0) + G(0)f_1(0)\}a_1 \\ &= G[f(1)] \,.\, a + G[f(0)] \,.\, a_1 , \end{aligned}$$

si ottiene, per il lemma I°, eguagliando i coefficienti:

$$\psi(1) = G[f(1)] \quad \text{e} \quad \psi(0) = G[f(0)] . \qquad \text{c. v. d.}$$

Teorema II° — Per eseguire una qualsiasi operazione con funzioni logiche, basta eseguirla fra i coefficienti omonimi dei loro sviluppi.

Ossia: posto

$$G[f(a) , g(a)] = \psi(a) ,$$

sarà:

$$\psi(1) = G[f(1) , g(1)] \quad \text{e} \quad \psi(0) = G[f(0) , g(0)] .$$

Difatti, sviluppando G per $f(a)$ e $g(a)$:

$$\psi(a) = G(1,1)f(a)g(a) + G(1,0)f(a)g_1(a) + G(0,1)f_1(a)g(a) + G(0,0)f_1(a)g_1(a) ,$$

e quindi sviluppando per a, e mettendo in evidenza a ed a_1, è:

$$\begin{aligned} \psi(a) = &\{G(1,1)f(1)g(1) + G(1,0)f(1)g_1(1) + G(0,1)f_1(1)g(1) + G(0,0)f_1(1)g_1(1)\}a \\ &+ \{G(1,1)f(0)g(0) + G(1,0)f(0)g_1(0) + G(0,1)f_1(0)g_1(0) + G(0,0)f_1(0)g_1(0)\}a_1 \\ = &G[f(1),g(1)].a + G[f(0),g(0)].a_1 \end{aligned}$$

ed eguagliando i coefficienti, si ottiene:

$$\psi(1) = G[f(1),g(1)] \quad \text{e} \quad \psi(0) = G[f(0),g(0)] . \qquad \text{c. v. d.}$$

Il teorema si può facilmente estendere, con la prova da n ad $n+1$, per qualsivoglia numero di funzioni. I due teoremi dati dallo Schröder, al n° 45, si deducono come corollarî.

Roma, gennaio 1896.

Albino Nagy.

NOUVELLES PUBLICATIONS

E. Carvallo. — *Méthode pratique pour la résolution numérique complète des équations algébriques ou trascendantes.* Paris, Nony, 1896.

F. Klein. — *Conferenze sopra alcune questioni di Geometria elementare,* redatte da F. Tägert, e tradotte dal tedesco dal Prof. F. Giudice, con una prefazione del Prof. Gino Loria. Torino, Rosenberg e Sellier, 1896; L. 3.

F. Klein. — *Leçons sur certaines questions de Géométrie élémentaire.* Rédaction française par J. Gries. Paris, Nony, 1896; 2 fr.

H. Grassmann. — *Gesammelte Werke.* I Band, II Theil. *Die Ausdehnungslehre von 1862.* Leipzig, Teubner, 1896; pag. VIII+511.

E. Goursat. — *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre.* Tome I, Paris, Hermann, 1896; pag. VIII+226, prix 7,50 fr.

Dr O. Stolz. — *Grundzüge der Differential- und Integralrechnung.* Zweiter Theil, Leipzig, Teubner, 1896; pag. VIII+338.

Dr G. M. Testi. — *Corso di Matematiche.* Vol. II, *Geometria elementare.* Livorno, Giusti, 1896; pag. XI+448.

A. Messina. — *I misuratori di energia elettrica.* Palermo, Reber, 1896, pag. XIX+130; L. 5.

Sulle serie di funzioni analitiche

Osservazioni di F. GERBALDI, *a Palermo*

Nell'importante opera del CASORATI « Teorica delle funzioni di variabile complessa. Pavia, 1868 » si legge a pag. 267 il seguente teorema:

Se entro una porzione S *del piano* z *le*

$$Q_1(z),\ Q_2(z),\ \ldots$$

sono funzioni monodrome, continue e finite, e la serie

$$Q_1(z)+Q_2(z)+\ldots \tag{1}$$

è convergente:

1° *La somma* $\Phi(z)$ *di questa serie sarà pure funzione monodroma, continua e finita entro* S;

2° *Entro* S *si avrà:*

$$\frac{d\Phi}{dz}=\frac{dQ_1(z)}{dz}+\frac{dQ_2(z)}{dz}+\ldots;$$

3° *Si avrà pure:*

$$\int \Phi(z)\,dz=\int Q_1(z)\,dz+\int Q_2(z)\,dz+\ldots,$$

intendendo che gli integrali siano presi tutti lungo una medesima linea di lunghezza finita tracciata entro S.

Questo teorema non si trova dimostrato nell'opera suddetta; il CASORATI si limita ad accennare in nota [1] che una dimostrazione era stata data dal sig. H. LAURENT (1865).

La continuità della funzione rappresentata da una serie convergente,

[1] V. anche la nota a pag. IX della Prefazione.

i cui termini sono funzioni continue di una variabile reale, o di una variabile imaginaria nel senso generale inteso da CAUCHY, risale a CAUCHY medesimo (1821). Ma il teorema da lui esposto nel suo celebre « Cours d'Analyse de l'École Polytechnique », a pag. 131 e 279, ha bisogno di restrizioni, siccome osservò per il primo ABEL (1826) nella sua memoria sulla serie binomiale [1].

Ritornato più tardi CAUCHY sullo stesso argomento, nella « Note sur les séries convergentes dont les diverses termes sont des fonctions continues d'une variable réelle ou imaginaire, entre des limites données » [2], limitò la natura della convergenza della serie, supponendo che essa sia, come oggi si dice, in ugual grado (o uniforme, o equabile); e con questa restrizione la continuità della funzione rappresentata dalla serie fu rigorosamente stabilita. Inoltre, a proposito delle serie i cui termini sono funzioni di variabile imaginaria, nella *Note* ora citata il CAUCHY asserisce senza dimostrazione: *Nello stesso caso, se ogni termine offre una derivata unica, la serie formata colle derivate dei diversi termini sarà ancora una serie convergente, di cui la somma offrirà una sola derivata equivalente alla derivata della somma della serie proposta.* In questo luogo di CAUCHY troviamo per la prima volta pubblicate le parti prima e seconda del teorema sopra enunciato, coll'aggiunta però della restrizione della equabile convergenza della serie.

Per ciò che riguarda la terza parte, CAUCHY ritenne sufficiente la sola convergenza della serie in tutto il campo di integrazione [3].

Assai prima che comparisse la *Note* sopra citata di CAUCHY, il WEIERSTRASS era in possesso delle due prime parti del teorema, rigorosamente enunciate e dimostrate, siccome ora risulta dalla pubblicazione delle sue opere [4]. Quivi di fatto troviamo una memoria « Zur Theorie der Potenzreihen », scritta a Münster nel 1841, nella quale [5] si stabilisce che:

Se

$$F_0(x_1, x_2, \ldots x_\rho),\quad F_1(x_1, x_2, \ldots x_\rho),\quad F_2(x_1, x_2, \ldots x_\rho),\ \ldots$$

denotano funzioni a un sol valore, analitiche, delle variabili $x_1, x_2, \ldots x_\rho$,

[1] *Crelle's Journal*, Bd. I, pp. 311-339.

[2] *Comptes rendus*, XXXVI (14 mars 1853).

[3] Cfr. MOIGNO « Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral, redigées d'après les méthodes de M. Cauchy, Paris, t. II (1844), pag. 70 ».

[4] *Mathematische Werke von Karl Weierstrass*, Berlin, Bd. I (1894), Bd. II (1895).

[5] l. c., Bd. II, pag. 73.

le quali soddisfano alla condizione che, per tutti i sistemi di valori appartenenti ad un campo connesso G, *la serie*

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} F_\mu(x_1, x_2, \dots x_\rho)$$

è assolutamente ed uniformemente convergente, la sua somma rappresenta dentro al campo G *una funzione ad un sol valore, analitica, di* $x_1, x_2, \dots x_\rho$, *ed inoltre si ha (per* $\lambda = 1, 2, \dots \rho$*)*:

$$\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} F_\mu(x_1, x_2, \dots x_\rho) = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty}\frac{\partial}{\partial x_\lambda} F_\mu(x_1, x_2, \dots x_\rho).$$

Limitando questa proposizione al caso di funzioni di una sola variabile, e tenendo presente che una funzione della variabile complessa, monogena (secondo Cauchy), monodroma e continua in un campo G [1], coincide, per il celebre teorema di Cauchy (1832) sulla sviluppabilità di tali funzioni in serie di potenze, con una funzione *analitica* (secondo Weierstrass) di z in quel campo, si vede subito che in quest'ultima proposizione sono contenute le parti prima e seconda del teorema enunciato in principio, colla restrizione della convergenza della serie assoluta ed uniforme.

Questa stessa restrizione avvertì il Weierstrass, prima del 1870 [2], doversi fare per essere sicuri che una serie di funzioni sia integrabile termine a termine. Il Darboux nel suo « Mémoire sur les fonctions discontinues » [3] ed il Dini nei suoi « Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali, Pisa 1878 » diedero esempi di serie convergenti, ma non uniformemente, tali che la somma è continua, e ciò nonostante la serie degli integrali non converge, o, essendo convergente, non rappresenta l'integrale della serie data. Questi matematici inoltre stabilirono rigorosamente per le serie di funzioni di variabile reale che, affinchè sia applicabile l'integrazione termine a termine è sufficiente la convergenza equabile della serie nello intervallo di integrazione, ed affinchè sia applicabile la derivazione termine a termine, è sufficiente che la serie delle derivate sia uniformemente convergente in un intorno finito del punto, in cui si prendono le derivate; e con ciò apportarono

(1) o, come altri dicono, una *funzione olomorfa*, o *sinettica*, in un campo G.

(2) Cfr. E. Heine: « Ueber trigonometrische Reihen », *Crelles Journal*, Bd. 71, pag. 353.

(3) *Annales de l'École Normale Supérieure*, 1875.

all'analisi con variabile reale quei perfezionamenti che il Casorati desiderava fin dal 1868 (v. nota a pag. 268 della sua « Teorica »).

Tali risultati si estendono subito alle serie i cui termini sono funzioni di variabile complessa; e però, per applicare con sicurezza le parti prima e seconda del teorema, gli analisti rigorosi vollero eziandio per le funzioni di variabile complessa studiare ogni volta insieme alla serie data anche la serie delle derivate. Citiamo ad esempio la memoria del Dini « Alcuni teoremi sulle funzioni di una variabile complessa », scritta nell'ottobre 1880, ed inserita nei *Collectanea Mathematica in memoriam D. Chelini* (cfr. pag. 260).

Se non che ben diceva il Casorati nella nota, già citata, a pag. 267 della sua « Teorica »: *Nel presente argomento della continuità e derivazione delle serie, non meno che in tutte le altre parti dell'analisi delle funzioni, la considerazione della variabile complessa, congiunta coll'adottato concetto di funzione, permette di introdurre una regolarità e semplicità, che non si può avere quando la variabile è limitata a punti-valore costituenti una estensione d'una sola dimensione, ciò è dire infine, a valori reali.* Ed invero, se i termini d'una serie sono funzioni di variabile complessa, olomorfe in un'area S, per conchiudere le parti prima e seconda del teorema, è sufficiente che la serie sia in quell'area assolutamente e uniformemente convergente; la considerazione della serie delle derivate è superflua. Ciò segue non soltanto dal teorema del Weierstrass, sopra riportato, che non sembra sia stato pubblicato prima del 1894, ma eziandio del teorema seguente, che lo stesso Weierstrass diede nella sua memoria « Zur Functionenlehre », presentata il 12 agosto 1880 all'Accademia delle Scienze di Berlino [1].

Siano date, in un ordine determinato, infinite serie di potenze d'una variabile $z = x + iy$

$$P(z),\ P_1(z),\ P_2(z),\ \dots$$

ciascuna serie potendo contenere un numero qualunque di potenze positive e negative, e sia possibile assegnare due numeri R *e* R', *dei quali il primo sia positivo o nullo, e il secondo sia più grande del primo, e tali che nel campo definito dalla limitazione*

$$R < |z| < R'$$

(1) *Monatsberichte der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1880, pag. 719. Cfr. pure: *Abhandlungen aus der Functionenlehre* (Berlin 1886) pag. 74; *Mathematische Werke*, Bd. II, pag. 205; e ancora: Biermann, *Theorie der analytischen Functionen* (Berlin 1887) pag. 146; Forsyth, *Theory of Functions of a complexe Variable* (Cambridge 1893), pag. 129.

non solamente ciascuna delle date serie converge, ma converge ancora la somma $\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(z)$, *e veramente quest'ultima converge uniformemente per tutti quei valori della variabile che hanno uno stesso modulo. — Allora, se* $A_\mu^{(\nu)}$ *indica il coefficiente di* z^μ *in* $P_\nu(z)$, *la somma* $\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\mu^{(\nu)}$ *avrà, per ogni valore di* μ, *un valore finito, che si indicherà con* A_μ, *e per ogni valore di* z, *il cui modulo cade tra* R *e* R', *la serie* $\sum_\mu A_\mu z^\mu$ *converge, e si ha*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(z) = \sum_\mu A_\mu z^\mu. \quad (^1)$$

Si ha inoltre (²)

$$\frac{d}{dz}\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d\,P_\nu(z)}{dz}.$$

Questo teorema è oggigiorno da ritenersi come fondamentale nella teoria delle funzioni di variabile complessa, per le importanti e numerose applicazioni che dal 1880 in qua se ne sono fatte nell'analisi; tra le quali basti accennare, oltre a quelle dovute al WEIERSTRASS stesso, quella che ha servito al MITTAG-LEFFLER (³) per stabilire il celebre teorema che porta il suo nome, e quella fattane dal POINCARÉ nel costruire le funzioni thetafuchsiane (⁴).

Appunto per il vantaggio, che offre il teorema in discorso, di risparmiare (se non sempre, almeno in un numero grandissimo di casi) lo studio della serie delle derivate, sarebbe stato utile che esso avesse trovato posto nell'eccellente trattato del JORDAN « Cours d'Analyse de l'École Polytechnique », dove si ha da rilevare che esso fu bensì

(¹) La traduzione in questi termini è tolta dalla Nota del Prof. C. ARZELÀ: « Sulla teoria delle funzioni analitiche », *Rendiconto delle Sessioni della R. Acc. delle Sc. dell'Istituto di Bologna*, dicembre 1887.

(²) V. ad es. nei *Mathematische Werke* la nota a pag. 208, del Bd. II.

(³) « Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable independante », *Acta Mathematica*, v. IV (1884), pag. 14.

(⁴) « Mémoire sur les fonctions Fuchsiennes », *Acta Mathematica*, v. I (1882). È chiaro, sebbene non lo richiami espressamente, che il POINCARÉ si appoggia sul teorema in discorso, per concludere (l. c., pag. 208), appena dimostrata la convergenza assoluta ed equabile della serie $\Theta(z)$ in un certo campo, che questa rappresenta ivi una funzione olomorfa, e per applicare in seguito alla stessa serie la derivazione termine per termine.

enunciato nell'indice (pag. XII) del tomo I (2ᵉᵐᵉ édition) colle parole: « *Une série uniformément convergente, à termes synectiques, est synectique* »; ma non è svolto nel testo.

Il vantaggio poi diventa anche maggiore, se si tien conto di una proposizione dimostrata dal RUNGE (¹), per la quale basta avere verificata la uniforme convergenza della serie al contorno dell'area S, quando questo contorno è finito; giacchè dalla uniforme convergenza lungo il contorno, segue la uniforme convergenza della serie in un'area qualunque S', che abbia tutti i punti intermi ad S. Così che il teorema si può enunciare come segue:

Sia una serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ *ed un'area* S *semplicemente connessa. Se le funzioni* $f_n(z)$ *sono funzioni della variabile complessa* z *olomorfe nell'area* S *e continue al contorno, e se la serie converge uniformemente sul contorno:* 1°) *la serie converge uniformemente in ogni area* S', *che ha tutti i punti interni ad* S, *e rappresenta una funzione* $F(z)$ *di variabile complessa olomorfa in* S'; 2°) *le serie formate colle derivate* m^{esime} *dei termini* $f_n(z)$ *convergono pur esse uniformemente in* S' *e rappresentano le derivate* m^{esime} *di* $F(z)$.

Sotto questa forma il teorema è stato enunciato e dimostrato da P. PAINLEVÉ (giugno 1887) nella tesi: « Sur les lignes singulières des fonctions analytiques », tesi che fu poi inserita negli *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. II (1888). Il PAINLEVÉ lo stabilisce con un procedimento del tutto indipendente da quello tenuto dal WEIERSTRASS; la dimostrazione del PAINLEVÉ si legge anche nel « Cours d'Analyse professé par M. DEMARTRES, Paris (1892), 2ᵉᵐᵉ partie, p. 74 ».

Intorno allo stesso teorema citeremo ancora due note, l'una di DE LA VALLÉE POUSSIN « Note sur les séries dont les termes sont fonctions d'une variable complexe », l'altra di LERCH « Sur la différentiation des séries », inscrite entrambe nel v. XI (1892) del *Jornal de Sciencias Math. e Astr.*, dove si vede che questi autori si sono occupati ciascuno direttamente della questione, senza essere informati dei lavori precedenti di WEIERSTRASS, di RUNGE e PAINLEVÉ.

Frattanto resta pienamente stabilito che la uniforme convergenza della serie al contorno dell'area S è sufficiente per concludere tutte tre le parti del teorema. Ma è essa necessaria?

Per la serie di funzioni di variabile reale, tutte finite e continue in uno stesso intervallo, le condizioni necessarie e sufficienti perchè sia applicabile la derivazione e la integrazione termine a termine furono

(¹) « Zur Theorie der analytischen Functionen », *Acta Mathematica*, VI (1885).

stabilite dal Prof. ARZELÀ [1], il quale ha a questo scopo introdotto il concetto d'una particolare maniera di convergenza delle serie di funzioni, che è più generale della convergenza uniforme, e che egli ha chiamato *convergenza uniforme a tratti.*

Per le serie di funzioni di variabile complessa, olomorfe in un campo comune, il RUNGE mostrò per il primo, nel lavoro che di lui abbiamo sopra citato, con un esempio d'una serie di funzioni razionali intere, che la convergenza uniforme della serie in quel campo non è necessaria, e che questa può cessare lungo certe linee del campo, mentre tuttavia la serie converge e rappresenta una funzione olomorfa nel campo.

Questa osservazione del RUNGE spinse il prof. ARZELÀ a cercare le condizioni necessarie e sufficienti, affinchè una serie di funzioni di variabile complessa, olomorfe in un'area S semplicemente connessa, rappresenti pure una funzione olomorfa in quest'area; tali condizioni furono da lui trovate ed esposte nella Nota « Sulla teoria delle funzioni analitiche » più sopra citata, nella quale è introdotto il concetto della *convergenza uniforme a strati* per una serie di funzioni di due variabili reali, o di funzioni di una variabile complessa.

Palermo, dicembre 1895.

F. GERBALDI.

[1] « Intorno alla continuità delle somme di infinite funzioni continue », *Rendic. dell'Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna,* 17 aprile 1884. — « Sull'integrabilità d'una serie di funzioni », *Rendic. della R. Acc. dei Lincei,* v. I, s. IV, maggio 1885.

Sul teorema dell'esistenza delle funzioni Fuchsiane

Nota del Dr. F. BAGNERA, *a Palermo*

Sia G un gruppo Fuchsiano, le cui sostituzioni

$$T_n = \left[z \,, \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n} \right]$$

lasciano inalterata la circonferenza C, che diremo *fondamentale,* col centro nell'origine e col raggio eguale all'unità.

Si sa che in corrispondenza ad un tale gruppo, esiste un modo (anzi infiniti modi) di dividere *tutto* il piano in regioni R tali che, da una di esse R_0, si passa ad un'altra qualunque R_n, mediante una ben determinata sostituzione di G: ogni regione R confina, lungo tutto il suo perimetro, con certe sue trasformate, ed è costituita di due poligoni normali, ciascuno ad un sol contorno, ovvero di un solo poligono normale, ma a più contorni, secondo che i punti ove G è continuo, tutti situati sopra la circonferenza fondamentale, esauriscono, o no, tutti i punti di questa.

Ha alta importanza il fatto che, per ogni gruppo tale che G, esistono infinite funzioni uniformi della variabile complessa z, legate due a due da relazioni algebriche, che restano inalterate per tutte le sostituzioni del gruppo. Per arrivare a questo risultato, il sig. H. POINCARÉ (*) dimostra, supponendo l'intero m maggiore dell'unità, la convergenza assoluta ed equabile della serie

$$(1) \qquad \Theta(z) = \Sigma\, H\left(\frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n}\right)(c_n z + d_n)^{-2m},$$

purchè z non sia:

(*) *Mémoire sur les fonctions Fuchsiennes,* Acta Mathematica, I, pag. 207.

1°) Uno dei trasformati, per qualche sostituzione di G, dei poli della funzione razionale H(z), nessuno dei quali cade sopra C,

2°) Un punto come $-\frac{d_n}{c_n}$, quando è $c_n \neq 0$, trasformato del punto ∞ per una sostituzione di G,

3°) Un punto singolare essenziale di G, cioè un punto ove detto gruppo è continuo.

Scopo della presente nota è di dare, di detta convergenza, una dimostrazione che, oltre all'estrema semplicità, ha il vantaggio di mettere in rilievo la continuità della funzione $\Theta(z)$ rispetto ai parametri che definiscono le sostituzioni fondamentali del gruppo G; giacchè, le diseguaglianze, che si stabiliranno, non cessano di sussistere quando si facciano subire a detti parametri variazioni sufficientemente piccole (*).

Il punto z che si considera sarà dunque interno (o sul perimetro) ad un poligono generatore di G, che chiameremo R_0, ed è possibile segnare un contorno chiuso C_0, tutto compreso in R_0, che contenga internamente (o sul perimetro) z, ma nessuno dei punti esclusi precedentemente.

La somma delle aree A_n limitate dai contorni C_n, trasformati di C_0 mediante le diverse sostituzioni di G, è finita. Il fatto è evidente se C_0 è tutto interno a C, il che è lecito supporre tutte le volte che z è interiore a C o sopra C, giacchè dette aree sono allora tutte interne a C e, d'altronde, non si sovrappongono; quando invece z è esterno a C, si considereranno le reciproche delle aree A_n rispetto a C, per osservare che nessuna di esse contiene l'origine, perchè dietro le ipotesi ammesse, nessuna delle A_n contiene il punto ∞; quindi dette reciproche sono tutte esteriori ad una circonferenza concentrica a C e di raggio convenientemente piccolo; entro la reciproca di questa circonferenza cadono certamente tutte le aree A_n.

Ciò posto, sia Γ una circonferenza di raggio maggiore dell'unità e concentrica a C. Dei punti come $-\frac{d_n}{c_n}$, che sono tutti esteriori a C, quelli che cadono esternamente a Γ sono in numero finito; altrimenti l'insieme dei trasformati dell'origine, per le sostituzioni di G, avrebbe un punto limite non situato sopra C; poi, quelli che cadono internamente a Γ hanno, da un punto qualunque z di C_0, una distanza $\left|z+\frac{d_n}{c_n}\right|$ finita. Inoltre, l'insieme dei punti $-\frac{d_n}{c_n}$ non ha, per ipotesi, alcun punto limite sopra C_0; quindi è possibile trovare due numeri p, q positivi tali che, qualunque sia n, è

$$p < \left|z+\frac{d_n}{c_n}\right|^2 < q,$$

per tutti i valori di z che rappresentano punti del contorno C_0.

(*) Cfr. D'Ovidio: « Sulle funzioni Thetafuchsiane ». *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino,* vol. XXIX.

D'altra parte, siccome le sostituzioni di G conservano gli angoli, due elementi d'area che si corrispondono mediante la sostituzione T_n, stanno come i quadrati degli elementi lineari, il cui rapporto è

$$\frac{1}{|c_n z + d_n|^4};$$

quindi,

$$A_n = \iint_{A_0} \frac{dx\,dy}{|c_n z + d_n|^4}.$$

Si conclude che

$$A_n > \frac{A_0}{|c_n|^4 q^2} > \frac{A_0 p^2}{|c_n|^4 \left|z+\frac{d_n}{c_n}\right|^4 q^2};$$

ossia

$$\frac{1}{|c_n z + d_n|^4} < \frac{q^2}{p^2}\frac{A_n}{A_0}.$$

Se si tiene presente la convergenza della serie ΣA_n e si osserva che l'ultima diseguaglianza ha luogo anche nel caso finora escluso, cioè quando $c_n = 0$, perchè allora è $\left|\frac{1}{d_n}\right|^4 = \frac{A_n}{A_0}$, si vede che la serie

$$\Sigma\, |c_n z + d_n|^{-2m},$$

per $m = 2$, converge equabilmente sopra il contorno C_0. Se poi m supera 2, la detta serie converge ancora più, giacchè, confrontandola colla serie, che si ha per il caso $m = 2$, il rapporto

$$\frac{1}{|c_n z + d_n|^{2(m-2)}}$$

tende a zero quando n cresce oltre ogni limite.

Se z è un punto qualunque di C_0, l'insieme dei punti

$$\frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n}$$

ha tutti i suoi punti limiti situati sopra C, dove, per ipotesi, non cadono poli di $H(z)$; pertanto, si può dedurre una circonferenza, concentrica a C, in modo che nella corona determinata da detta circonferenza e da C, cadano infiniti punti dell'insieme, ma nessun polo di $H(z)$; allora, giacchè i punti dell'insieme che stanno fuori della corona sono in numero finito, ed inoltre la funzione $H(z)$ è supposta finita sopra i singoli contorni C_n, è possibile determinare un numero Q tale che, qualunque sia n, si abbia

$$\left| H\left(\frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n}\right)\right| < Q,$$

per tutti i punti z di C_0: dunque, rimane pienamente dimostrata la convergenza assoluta ed equabile della serie (1) sopra il contorno C_0.

Allora, dal momento che i varî termini di detta serie sono funzioni olomorfe di z entro l'area A_0 e continue al contorno C_0, si può dire per un noto teorema (*) che la serie (1) definisce una funzione della variabile complessa z, che è olomorfa entro l'area racchiusa da C_0, e di cui la derivata è definita dalla serie che si ottiene derivando termine a termine la (1).

Palermo, novembre 1895.

G. Bagnera.

(*) V. le precedenti *Osservazioni sulle Serie di Funzioni Analitiche* del Prof Gerbaldi.

Di alcune proposizioni fondamentali relative al mutuo separarsi di coppie di punti.

Mi propongo di procedere nella via tracciata dal mio egregio amico Dott. G. Vailati per stabilire le proprietà fondamentali delle coppie di punti che si separano. È opportuno ch'io rammenti al lettore i risultati cui egli pervenne [1]).

***

Convenuto di rappresentare con S_1 la classe degli elementi considerati, ciascuno di questi con una lettera italica minuscola, col segno $||$ una relazione la quale soddisfi alle condizioni espresse dalle proposizioni

(1) $\quad ab \,||\, cd \,.=.\, cd \,||\, ab$

(2) $\quad ab \,||\, cd \,.=.\, ab \,||\, dc$

(3) $\quad ab \,||\, cd \,.\, ac \,||\, bd :=: \Lambda$

(4) $\quad ab \,||\, cd \,.\cup.\, ac \,||\, bd \,.\cup.\, ad \,||\, bc$

(5) $\quad ab \,||\, cd \,.\, ac \,||\, be : \supset : ac \,||\, de,$

è chiaro che — tra le interpretazioni di cui sono suscettibili, dopo ciò, S_1 ed $ab \,||\, cd$ — v'è la seguente: S_1 è una linea continua, chiusa, priva di nodi, considerata come classe di punti; $ab \,||\, cd$ significa che le coppie ab e cd si separano.

[1]) G. Vailati. *Sulle relazioni di posizione tra punti d'una linea chiusa.* Rivista di Matematica, a. 1895. — G. Vailati. *Sulle proprietà caratteristiche delle varietà a una dimensione.* Rivista di Matematica, a. 1895.

Considerando come fondamentali le (1-5), l'A. dimostra, ricorrendo alle (1), (2) e (5), che

$$(6) \qquad ab \,\|\, cd \,.\, ac \,\|\, be : \supset : cd \,\|\, be$$ [2]

e — ricorrendo a tutte le (1-5) — che

$$(7) \qquad ab \,\|\, cd \,.\, ab \,\|\, ce \,.\, ab \,\|\, de : = : \Lambda \,.$$

Inoltre l'A., mediante la proposizione

$$
\begin{aligned}
(8) \qquad & ab \,\|\, cd \,.\, cd \,\|\, ae \,.\, ae \,\|\, bd \,.\, bd \,\|\, ce \,.\, ce \,\|\, ab : \\
\cup : {} & ab \,\|\, cd \,.\, cd \,\|\, ae \,.\, ae \,\|\, cb \,.\, cb \,\|\, ed \,.\, ed \,\|\, ab : \\
\cup : {} & ab \,\|\, cd \,.\, cd \,\|\, eb \,.\, eb \,\|\, ac \,.\, ac \,\|\, de \,.\, de \,\|\, ab : \\
\cup : {} & ac \,\|\, bd \,.\, bd \,\|\, ec \,.\, ec \,\|\, ad \,.\, ad \,\|\, eb \,.\, eb \,\|\, ac : \\
\cup : {} & ad \,\|\, cb \,.\, cb \,\|\, ae \,.\, ae \,\|\, cd \,.\, cd \,\|\, eb \,.\, eb \,\|\, ad : \\
\cup : {} & ad \,\|\, cb \,.\, cb \,\|\, ed \,.\, ed \,\|\, ac \,.\, ac \,\|\, eb \,.\, eb \,\|\, ad \,,
\end{aligned}
$$

definisce una relazione tra cinque elementi a, b, e, d, e di S_1 (o di due d, e rispetto a tre fissi a, b, c), la quale egli rappresenta con la notazione $e\,\mathrm{S}\,(abc)\,d$ (ch'egli suggerisce di leggere *e segue d nell'ordine abc*) [3]. Dalle proprietà anteriormente attribuite alla notazione $ab \,\|\, cd$, l'A. deduce

$$(1') \qquad e\,\mathrm{S}\,(abc)\,d \,.\, d\,\mathrm{S}\,(abc)\,e : = : \Lambda$$

$$(2') \qquad \mathrm{f}\,\mathrm{S}\,(abc)\,e \,.\, e\,\mathrm{S}\,(abc)\,d : \supset : \mathrm{f}\,\mathrm{S}\,(abc)\,d$$

---

[2]) La proposizione

$$(1) \,.\, (2) \,.\, (5) : \supset : (6)$$

può dimostrarsi, più semplicemente, così:

$$
\begin{aligned}
(5) \,.\!\cdot\!.\, \supset \,.\!\cdot\!.\, & ab \,\|\, cd \,.\, ac \,\|\, be : \supset : ac \,\|\, de \,.\, ab \,\|\, cd \,, \\
(1) \,.\, (2) \,.\!\cdot\!.\, \supset \,.\!\cdot\!.\, & ac \,\|\, de \,.\, ab \,\|\, cd : = : ca \,\|\, de \,.\, cd \,\|\, ab \,, \\
(5) \,.\, \begin{pmatrix} c\,a\,d\,e\,b \\ a\,b\,c\,d\,e \end{pmatrix} \,.\!\cdot\!.\, \supset \,.\!\cdot\!.\, & ca \,\|\, de \,.\, cd \,\|\, ab : \supset : cd \,\|\, eb \,, \\
(2) : \supset : {} & cd \,\|\, eb \,. = .\, cd \,\|\, be \,;
\end{aligned}
$$

quindi:

$$(1) \,.\, (2) \,.\, (5) : \supset : (6) \,.$$

[3]) La (8) poteva scriversi così:

$$
\begin{aligned}
(8') \qquad & ab \,\|\, ec \,.\, ae \,\|\, bd : \cup : ab \,\|\, ed \,.\, ae \,\|\, bc : \cup : ab \,\|\, cd \,.\, ac \,\|\, be : \\
\cup : {} & ad \,\|\, ce \,.\, ac \,\|\, db : \cup : ad \,\|\, cb \cdot ac \,\|\, de : \cup : ad \,\|\, eb \,.\, ae \,\|\, dc \,.
\end{aligned}
$$

ed osserva che la proprietà invariantiva della relazione $e\,\mathrm{S}\,(abc)\,d$ — da taluni autori assunta come fondamentale — segue immediatamente dalla proprietà invariantiva della relazione $ab \,\|\, cd$, per il fatto che quella fu definita con questa.

Quanto alle proposizioni (1-5) — risguardate dall'A. come fondamentali — è tuttora irresoluta la questione se esse siano *assolutamente indipendenti* (tali, cioè, che nessuna di esse possa dedursi dal sistema delle *rimanenti*); certo è, per intanto, ch'esse sono *ordinatamente indipendenti* (tali, cioè, che, nell'ordine in cui sono state enunciate, nessuna di esse può dedursi dal sistema delle *precedenti*) [4].

***

Il fatto che, nelle (1-5), due lettere *diverse* rappresentino due elementi *distinti*, non è esplicitamente affermato dall'A.; e l'affermarlo —

La sua legge di formazione è evidente:

dalla prima terna di termini si ottiene la seconda, mediante la sostituzione $\begin{pmatrix} d\,b\,e\,c \\ b\,d\,c\,e \end{pmatrix}$;

nella prima terna, dal primo termine si ottengono, successivamente, gli altri due, mediante le sostituzioni $\begin{pmatrix} e\,b \\ b\,e \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} e\,c \\ c\,e \end{pmatrix}$.

È opportuno accennare al modo di passare dalla (8) alla (8').

Dalle (5) e (6), mediante la sostituzione $\begin{pmatrix} e\,c\,d \\ c\,d\,e \end{pmatrix}$, si ottiene, complessivamente

$$(A) \qquad ab \,\|\, ec \,.\, ae \,\|\, bd : \supset : ae \,\|\, cd \,.\, ec \,\|\, bd \,.$$

Dalle (5), mediante la sostituzione $\begin{pmatrix} e\,b\,c \\ b\,c\,e \end{pmatrix}$, si ottiene

$$(B) \qquad ae \,\|\, bd \,.\, ab \,\|\, ec : \supset : ab \,\|\, dc \,.$$

Quindi — tenendo presenti le (A), (B), (1) e (2) — il primo termine della (8) si può ridurre al primo termine della (8'). Analogamente si effettua la riduzione degli altri termini.

Avverto che, per ragione di simmetria, al 5° ed al 6° termine della (8) corrispondono, rispettivamente, il 6° ed il 5° della (8'). Gli altri termini si corrispondono ordinatamente.

Inoltre — quanto alla scelta della notazione esprimente la relazione definita dalla (8') — preferirei una delle seguenti: « verso $(abc) \,. = .$ verso (ade) », « ordine $(abc) \,. = .$ ordine (ade) », « $(abc)\,,\,(ade) \,\varepsilon\, \mathrm{Eq}$ », leggendo *equiversi* ovvero *equiordinati* in luogo di Eq.

[4]) Ciò io ho dimostrato con opportune interpretazioni dei simboli, come risulta dalla cortesissima nota del Dott. G. VAILATI, inserita nel secondo dei suoi scritti citati.

per quanto mi disse — gli parve superfluo, perchè implicito nel sistema delle (1-5).

Invero — rappresentando d'or innanzi con lettere diverse elementi distinti — dalla (3), mediante le sostituzioni $\begin{pmatrix} a\,a\,a \\ b\,c\,d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a\,a\,b \\ b\,c\,d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b\,a\,a\,a \\ a\,b\,c\,d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b\,a\,a\,b \\ a\,b\,c\,d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b\,a\,a\,c \\ a\,b\,c\,d \end{pmatrix}$, si deduce, rispettivamente,

$$(\alpha) \qquad aa \parallel aa \,.=.\, \Lambda, \quad aa \parallel ab \,.=.\, \Lambda, \quad ba \parallel aa \,.=.\, \Lambda,$$
$$ba \parallel ab \,.=.\, \Lambda, \quad ba \parallel ac \,.=.\, \Lambda;$$

ricorrendo alla (2), per dare alla (3) la forma

$$ab \parallel dc \,.\, ac \parallel db :=: \Lambda,$$

da questa, mediante le sostituzioni $\begin{pmatrix} a\,a\,b \\ b\,c\,d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b\,a \\ c\,d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b\,a\,a\,c \\ a\,b\,c\,d \end{pmatrix}$, si deduce, rispettivamente,

$$(\beta) \qquad aa \parallel ba \,.=.\, \Lambda, \quad ab \parallel ab \,.=.\, \Lambda, \quad ba \parallel ca \,.=.\, \Lambda;$$

ricorrendo alle (1) e (2), per dare alla (3) la forma

$$ab \parallel cd \,.\, db \parallel ca :=: \Lambda,$$

da questa, mediante le sostituzioni $\begin{pmatrix} a\,a \\ c\,d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}$, si deduce, rispettivamente

$$(\gamma) \qquad ab \parallel aa \,.=.\, \Lambda, \quad ab \parallel ca \,.=.\, \Lambda;$$

ricorrendo alle (1), (2), per dare alla (3) la forma

$$ab \parallel dc \,.\, db \parallel ac :=: \Lambda,$$

da questa, mediante la sostituzione $\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}$, si deduce

$$(\delta) \qquad ab \parallel ac \,.=.\, \Lambda.$$

Colgo l'occasione per avvertire che, ivi, l'enunciato dell'ultima interpretazione è inesatto: ciò che si deve imputare esclusivamente a disattenzione mia. Esso va letto così: « S_1 è una retta, considerata come classe di punti, ed $cb \parallel cd$ significa che i segmenti finiti ab e cd non hanno alcun punto comune ». In tal caso, è chiaro che sono vere le (1-4); a persuadersi della falsità della (5) basta por mente al caso in cui e, b, a, c, d si seguano in quest'ordine.

Però, dalle (1-5) mi par non si possa dedurre alcuna delle

$$(\varepsilon) \qquad aa \parallel bb \,.=.\, \Lambda, \quad aa \parallel bc \,.=.\, \Lambda, \quad bc \parallel aa \,.=.\, \Lambda.$$

Comunque, mi sembrano degni di nota i fatti seguenti:

le proposizioni (α-ε) sono assolutamente indipendenti [5]);

ciascuna proposizione — non appartenente al sistema (α-ε) ed esprimente la condizione « non sussiste la relazione $ab \parallel cd$ se a, b, c, d non rappresentano elementi a due a due distinti » — è deducibile da una delle (α-ε), sostituendo, a lettere tra loro uguali o diverse, lettere tra loro, rispettivamente ed ordinatamente, eguali o diverse;

dal sistema delle (α-ε) ed (1-5) non si può dedurre la condizione « ad S_1 appartengono quattro elementi, almeno, a due a due distinti »;

le condizioni enunciate nei due precedenti capoversi si deducono simultaneamente dal sistema delle (α-ε) e della

$$(\zeta) \qquad ab \parallel cd \,.-=_{a,b,c,d}.\, \Lambda;$$

facendo seguire le (α-ζ) ed (1-5) [6]) in quest'ordine, si ottiene un sistema di proposizioni ordinatamente indipendenti [7]).

---

5) Invero — scelta ad arbitrio una delle (α-ε) e tenuto presente che, per esplicita convenzione fatta, nelle (α-ε), lettere diverse rappresentano elementi distinti — data ad $ab \parallel cd$ l'interpretazione « a, b, c, d rappresentano elementi tra loro distinti o no in modo conforme al primo membro della proposizione prescelta », è chiaro che, tranne la prescelta, ciascuna delle (α-ε) è vera.

6) D'or innanzi la (4) si intenderà scritta così:

$$(\alpha\text{-}\varepsilon) :-\supset: ab \parallel cd \,.=.\, \Lambda \,.\!\cdot\!.\, \supset \,.\!\cdot\!.\, ab \parallel cd \,.\cup.\, ac \parallel bd \,.\cup.\, ad \parallel bc\,.$$

7) Ciò appare manifesto, tenendo presente la dimostrata indipendenza assoluta delle (α-ε) [5]), ed osservando che — dando ad S_1 l'interpretazione « classe cui appartengono non più di tre elementi, a due a due distinti » e ad $ab \parallel cd$ l'interpretazione « a, b, c, d sono a due a due distinti » — son verificate le (α-ε) e non la (ζ), e che — dando in ciascun caso ad S_1 l'interpretazione « retta considerata come classe di punti » e ad $ab \parallel cd$, successivamente, le interpretazioni

« b e c sono distinti ed appartengono al segmento finito ad, estremi esclusi »,

« i segmenti finiti ab e cd sono equipollenti, distinti »,

« i segmenti finiti ab e cd sono uguali, distinti »,

« i segmenti finiti ab e cd sono distinti ed i loro punti medî coincidono »,

« i segmenti finiti ab e cd non hanno alcun punto comune » —

son verificate, in ciascun caso, le (α-ζ) ed, inoltre, sono rispettivamente: false le (1-5); vera la (1) e false le (2-5); vere le (1), (2) e false le (3-5); vere le (1-3) e false le (4), (5); vere le (1-4) e falsa la (5) [4]).

Constatati questi fatti — e considerato come sia opportuno, in questa trattazione, che il concetto di *quaterna di elementi a due a due distinti* sia definito mediante la notazione $ab \,||\, cd$, senza introdurre alcuna parola di commento od alcun simbolo estraneo — proporrei di considerare come fondamentali le proposizioni (α-ζ) ed (1-5) in quest'ordine.

***

A chi si proponga di enunciare le proposizioni ordinatamente indipendenti esprimenti, simultaneamente, tutte le proprietà

del simbolo S_1 — in quanto esso si mantenga suscettibile dell'interpretazione « S_1 è una linea continua, chiusa, priva di nodi, considerata come classe di punti » — e

della notazione $ab \,||\, cd$ — in quanto essa si mantenga suscettibile dell'interpretazione « $ab \,||\, cd$ significa che le coppie ab e cd si separano » —

appaiono degni di nota i fatti seguenti:

dal sistema delle (α-ζ) ed (1-5) non si può dedurre la condizione « ad S_1 appartengono cinque elementi, almeno, a due a due distinti »[8];

tale condizione si deduce dal sistema delle (α-ε), (3) e

(9) $$ab \,||\, cd \,.\, ac \,||\, be : - =_{a,b,c,d,e} : \Lambda$$ [9];

la proposizione

(10) $$ab \,||\, cd : - =_c : \Lambda$$

è vera dando ad S_1 e ad $ab \,||\, cd$ le interpretazioni considerate nel principio di questo paragrafo;

[8]) Invero — dando ad S_1 l'interpretazione « classe cui appartengono quattro, e sol quattro, elementi, a due a due distinti » e ad $ab||cd$ l'interpretazione « permutazione circolare, diretta od inversa, di $a\,c\,b\,d$ » — son tutte vere le (α-ζ), (1-5) (la (5), in tal caso, è vera perchè la sua ipotesi è sempre assurda).

[9]) Dalla (9) si deduce immediatamente $ab \,||\, cd . - = . \Lambda$ ed anche $ac \,||\, be . - = . \Lambda$; da queste, dalle ($\alpha$-$\varepsilon$) e da un'osservazione fatta nel paragrafo precedente, si deduce che a, b, c, d sono a due a due distinti e così pure a, c, b, e. Quindi — affinchè a, b, c, d, e non fossero a due a due distinti — dovrebbero coincidere d ed e; ma, allora, la (3) non sarebbe vera, contro il supposto. È superfluo avvertire che dalla (9) si deduce la (ζ).

la (10) non si può dedurre dal sistema delle (α-ζ), (1-5) e (9) [10];

dalle proposizioni considerate si deduce la condizione « ad S_1 appartengono infiniti elementi a due a due distinti » [11];

facendo seguire le (α-ζ), (1-5), (9) e (10) in quest'ordine, si ottiene un sistema di proposizioni ordinatamente indipendenti [12].

Constatati questi fatti, proporrei di considerare come fondamentali le proposizioni (α-ζ), (1-5), (9) e (10) in quest'ordine.

***

Avverto che l'argomento si presta ad ulteriori ricerche.

Invero — sempre considerando che S_1 rappresenti una classe di punti e che $ab \,||\, cd$ esprima il separarsi delle coppie ab e cd — è degno di nota il fatto che ciascuna proposizione dell'ultimo sistema considerato è vera, dando ad S_1 le successive interpretazioni:

« segmento rettilineo finito, estremi esclusi »,

« segmento rettilineo finito, un estremo incluso e l'altro escluso »,

« classe dei punti appartenenti alla retta ab ed aventi, rispetto ad a e b, coordinata baricentrica razionale ».

Da ciò segue che l'attuale sistema di proposizioni fondamentali è insufficiente a stabilire ciascuno dei fatti seguenti:

« S_1 è una linea chiusa »,

« S_1 è una linea illimitata nei due versi »,

« S_1 è un insieme di seconda potenza, nel senso di Cantor ».

Alessandro Padoa.

[10]) Ciò si verifica immediatamente dando ad S_1 l'interpretazione « segmento rettilineo finito, estremi inclusi » e ad $ab \,||\, cd$ l'interpretazione « le coppie ab e cd si separano ». In tal caso, le (α-ζ), (1-5) e (9) sono, evidentemente, tutte vere; non però la (10) (a persuadersene, si ponga mente al caso in cui a e b siano gli estremi del segmento rappresentato con S_1).

[11]) Dalla (10) — mediante le sostituzioni successive $\begin{pmatrix} c & e \\ b & c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} e & f \\ c & e \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} f & g \\ e & f \end{pmatrix}$,...., la cui legge di formazione è evidente — si ottiene

$$ac \,||\, ed \,.\, - =_e . \Lambda \quad ; \quad ae \,||\, fd \,.\, - =_f . \mathrm{N} \quad ; \quad af \,||\, gd \,.\, - =_g . \Lambda \,; \ \ldots$$

Per brevità, ommetto di dimostrare che ciascuno degli elementi $a, b, c, d, e, f, g,\ldots$ è distinto dai precedenti.

[12]) Ciò risulta dalle note [7]), [8]), [10]).

Der logische Algorithmus in seinem Wesen, in seiner Anwendung und in seiner philosophischen Bedeutung von Joseph Hontheim S. J. (Berlin 1895).

Questo libro che, come avverte l'Autore nella prefazione, era già in massima parte scritto una decina d'anni prima di essere pubblicato, e che aveva originariamente il solo scopo di dare ad alcuni amici, sotto la forma più succinta, un'idea precisa della natura e dei metodi del calcolo logico, presenta veramente i caratteri di un'opera lungo tempo meditata e per la quale è stato seguito il saggio precetto oraziano, tanto trascurato ai nostri giorni:

... *nonum prematur in annum.*

Esso contiene un'ordinata e lucidissima esposizione dei principî della logica matematica, nella quale l'autore segue in sostanza il metodo del Boole, introducendovi però notevoli miglioramenti e semplificazioni, specialmente per ciò che riguarda i processi di trasformazione e risoluzione delle equazioni. Così i teoremi che si riferiscono all'eliminazione vi figurano dedotti in modo assai semplice ed elegante dalla proprietà espressa dalla seguente formola:

$$ab + \bar{a} c = ab + \bar{a} c + bc$$

che l'A. dimostra direttamente così:

$$ab + \bar{a} c = (ab + abc) + (\bar{a} c + \bar{a} c b) = a b + \bar{a} c + (abc + \bar{a} bc) = ab + \bar{a} c + bc .$$

Egli designa poi col termine di espressioni *sviluppate* (*entwickelte, evolvirte*) quelle che si ottengono, da espressioni date qualunque, eseguendo in esse tutte le operazioni indicate dalle parentesi ed aggiungendo poi tutti i termini, che, in virtù della formola scritta sopra, si possono aggiungere a ciascuna coppia dei loro termini (compresi quelli così successivamente aggiunti) senza alterarne il valore; e trova, come risultato generale dell'eliminazione d'una lettera x da un'espressione *sviluppata,* alla quale si sia data la forma

$$ax + bx + \ldots + p \bar{x} + q \bar{x} + \ldots + u + v + \ldots = 0 ,$$

l'equazione:

$$(a + b + \ldots)(p + q + \ldots) + u + v + \ldots = 0 .$$

In seguito mostra come tutte le conseguenze che si possono dedurre, da una data equazione, riguardo alle relazioni che sussistono, fra una delle classi che in essa figurano, p. es. x, e le altre, si possono riassumere (quando essa sia stata *sviluppata* e messa sotto la forma che abbiamo scritto dianzi) nelle seguenti due equazioni:

$$x = x \bar{a} \bar{b} \ldots \qquad (1)$$

$$x = x + p + q \ldots \qquad (2)$$

delle quali la prima è atta a indicare quali conseguenze è lecito trarre dal fatto che un dato ente è un x (was aus x folgt); l'altra invece dà le norme per riconoscere se esistano o no degli x e se un ente dato è un x o no (aus welchen Merkmalen x folgt).

Come si vede dalla forma stessa delle (1), (2), l'autore, seguendo in ciò troppo strettamente le orme del suo maestro, non crede conveniente prendere direttamente in considerazione la relazione di *inclusione*; la proposizione: *Ogni a è un b*, è da lui espressa ordinariamente colla notazione di Jevons: $a = ab$, talvolta anche con $a \bar{b} = 0$ o colle forme che corrispondono dualmente a queste, ma non mai con una notazione diretta del tipo $a \supset b$.

Da questo lato la sua esposizione si riconnette a uno stadio di sviluppo della logica simbolica ora già oltrepassato (dal Peirce, dal Peano, dallo Schröder, ecc.). È giusto però far notare che la trattazione è condotta in modo da risentire il minimo danno possibile dalla limitazione testè indicata, tanto per ciò che riguarda la generalità delle proposizioni quanto per ciò che riguarda la loro simmetria e l'uso del principio di dualità, e che il contenuto del libro, con solo poche modificazioni, più di forma che di sostanza, è suscettibile di venire utilizzato e incorporato in qualsiasi esposizione, anche più moderna e completa della logica matematica.

Inoltre la lacuna che ho rilevato non è tale da impedire che il libro, anche sotto la sua forma attuale, possa essere assai utile a quelli che senza essere provvisti di alcuna preparazione matematica o filosofica volessero con breve sforzo impadronirsi del metodo e penetrarsi dello spirito della logica algebrica: esso mi sembra anzi, per la perspicuità, per l'ottimo metodo di esposizione e per la copia di opportuni esempi ed esercizi, il vero modello di un testo per l'insegnamento della logica nelle scuole secondarie (non meno per esempio dei manuali del Venn nei quali si riscontra lo stesso difetto).

Assai interessanti e improntate a una notevole larghezza di idee sono le considerazioni d'indole generale sull'importanza pratica della logica matematica, che si trovano esposte nell'introduzione e nel capitolo finale. L'A. vede, e a ragione, nel simbolismo della logica deduttiva sopratutto uno strumento atto ad organizzare, ed utilizzare al massimo grado, delle cognizioni già acquistate; ma ciò non gli impedisce di ammettere anche la sua efficacia, diretta o indiretta, come mezzo d'investigazione.

Si potrebbe osservare a questo riguardo che le obbiezioni che si sentono spesso rivolgere contro la logica matematica, basate sulla sua incapacità a condurre a delle conclusioni che « *contengano* » qualche cosa di più di quello che si trova già « *implicitamente* » ammesso nelle proposizioni da cui si parte, si riferiscono a un carattere che essa ha in comune con qualsiasi altro ramo della matematica la quale, da questo punto di vista, è stata, dal Faraday, spiritosamente paragonata ad un macinino da caffè che non può dare come risultato della sua azione nè maggiore nè miglior caffè di quello che corrisponde ai grani adoperati (i quali nel nostro caso sono rappresentati dagli assiomi o proposizioni primitive). Nessuna buona massaia consiglierebbe tuttavia, in vista di ciò, di far bollire direttamente nell'acqua il caffè in grani.

Sebbene non sia il solo, non va tuttavia annoverato tra i meno importanti uffici della logica simbolica e in generale della deduzione quello di connettere tra loro le proposizioni d'una data scienza sollevandole tutte a quel grado di certezza che compete a quelle tra esse per le quali l'evidenza diretta è maggiore (εἰς τὴν ὁμοίαν πίστιν ἀνάγειν per usare la frase di Archimede (*)).

Essa rende così un servizio analogo a quello della corda colla quale gli alpinisti si legano gli uni agli altri nei passi pericolosi o, se par meglio, analogo a quello degli anelli che tèngono infilate le chiavi onde nessuna di esse si perda... senza che si perdano insieme anche tutte le altre.

Le scienze a tipo deduttivo sono le sole nelle quali l'evidenza di una proposizione o le prove di fatto sulle quali essa si basa siano sistematicamente utilizzate per accrescere l'evidenza o l'attendibilità di altre proposizioni meno credibili o meno verificabili. Nella matematica, come osserva assai giustamente il Korteweg, la certezza della proposizione più complessa e più laboriosamente ottenuta non è per nulla inferiore a quella delle proposizioni sulle quali la sua dimostra-

(*) Nella lettera d'introduzione al suo scritto sulla quadratura della parabola.

zione è basata (*), quando si faccia astrazione dagli eventuali errori di calcolo la cui probabilità può essere resa inferiore a qualunque limite praticamente assegnabile. La logica matematica è appunto un mezzo per diminuire tale probabilità, mezzo tanto più utile e richiesto quanto più sottili e complesse sono le questioni alla cui trattazione si applichi.

Nell'introduzione al suo libro, l'A. dedica anche un cenno ai tentativi di Leibniz (**), diretti a costituire una lingua simbolica (ideografica) universale, ed osserva assai a proposito come sia in parte un'illusione il credere che la maggior perfezione e i caratteri di rigore e quasi di infallibilità che presentano le scienze matematiche di fronte alle altre e in special modo di fronte alle scienze psicologiche e sociali dipenda dalla mancanza in queste ultime d'un linguaggio tecnico preciso.

L'uso che in esse si fa di termini di significato vago e imperfettamente definito va, secondo lui, considerato piuttosto come uno degli effetti che come una delle cause del loro ritardo di sviluppo.

Non voglio tralasciare un'osservazione d'indole critica a proposito d'una frase in cui l'A. contrappone la logica aristotelica alla logica matematica, qualificando la prima come una logica *naturale* (die Logik des gesunden Menschenverstand) e attribuendo invece alla seconda un carattere speciale di *artificialità*.

Ora ciò non mi pare affatto conforme alla realtà. Se prendiamo come criterio della *naturalezza* d'un processo d'analisi del ragionamento deduttivo o d'un sistema di simboli logici, l'attitudine che essi hanno a rappresentare, quando occorra, i ragionamenti sotto una forma che si discosti il meno possibile (compatibilmente col rigore e la precisione) da quella che essi assumono *naturalmente*, nel linguaggio ordinario, a me sembra che l'uso dei simboli della logica matematica, oltre agli altri vantaggi che presenta sull'impiego del rigido meccanismo sillogistico di Aristotele, abbia anche quello di una maggiore flessibilità e adattabilità alle forme abituali di raziocinio.

Si *deforma* assai più un dato corso di ragionamento decomponendolo in una serie di sillogismi secondo il metodo degli scolastici, che non traducendolo nei simboli della logica matematica, la quale (specialmente se si adottano i metodi più recenti nei quali si designa

(*) Korteweg. De Wiskunde als Hulpwetenschap (Amsterdam 1881) (pag. 9: En juist dit is het groote voordeel verbonden aan de wiskundige behandeling, dat de uitkomst juist denzelfden graad von zekerheid besit als de gegevens waarop ze berust).

(**) Tra i predecessori di Leibniz, a questo riguardo, l'A. cita Raimondo Lullo, Atanasio Kircher, Becher, Dalgarn, Wilkins.

direttamente la relazione di *inclusione*) permette di riprodurre tutte le particolarità veramente essenziali del linguaggio ordinario, correggendone solo le ambiguità e le esuberanze.

La Sillogistica aristotelica, in quanto è un tentativo diretto a meccanicizzare e rendere automatici i processi del ragionamento deduttivo, mi sembra una vera e propria logica matematica nel senso moderno della parola, differente dall'attuale solo in ciò che essa è meno perfetta e meno completa.

Un'ultima osservazione farò a proposito d'una frase nella quale l'A., commentando l'assioma $a = a$, lo qualifica come una *gran verità* (die grosse Wahrheit $a = a$). Ora, senza richiamare le classiche considerazioni di Locke (An Essay concerning human Understanding B. I Ch. II) su questa specie di *grandi verità*, mi sarà lecito osservare che se si ammette la distinzione, riconosciuta sotto una forma o un'altra da tutti i logici, tra le proposizioni che esprimono *verità di fatto* (e che sono quindi suscettibili di essere vere o false, secondochè quanto in esse si asserisce è conforme o no alla realtà delle cose) e quelle invece che sono unicamente destinate a darci dei precetti e delle norme sull'uso del linguaggio e, in generale, dei simboli di cui ci dobbiamo poi servire per enunciare le verità (o le falsità) propriamente dette, la proposizione $a = a$ va posta nella seconda categoria, alla quale appartengono, oltre alle definizioni ordinarie, anche tutte le altre proposizioni in cui sono semplicemente formulate delle *convenzioni* che non sono suscettibili di esser vere o false ma solo di essere opportune o non opportune, convenienti o non convenienti.

L'asserire che una proposizione di questa specie, per quanto importante, sia una *gran verità*, nello stesso senso in cui si dice, per esempio, che è una gran verità la *legge sulla gravitazione universale* o la *legge d'inerzia*, mi sembra sia un voler classificare insieme delle cose radicalmente diverse.

La frase è tanto poco corretta come se si chiamasse, ad esempio, una gran verità un precetto di morale. Anche nella logica come nell'etica vi sono, per adoperare la fraseologia Kantiana, degli *imperativi categorici*; essi corrispondono a delle *esigenze* della mente umana (come gli *imperativi categorici* dell'etica corrispondono a dei doveri e a delle obbligazioni morali), ma le proposizioni nelle quali tali esigenze sono espresse non vanno assolutamente confuse o scambiate con quelle nelle quali si afferma qualche cosa su *ciò che è*, non su ciò che *dovrebbe essere* o su *ciò che vogliamo o conveniamo che sia*. Così, per esempio, le considerazioni che Aristotile svolge, nella sua Metafisica, sull'importanza di quell'assioma al quale gli scolastici hanno dato il nome di « *principium contradictionis* » (cioè del principio che una proposizione non può essere contemporaneamente vera e falsa) non sono in fondo che considerazioni sull'importanza e sulla necessità dell'*abitudine di non contraddirsi* e sugli inconvenienti che nascono dal far uso di segni o di parole che non abbiano un significato unico e determinato. La « *coerenza* » non è il nome d'una qualità che noi riscontriamo nelle cose ma il nome d'una qualità che *deve* possedere il nostro modo di descriverle e di rappresentarle, tanto se ci proponiamo lo scopo di allargare il campo delle nostre cognizioni, quanto, e più ancora, se abbiamo in vista la loro conservazione e trasmissione.

Crema, 28 luglio 1897.

G. Vailati.

Sulle formule di Logica (F_2 §1)

La raccolta delle formule di Logica, a più riprese pubblicate dalla Rivista, e che costituiva la parte I di F_1, fu di nuovo pubblicata, come §1 del F_2, con modificazioni ed aggiunte.

Qui esporrò la corrispondenza fra F_1I e F_2§1, dando ragione delle modificazioni fatte. E ciò parmi necessario, poichè il Formulario è il risultato della collaborazione di molti colleghi; quindi bisogna provare che in ogni nuova compilazione nulla si è tralasciato di quanto c'era nella compilazione precedente, salvo ciò che si deve tralasciare.

In F_1I §1-3 si è detto (pag. 127), col linguaggio ordinario, che le lettere a, b, ... indicano, in queste formule, delle proposizioni. Volendosi scrivere in simboli anche il significato delle lettere, affinchè le formule abbiano un'espressione simbolica completa, si è partiti, invece che dal concetto di proposizione, da quello di classe, come già si era fatto in F_1I §4. In conseguenza fu necessario cambiare la forma di parecchie proposizioni.

Ecco la corrispondenza fra le prime proposizioni di F_1§1 e quelle di F_2:

F_1I§1 P1	= F_2§1 P21	F_1I§1P13	= F_2§1P26	F_1I§1P30	= F_2§1P34
» 2	» 31	» 14′	» 44	» 31	» 50
» 3	» 16	» 15	» 24	» 32	» 51
» 4	» 41	» 20	» 45	» 33	» 52
» 5	» 23	» 21	» 46	» 34	» 27
» 6	» 42	» 22	» 47	» 36	» 53
» 7	» 30	» 23	» 48	» 44	» 55
» 8	» 43	» 24	» 36	» 48	» 29
» 10	» 44	» 25	» 49	» 49	» 37
» 11	» 33	» 29	» 28		

(Le ultime due sono contenute nelle Additions a F_1).

In F_1 si era scritta la P9, che figurava come Pp. Ora noi abbiamo cambiato il sistema delle Pp, e quindi soppressa questa proposizione e la 14 contenuta nella 44 di F_2.

Abbiamo pure soppresse le P16-19, contenute nelle altre P.

La P12 di F_1

$$a \,.\, a \supset b \,.\, \supset .\, b$$

« se la proposizione a è vera, e se da a si deduce b, allora la b è vera », si trasforma nella P25 di F_2 « se x appartiene alla classe a, e se ogni a è b, allora x è un b », che è una forma nota di sillogismo.

Non si è potuto trasformare la P26 di F_1, sostituendo le K alle P; in sua vece sta la P72 di F_2. Stessa osservazione per la P27.

L'antica P28 è conseguenza immediata della nuova P33.

La F_1P35 è contenuta nella F_2P53.

Le P37, 38, 39 di F_1 si trasformano nelle 72, 73, 74 di F_2.

Le P40-43, 45 e le 26′, 44′, 46, 47 nelle aggiunte di F_1 perdono ogni importanza nella trasformazione.

In questa nuova pubblicazione si è invece fatta l'analisi delle idee primitive (P1-7) e delle derivate (P11-18). (V. i miei *Studii di Logica matematica*, Atti Acc. Torino, 1897). Si sono aggiunte le P22, 32, 38, 56. Si è cambiato il sistema delle Pp riducendo il loro numero di due unità; e si sono aggiunte le P61-63, le 70-74 sulla coppia di enti, e le 80-85 sull'eguaglianza.

Molte dimostrazioni si dovettero cambiare.

Essendosi ordinate le formule a seconda dei simboli che vi compaiono, le proposizioni di F_1§2 risultano classificate in tre categorie, secondo che esse contengono solo il segno $-$, o il segno $\cup$, o amendue. Eccone la corrispondenza:

F_1I§2P1	= F_2§1P111	F_1I§2P15	= F_2§1P219	F_1I§2P29	= F_2§1P225
» 3	» 106	» 16	» 212	» 30	» 226
» 4	» 112	» 17	» 213	» 31	» 227
» 5	» 113	» 18	» 220	» 32	» 270
» 6	» 201	» 19	» 221	» 33	» 271
» 7	» 252	» 20	» 214	» 34	» 272
» 8	» 251	» 21	» 215	» 35	» 274
» 9	» 205	» 22	» 216	e nelle aggiunte	
» 9′	» 207	» 23	» 222	» 25′	» 254
» 10	» 204	» 24	» 109	» 28′	» 230
» 11	» 208	» 25	» 253	» 36	» 229
» 12	» 210	» 26	» 255	» 37	» 228
» 13	» 209	» 27	» 223	» 38	» 114
» 14	» 211	» 28	» 224	» 39	» 116

Si è soppressa l'antica P2 caso particolare della nuova P113.

Si sono aggiunte le P100-105, 117-122, 202, 202′, 203, 217, 218, 231-243, 256-260, 273.

Abbiamo sostituita la P112, data prima come Pp, colla P107 (o la P108); poichè dalla P108 noi possiamo dedurre la P112, ma non possiamo più fare il passaggio inverso, avendo soppresso F_1I§1P26.

Le prop. di F_1I§3 hanno pure ricevute delle trasformazioni. Abbiamo anzitutto soppresse tutte le proposizioni contenenti il segno V; poichè questo segno non è necessario, e conviene di ridurre il numero dei segni, per non aumentare indefinitamente il numero delle proposizioni, le quali non sono che forme differenti delle medesime verità. Così si sono soppresse le F_1I§3P1′ 1″ 2′ 3′ 4′ 7′. È fatta eccezione per le P361-3.

Per la stessa ragione si sono soppresse le proposizioni contenenti il segno di disgiunzione completa; cioè le P24-29. La P30, trasformata in modo da non contenere questo segno, diventa F_2§1P277.

Si è pure soppressa l'antica P23, perchè quasi identica alla precedente.

Ecco la corrispondenza delle altre proposizioni:

F_1I§3P1	= F_2§1P321	F_1I§3P9	= F_2§1P342	F_1I§3P18	= F_2§1P358
» 2	» 439	» 10	» 353	» 19	» 307
» 3	» 437	» 11	» 343	» 20	» 328
» 4	» 440	» 12	» 329	» 21	» 346
» 5	» 275	» 13	» 303	» 22	» 347
» 6	» 276	» 14	» 326	» 30	» 277
» 7	» 438	» 15	» 355	» 31	» 306
» 8	» 324	» 16	» 356	» 9′ (addit.)	351
» 8″	» 325	» 17	» 357		

Si sono separate le proposizioni contenenti il gruppo di segni $=\Lambda$ (P300-358) da quelle contenenti il segno Λ non preceduto dall'$=$ (P434-440).

Si sono aggiunte le P300-302, 304, 305, 308-310, 327, 331-333, 341, 344, 345, 352, 361-363, 400-414.

Le proposizioni di F_1I§4 hanno per corrispondenti le seguenti:

F_1I§4P1	= F_2§1P12	F_1I§4P6	= F_2§1P300′
» 2	» 16	» 7	» 81
» 3	» 14	» 8	» 82
» 4	» 202	» 9	» 83
» 5	» 103	» 10	» 84

e nelle « additions »

F_1I§4P11	= F_2§1P25	F_1I§4P14	= F_2§1P422
» 12	» 401	» 15	» 424
» 13	» 421	» 16	» 425
» 13′	» 420		

Si sono aggiunte le P423, 430-436, 450-472.

Fra le P di F_1I§5, sulle funzioni, abbiamo tralasciate quelle contenenti l'idea di numero (N); esse troveranno il loro posto nell'Aritmetica. Tali sono le P15-20, 27, 30-33, 37.

Abbiamo soppresse le definizioni P3, 21, per le ragioni spiegate nelle Note a F_2§1P530; e in conseguenza le P5, 6, 9, 10, 21-29, 36, 38 ove figurano queste notazioni.

Parimenti si è soppressa la P11, che definisce l'eguaglianza di due funzioni; poichè il secondo membro contiene la lettera reale a, che deve pure comparire nel primo. Perciò questo primo membro dovrebbe, p. e., essere scritto $f =_a g$, e letto: « la funzione f è, nella classe a, eguale alla g »; ma la scrittura diventa incomoda, e inutile.

Si è pure soppressa la P35, perchè conseguenza immediata dell'attuale P530.

Ecco la corrispondenza delle altre P.

F_1I§5P1	= F_2§1P501	F_1I§5P12	= F_2§1P502
» 2	» 503	» 13	» 509
» 4	» 505	» 14	» 510
» 7	» 506	» 34	» 520
» 8	» 507	» 39	» 531

Si sono aggiunte le P504, 508, 510, 521-530.

La data 11-VIII-1897, che sta sul frontispizio, è quella della pubblicazione di questo §1, avvenuta a Zurigo, durante il 1° congresso matematico internazionale.

Ecco alcune correzioni a farsi su F_2§1, indicatemi dal prof. A. Padoa:

A proposito della P230 si osservi che non può sussistere un'eguaglianza fra due membri non contenenti le stesse lettere variabili; quindi mentre è esatta la proposizione:

$$a, b, c \,\varepsilon\, \mathrm{K} \,.\, ac \supset b \,.\, a \supset b \cup c \,.\supset.\, a \supset b$$

ovvero:

$$» \quad » \quad » \quad .\supset.\, a, b \,\varepsilon\, \mathrm{K} \,.\, a \supset b \,.$$

non lo sarebbe quella che si ottiene leggendo al posto di $.\supset.$ il segno $.=.$

Però è esatta la proposizione:

$$» \quad » \quad » \quad .=.\, a, b\, c \,\varepsilon\, \mathrm{K} \,.\, a \supset b \,.$$

Negli scritti del PEIRCE, non essendo indicato in simboli il significato delle lettere, non si può affermare quale fra queste proposizioni l'A. intendesse di scrivere. Ad ogni modo, siccome la P del PEIRCE è suscettibile di interpretazione esatta, si sostituisca nella P230 al segno $.\supset.$ il segno $.=.$, e si sopprimano nelle note relative le parole seguenti: « proposition ».

Analogamente nelle P223, 224 invece di $.\supset.$ si può leggere $.=.$

P346. Invece di $x \cup y = a \cup b$ si può leggere $a \cup b \supset x \cup y$. L'ipotesi risulta meno restrittiva.

P347. Analogamente invece di $x \cup y \cup z = a \cup b \cup c$ si legga $a \cup b \cup c \supset x \cup y \cup z$.

P361. Invece di $a = \mathrm{v}\,.=.$ leggasi $a = \mathrm{v}\,.=:$

Pag. 46, note a P361, linea 3ª. Invece di $a = \Lambda$ si legga $a = \mathrm{v}$.

Il §1 di F_2 contiene in 15 pagine circa 260 proposizioni, trovate da varii Autori, con scopi diversi. Queste P hanno importanza fra loro assai differente. Chi desidera apprendere i simboli di logica onde leggere i lavori in cui se ne fa uso, basta che conosca le notazioni e definizioni P1-18, 100-102, ecc.; e più precisamente basta conoscere le definizioni di quei soli segni che si incontrano in quel determinato lavoro.

Chi desidera usarli, è bene conosca le proprietà fondamentali delle operazioni logiche indicate da questi segni; queste proprietà sono enunciate dalle proposizioni importanti, indicate col segno *. Queste P bastano per dare un'idea chiara dello scopo della Logica matematica.

Le altre P sono alcuna volta passaggi intermediarii fra le P importanti; ovvero nuovi modi di trattare certe teorie; ovvero proposizioni incontrate in varie ricerche dagli A. citati, ma che non si usano negli ordinari ragionamenti.

Una notevole riduzione nel numero delle P si potrebbe ottenere col sopprimere alcuni segni. A rigore si potrebbero sopprimere tutti i segni definiti colle P indicate col segno Df. E, a causa delle P indicate con [Df], aventi la forma di definizioni, si potrebbero sopprimere alcuni segni non definiti, sostituendoli con segni definiti. Così, ad esempio, i quattro segni $\supset, =, \Lambda, \exists$, sono riduttibili l'uno all'altro; sicchè ogni forma di ragionamento è scritta nel F quattro volte sotto forma diversa. Pure la pratica prova la convenienza di conservare, almeno per ora, tutti quei segni, ciascuno dei quali ha i proprii vantaggi; e la ripetizione delle proposizioni, a causa della loro compattezza, non porta ingombro.

In conclusione, poche P bastano a dare un'idea dell'uso della Logica matematica; invece si dovrà consultare il Formulario, ove si intraprendano nuovi studii su questa scienza.

G. PEANO.

Lettera del sig. G. Frege all'Editore.

Jena, den 29 Sept. 1896.

Sehr geehrter Herr Kollege!

Sie haben die Güte gehabt, meine Grundgesetze der Arithmetik im 5. Bande der Rivista di Matematica ausführlich und wohlwollend zu beurtheilen. Den Dank dafür glaube ich Ihnen am besten dadurch erweisen zu können, dass ich Ihnen freimüthig meine abweichenden Ansichten darlege. Ein solcher Gedankenaustausch wird, wie ich hoffe, die Wissenschaft fördern, besonders wenn er sich öffentlich vollzieht; und ich möchte Sie deshalb bitten meine folgenden Ausführungen in der Rivista di Matematica erscheinen zu lassen.

Sie sagen auf S. 123:

« È noto che, nel Formulario di Matematica, tutte le relazioni ed operazioni fra proposizioni e fra classi si riducono a tre fondamentali, indicate coi segni

$$\frown\,, \supset, -\,.$$

Oltre a questi si usano, per comodità, i segni $=$, $\cup$, Λ, che sono definiti mediante i precedenti ».

und auf S. 125:

« I due sistemi di notazioni si possono confrontare sotto l'aspetto scientifico e sotto quello pratico. Sotto l'aspetto scientifico, il sistema del Frege è basato sui cinque segni fondamentali

$$|\,,\ —\,,\ \top\,,\ \sqsubset\,,\ \smile$$

mentre il nostro sui tre segni

$$-\,, \frown\,, \supset\,.$$

Quindi il sistema del Formulario corrisponde ad un'analisi più profonda. »

Das Letzte möchte ich nicht zugeben. Ich bezweifele zunächst, dass Sie wirklich Alles, wass an rein logischen Gebilden gebraucht wird, mit jenen drei Zeichen bezeichnen können. Schon bei der Gleichheit habe ich Bedenken. Für das Zeichen = finden wir eine Definition im Formulario I, § 1, 3 in der Form

$$a = b \,.=.\, a \supset b \,.\, b \supset a \,.$$

Aber hierbei ist offenbar die Bedeutung des zu Definirenden schon vorausgesetzt. Denn im Vorworte S. IV heisst es: « Toute définition est exprimée par une égalité; dans le premier membre on a le signe qu'on définit ». Diese linke Seite der Definitionsgleichung ist hier « $a = b$ », die rechte ist « $a \supset b \,.\, b \supset a$ » und zwischen beiden steht das Gleichheitszeichen, dessen Bedeutung man also schon kennen muss, um die Definition zu verstehen. Schon deshalb kann von einer Zurückführung der Gleichheit auf die Bedeutungen jener drei Urzeichen nicht die Rede sein. Aber auch sonst ist jene Definition nicht einwandfrei. Sie ist nicht die einzige, durch die das Gleichheitszeichen definirt wird: im Form. I, § 4, 2 folgt eine zweite, im § 5, 2 eine dritte, endlich im § 5, 11 eine vierte. Hier offenbart sich ein grundsätzlicher Widerstreit unserer Ansichten. Ich verwerfe die Vielfachheit der Definitionen für dasselbe Zeichen aus folgendem Grunde. Nehmen wir an, es lägen zwei Definitionen vor, die beide demselben Zeichen eine Bedeutung beilegen. Dann sind nur zwei Fälle denkbar: entweder geben beide dem Zeichen dieselbe Bedeutung, oder nicht. Im ersten haben wir wieder zwei Möglichkeiten: entweder beide Definitionen verleihen dem Zeichen denselben Sinn, besagen ganz dasselbe, oder nicht. Im ersten Falle ist eine von beiden überflüssig, im andern wäre zu beweisen, dass sie dem Zeichen dieselbe Bedeutung zutheilen, obwohl sie ihm verschiedenen Sinn geben. Man müsste etwa eine von beiden als Definition stehen lassen, die andere in einen Lehrsatz verwandeln und beweisen. Um diesen Beweis betrügt man den Leser, indem man als Definition hinstellt, was ein Lehrsatz sein sollte. Wenn endlich die Definitionen demselben Zeichen verschiedene Bedeutung geben, nicht nur verschiedenen Sinn, so widersprechen sie einander, und eine von beiden muss weichen. Nun muss es auffallen, dass unser Fall keine dieser Möglichkeiten zu verwirklichen scheint; denn Ihre Definitionen des Gleichheitszeichens besagen weder alle dasselbe, noch kann die eine aus der andern bewiesen werden, noch widersprechen sie einander. Dies erklärt sich daraus, dass eine Voraussetzung nicht erfüllt ist, die wir eben gemacht haben. Die Annahme trifft nämlich nicht zu, dass jede dieser Definitionen dem Gleichheitszeichen eine Bedeutung gebe. Jede von ihnen ist nämlich unvollständig, und nur

eine vollständige Definition kann einem Zeichen eine Bedeutung zuweisen. Ihre erste Definition I, § 1, 3 bezieht sich offenbar auf den Fall, wo das Gleichheitszeichen Sätze verbindet, wiewohl das nicht ausdrücklich gesagt ist; die zweite (I, § 4, 2) hat den Fall im Auge, wo es zwischen Klassenzeichen steht; die dritte (I, § 5, 2) den, wo es Einzeldinge gleich setzt, die vierte (I, § 5, 11) den, wo es Functionszeichen verbindet. Welcher Fall gemeint sei, ist in der Regel durch einen Bedingungssatz angegeben. Bedingte Definitionen nun, die Sie oft geben, verwerfe ich, weil sie unvollständig sind, weil sie nur für gewisse Fälle, nicht für alle sagen, dass der neue Ausdruck dasselbe bedeuten solle wie der erklärende. Und so verfehlen sie ihren Zweck, einem Zeichen eine Bedeutung zu geben. Warum dies? Betrachten wir die Fälle, wo es sich um einen Begriff handelt, und wo es sich um eine Beziehung handelt wie bei der Gleichheit. Eine bedingte Definition eines Begriffszeichens entscheidet nur für einige Fälle, nicht für alle, ob ein Gegenstand unter diesen Begriff falle, oder nicht; sie begrenzt den Begriff also nicht vollständig und scharf. Nun kann die Logik aber nur scharf begrenzt Begriffe anerkennen. Nur unter dieser Voraussetzung kann sie genaue Gesetze aufstellen. Das logische Gesetz, dass es ausser

$$a \text{ ist } b$$

und

$$a \text{ ist nicht } b$$

keinen dritten Fall giebt, ist eigentlich nur ein anderer Ausdruck unserer Forderung, dass ein Begriff (b) scharf begrenzt sei. Der unter dem Namen « Acervus » bekannte Trugschluss beruht darauf, dass Worte wie « Haufe » so behandelt werden, als bezeichneten sie einen scharf begrenzten Begriff, während dies doch nicht der Fall ist. Wie es der Geometrie unmöglich wäre, genaue Gesetze aufzustellen, wenn sie Zwirnsfäden als Linien und Knoten in Zwirnsfäden als Punkte anerkennen wollte, so muss die Logik scharfe Begrenzung von dem verlangen, was sie als Begriff anerkennen kann, wenn sie nicht auf Genauigkeit und Sicherheit verzichten will. Ein Begriffszeichen also, dessen Inhalt dieser Forderung nicht genügt, ist vom logischen Standpunkte aus als bedeutnngslos anzusehen. Man kann einwenden, dass solche Wörter in der Sprache des Lebens tausendfach gebraucht werden. Ja! aber unsere Volkssprachen sind auch nicht dazu geschaffen, Beweise zu führen. Und ihre hieraus entspringenden Mängel sind grade der Hauptgrund für mich gewesen, eine Begriffschrift aufzustellen. Die Aufgabe unserer Volkssprachen ist wesentlich erfüllt, wenn die mit einander verkehrenden Menschen mit demselben Satze denselben

Gedanken verbinden, oder doch annähernd denselben. Es ist dazu nicht durchaus nöthig, dass die einzelnen Worter für sich einen Sinn und eine Bedeutung haben, wenn nur der ganze Satz einen Sinn hat. Anders liegt die Sache, wenn Schlüsse gezogen werden sollen; denn dabei ist wesentlich, dass in zwei Sätzen derselbe Ausdruck vorkomme, und dass dieser in beiden genau dieselbe Bedeutung habe. Er muss also für sich eine Bedeutung haben, die unabhängig ist von den andern Theilen des Satzes. Bei den unvollständig definirten Begriffswörtern besteht diese Unabhängigkeit nicht, sondern es kommt darauf an, ob der Fall vorliegt, auf den sich die Definition bezieht, und das hängt dann von den übrigen Theilen des Satzes ab. Man kann einem solchen Worte also überhaupt keine selbständige Bedeutung zuerkennen. Darum verwerfe ich bedingte Definitionen von Begriffszeichen.

Ganz ähnlich liegt die Sache bei den Beziehungen. Eine bedingte Definition eines Beziehungszeichens, wie etwa des Gleichheitszeichens, entscheidet nur in einigen, nicht in allen Fällen, ob die Beziehung stattfinde. So entscheidet z. B. Ihre Definition I, § 4, 2, ob a gleich b sei, nur für den Fall, dass a und b Klassen sind; sie giebt also dem Gleichheitszeichen nicht unabhängig von a und b eine Bedeutung; d. h. sie giebt ihm überhaupt keine eigne Bedeutung. Ausser den beiden Fällen

$$a \text{ ist gleich } b$$

und

$$a \text{ ist nicht gleich } b$$

bleibt hier noch als dritter Fall die Unentschiedenheit übrig, während doch die Logik keinen dritten Fall duldet.

Uebrigens habe ich noch sonst Bedenken gegen einzelne dieser Definitionen. So ist mir z. B.

$$« a\,,b\,\varepsilon\,\mathrm{K}\,.\,\mathsf{O}:f\,\varepsilon\,b|a\,.\,x\,,y\,\varepsilon\,a\,.\,x=y\,.\,\mathsf{O}\,.\,fx=fy\, »$$

(Form. I, § 5, 2) als Definition nicht verständlich. Wo ist das Gleichheitszeichen, auf dessen linker Seite das zu definirende Zeichen steht? Ferner kommt hier der Functionsbuchstabe « f » in der Verbindung « $f\,\varepsilon\,b|a$ » ohne Argumentstelle vor. Auch in I, § 5, 11 haben wir diesen Fall bei den Functionsbuchstaben « f » und « g ». Hierbei ist das Wesen der Functionen verkannt, das in ihrer Ergänzungsbedürftigkeit besteht. Diese hat nämlich zur Folge, dass jedes Functionszeichen immer eine oder mehre Stellen mit sich führen muss, die das Argumentzeichen aufzunehmen haben; und diese Argumentstellen — nicht das Argumentzeichen selbst — sind ein notwendiger Bestandtheil des Functionszeichens. Weiter finde ich einen Fehler darin, dass der Buchstabe « a » in

$$« a\,\varepsilon\,\mathrm{K}\,.\,\mathsf{O}:f\,,g\,\varepsilon\,b|a\,\mathsf{O}\,.\because.\,f=g\,=:x\,\varepsilon\,a\,.\,\mathsf{O}_x\,.\,fx=gx\, »$$

(I, § 5, 11) auf der rechten Seite der Definitionsgleichung steht, nicht aber auf der linken. Offenbar konnte « $f=g$ » » nur dann dasselbe bedeuten wie « $x\,\varepsilon\,a\,.\,\mathsf{O}_x\,.\,fx=gx$ », wenn die Bedeutung dieses letztern Ausdruckes von « a » unabhängig wäre.

Aber auch abgesehn hiervon werden Sie zugeben müssen, dass jede Ihrer Definitionen des Gleichheitszeichens einzeln unvollständig ist; aber Sie werden vielleicht für ihre Gesammtheit Vollständigkeit behaupten wollen. Dann müsste diese Gesammtheit sich auch äusserlich als solche darstellen. Bei der Anordnung im Formulario weiss man nach keiner dieser Definitionen, ob es die letzte sei, oder ob noch andere zur Ergänzung folgen werden. Nehmen wir an, dieser Fehler sei verbessert, die verschiedenen Definitionen des Gleichheitszeichens seien zu einem geschlossenen Ganzen vereinigt; dann wäre zu fragen, ob nun dieses Ganze eine vollständige Definition darstellte, ob die in Betracht gezogenen Fälle die gesammte Möglichkeit erschöpften, dann aber auch, ob nicht für einige Fälle Doppelbestimmungen vorlägen. Wir erkennen nun leicht, dass auch diese Gesammtheit nicht vollständig ist; denn über die Fälle, wo auf der einen Seite des Gleichheitszeichen das Zeichen eines Gegenstandes steht, der nicht eine Klasse ist, während auf der andern ein Klassenzeichen steht, ist nichts gesagt, ebensowenig über die Fälle, wo links etwa ein Satz, rechts ein Klassenzeichen oder Eigenname steht. Natürlich meinen Sie, dass in diesen Fällen die Gleichung falsch wäre; aber aus Ihren Definitionen ist es nicht zu entnehmen.

Die Gründe, weshalb ich nicht zugeben kann, dass Sie das Gleichheitszeichen mittels der Zeichen $\frown$, O, $-$ definirt haben, sin din der Hauptsache folgende:

1. jede einzelne von diesen Definitionen ist unvollständig;

2. auch alle zusammen sind noch unvollständig, sofern sie nicht in jedem Falle entscheiden, ob Gleicheit bestehe;

3. sie erklären das Gleichheitszeichen mittels seiner selbst.

Ich habe hierbei so lange verweilt nicht so sehr der Gleichheitszeichens wegen, als vielmehr der Grundsätze des Definirens halber, die auch sonst vielfach in Betracht kommen. Ich finde überhaupt, dass Sie hierin nicht streng genug sind, und dass daher Ihre Zurückführungen logischer Gebilde auf einfachere der überzeugenden Kraft vielfach entbehren.

Wo steht ferner die Definition, durch die das Zeichen « Λ » mit den Zeichen $\frown$, O, $-$ erklärt wird? Im Formular finde ich es zuerst in I, § 3, 1, was aber nicht als Definition bezeichnet ist, als solche auch fehlerhaft wäre. In Ihren *Notations de logique mathématique* ist dies Zeichen an zwei Stellen erklärt, aber nur in Worten, und es kommen also die Zeichen $\frown$, $\circ$, $-$ gar nicht darin vor. Auch kommt hier wieder in Betracht, was ich über die Vielfachheit der Definitionen gesagt habe. Die Sache liegt hier aber etwas anders als vorhin, indem hier gar keine Fälle zu unterscheiden sind und keine von beiden Erklärungen unvollständig ist. Es bleiben hier nur die Möglichkeiten übrig entweder dass diese Erklärungen einander widersprechen, oder dass der Inhalt der einen eine Folge der andern ist, wo dann jene als Lehrsatz bewiesen werden müsste.

Wenn es sich übrigens darum handelt, alle Urzeichen aufzuführen, so ist auch das Beziehungszeichen « ε » zu nennen; denn es kann nicht mit andern definirt werden. Auch der Strich über dem Functionsbuchstaben zur Bezeichnung der Umkehrung muss als Urbezeichnung gelten. Zu den Urzeichen muss auch das « K » gerechnet werden und wohl noch viele der Klassenzeichen, die im § 2 Ihrer *Notations de logique* etc. aufgeführt sind. Ich habe für dies « K » kein besonderes Urzeichen nöthig, sondern kann dafür

$$\acute{\alpha}(\acute{\varepsilon}(\text{———}\,\varepsilon \frown \alpha) = \alpha)$$

schreiben, was nur aus meinen vorher eingeführten Zeichen besteht. Wenn ich also das einfache Zeichen K aufnehmen und definiren wollte, so könnte ich es mit der Gleichung

$$\acute{\alpha}(\acute{\varepsilon}(\text{———}\,\varepsilon \frown \alpha) = \alpha) = \mathrm{K}\,.$$

Und wenn ich das Zeichen N in Ihrer Bedeutung gebrauchen wollte, so könnte ich Ihr « N ε K » so wiedergeben:

$$\mathrm{N} \frown \acute{\alpha}(\acute{\varepsilon}(\text{———}\,\varepsilon \frown \alpha) = \alpha)\,,$$

oder so:

$$\acute{\varepsilon}(\text{———}\,\varepsilon \frown \mathrm{N}) = \mathrm{N}\,.$$

Aus diesen Gründen glaube ich nicht, dass die Anzahl der Urzeichen wirklich bei Ihnen geringer ist, als bei mir. Ich halte aber auch die blosse Abzählung der Urzeichen nicht für hinreichend, um daraus ein Urtheil über die Tiefe der zu Grunde liegenden Analyse zu gewinnen. Ich habe z. B. das Zeichen $|$, den Urtheilstrich, der dazu dient, etwas als wahr zu behaupten. Sie haben kein entsprechendes Zeichen, aber Sie erkennen den Unterschied an zwischen dem Falle, dass man einen Gedanken nur ausdrückt, ohne ihn als wahr hinzustellen, und dem, wo man ihn behauptet. Wenn nun das Fehlen eines solchen Zeichens in Ihrer Begriffsschrift bewirkte, dass die Anzahl Ihrer Urzeichen sich bei genauer Prüfung als geringer herausstellte, so wäre daraus doch nicht auf eine tiefere Analyse zu schliessen; denn

der sachliche Unterschied bleibt bestehen, auch wenn er sich nicht in den Zeichen abspiegelt. Man müsste bei einem solchen Vergleiche auch wohl die Anzahl der selbständigen Festsetzungen in Betracht ziehen und das, was damit geleistet wird. Als solche Festsetzung müsste z. B. auch gezählt werden, dass Ku Klasse von u bedeuten sollte (*Notations* § 2) und noch manches Andere.

Mir scheint daher die Frage, auf welcher Seite die tiefere Analyse zu Grunde liege, nicht ganz einfach zu beantworten. Es kommt dabei Verschiedenes in Betracht: die Anzahl der ursprünglichen Festsetzungen, die Strenge der Grundsätze des Definirens, und was Alles mit den Urzeichen geleistet werden kann. Einstweilen möchte ich darum noch bezweifeln, dass Ihre Analyse tiefer sei, als meine.

Es wäre noch Vieles zu sagen, z. B. über meine Verwendung der lateinischen, deutschen und griechischen Buchstaben, worin Sie mich missverstanden haben, oder über die Bedingungen $u, v\, \varepsilon\, \mathrm{K}$, die Sie in meinem Satze (32) vermissen. Doch müsste ich dazu weiter ausholen und hoffe Ihnen später einmal darüber etwas zu schreiben.

Mit hochachtungsvollem Grusse

Ihr ergebener
G. Frege.

Risposta

Le grandi difficoltà incontrate nell'ordinamento e nella stampa di F_2 § 1 (§ 1 del tomo II del *Formulaire de Mathématiques*) ritardarono la pubblicazione del N. 2 del t. VI della nostra Rivista, e quindi anche quella dell'importantissima lettera del sig. FREGE, la quale contribuirà a rischiarare parecchi punti difficili e controversi di Logica matematica. Risponderò brevemente ad alcune sue osservazioni.

Nella mia recensione all'opera del sig. FREGE dissi che « tutte le operazioni e le relazioni fra proposizioni e fra classi si riducono alle tre fondamentali $\cap$, $\supset$, $-$ »; ma senza dubbio il sistema delle idee primitive che si incontrano in tutta la Logica è più complesso.

Secondo la raccolta delle formule di Logica, ultimamente pubblicate in F_2 § 1, le *notazioni*, esprimenti col linguaggio ordinario le idee primitive che non potemmo esprimere in simboli, sono in numero di 9, espresse dalle P1-7, 70, 100.

Su questa riduzione non è ancor detta l'ultima parola. Nelle note al F_2 § 1 accennai ad altri modi di coordinare le idee di logica; ed è possibile che la scoperta di nuove identità logiche porti ad una riduzione ulteriore.

Fra le idee primitive figura pure quella di *definizione* (P7), indicata col simbolo $= \mathrm{Df}$, che si legge « è uguale, per definizione ». Quantunque i segni $=$ e Df siano scritti separati, poichè l'ultimo, nel Formulario, è sempre scritto in fin di rigo, essi però formano un simbolo solo. Il sig. BURALI-FORTI nell sua *Logica matematica*, a. 1894, li avvicinò scrivendo $=_{\mathrm{Def}}$; il sig. PIERI li fuse tipograficamente scrivendo $\equiv$; ma queste non sono che differenze formali.

Il sig. FREGE desidera per ogni segno una sola definizione. E tale è pure la mia opinione se si tratta d'un segno non contenente lettere variabili (F_2 § 1 P7). Ma se ciò che si definisce contiene lettere variabili, cioè è una funzione di queste lettere, allora io veggo in generale la necessità di dare di quella espressione delle definizioni condizionate, o definizioni con ipotesi (id. P7'), e di dare tante definizioni quante sono le specie di enti su cui eseguiamo quella operazione. Così la formula $a + b$ si definirà una prima volta quando a e b sono intieri, poi una seconda quando sono fratti, poi quando sono irrazionali, o complessi. Si incontra lo stesso segno $+$ fra numeri infiniti e transfiniti (F_1 VI), ed allora se ne deve dare una nuova definizione. Lo si incontra fra due vettori, e si definirà di nuovo, e così via. E col progredire della scienza si estende sempre più il significato della stessa formula. I varii significati della scrittura $a + b$ hanno proprietà comuni; ma queste sono insufficienti a precisare tutti i valori che può avere quell'espressione.

Lo stesso avviene per la formula $a = b$; in alcuni casi il suo significato si può assumere come idea primitiva; in altri la si definisce, e precisamente in aritmetica, data l'uguaglianza degli intieri, si definisce l'eguaglianza fra i razionali, fra gli irrazionali, fra i numeri immaginarii, ecc. Si suol definire in geometria l'eguaglianza di due aree, di due volumi, l'eguaglianza di due vettori, ecc. Col progredire della scienza si sente sempre più la necessità di estendere il significato della formula $a = b$. I varii significati di essa hanno proprietà comuni; ma io non veggo come bastino a precisare tutti i significati possibili dell'eguaglianza.

Del resto le opinioni dei varii Autori, sul concetto di eguaglianza, diversificano assai; ed uno studio di questa questione sarebbe assai utile, specialmente se fatto coll'aiuto di simboli, anzichè di parole.

La prop. F_1 I § 5 P2 è unita alla precedente onde costituire una definizione. Essa si legge:

« Siano a e b delle classi; diremo che f è un b funzione degli a, se comunque si prenda x nella classe a, fx è un b; e se a due individui x ed y, eguali, presi nella classe a, corrispondano valori della funzione, pure eguali ».

Nella nuova raccolta di formule di logica, questa definizione si è potuta scindere in due proposizioni, F_2 § 1 P500 e P503, e ciò a causa della nuova P80.

Esatta è l'osservazione della non omogeneità della F_1 I § 5 P11, che più non trovasi in F_2.

Il Formulario di Matematica non è un lavoro individuale, ma bensì va diventando sempre più un lavoro di collaborazione; e saranno accolte con gratitudine tutte le osservazioni che contribuiscono al suo incremento e perfezionamento.

G. PEANO.

PRIX LOBATCHEFSKY

(Premier Concours 1897)

La Société Physico-mathématique de Kasan a l'honneur d'informer qu'elle a décerné dans sa séance solennelle de 3 Novembre (22 Octobre) 1897 le prix de N. I. Lobatchefsky à M. Sophus Lie, professeur ordinaire a l'Université de Leipzig, pour son ouvrage: « Theorie der Transformationsgruppen. Band. III. Leipz. 1893 ».

Les mentions honorables sont décernées:

à M. L. Gérard, professeur au Lycée Ampère (Lyon), pour son ouvrage: « Thèse sur la géométrie non-euclidienne. Paris. 1892 »,

à M. E. Cesàro, professeur ordinaire a l'Université Royale de Naples, pour son ouvrage: « Lezioni di Geometria intrinseca. Napoli. 1896 ».

et à M. G. Fontené, professeur au collège Rollin, pour son ouvrage: « L'hyperespace à n-1 dimensions. Paris. 1892 »,

La medaille d'or de N. I. Lobatchefsky, destinée selon le § 16 du réglement du prix Lobatchefsky à recompenser le travail des personnes qui aident à la Société physico-mathématique de Kasan à examiner les ouvrages, présentés au concours, a été décernée dans la même séance solennelle de 3 Novembre 1897 à M. Felix Klein, professeur ordinaire à l'Université de Gottingue, pour son rapport sur l'ouvrage de M. Lie. Le rapport de M. Klein vient d'être imprimé à Kasan sous le titre: « Zur ersten Verteilung des Lobatschewsky-Preises (Gutachten, betreffend den dritten Band der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie) ».

Les rapports sur les ouvrages de M. Gérard, Cesàro et Fontené ont été donnés par M.rs prof. T. Souvorof, D. Seiliger et P. Nasimof, membres de la commission. En outre ont pris part aux travaux de la commission: M.rs prof. D. Doubiago, A. Kotelnikof, D. Sintzof (secrétaire de la commission).

Le nombre total des ouvrages présentés au concours à été égal à neuf.

Extrait du réglement du prix Lobatchefsky.

Le prix Lobatchefsky est décerné tous les trois ans. Il est d'une valeur de 500 roubles papiers. Il reste à la volonté de la Société d'en augmenter avec le temps la valeur, si l'état du capital le lui permet. (§ 4)

Le prix Lobatchefsky est destiné aux ouvrages relatifs à la géométrie, et de préférence à la géométrie non-euclidienne. (§ 5)

Sont admis à concourir à ce prix les ouvrages imprimés en russe, français, allemand, anglais, italien et latin, adressés à la Société Physico-mathématique par leurs auteurs et publiés dans le cours de six années qui auront précédé le jugement de la Société concernant le prix. (§ 6)

Dans aucun cas le prix ne peut être partagé entre deux ou plusieurs auteurs concurrents. Dans le cas où se présenteront plusieurs ouvrages d'égale valeur, c'est le tirage au sort qui en décidera. (§ 7)

Le prix sera décerné pour la seconde fois le 3 Novembre 1900. Selon le § 11 du réglement, les ouvrages destinés au concours doivent être adressés à la Société Physico-mathématique de Kasan jusqu'à 3 Novembre 1899.

Président de la Société Physico-mathématique

A. Vassilief.

20 Decembre 1897.

NOUVELLES PUBLICATIONS

E. Aichino. — *Trigonometria sferica.* Casale, tip. Pane, 1897, p. 24, tavole 11; L. 2.

F. Amodeo. — *Lezioni di Geometria proiettiva.* Napoli, Pellerano, 1896, pag. 272, litografato; L. 5,50.

F. Aschieri. — *Lezioni di Geometria descrittiva.* Milano, Hoepli, 1896 pag. 443; L. 8,50.

C. Burali-Forti. — *Introduction à la Géométrie différentielle, suivant la méthode de* H. Grassmann. Paris, Gauthier-Villars, 1897, pag. 165.

B. Carrara. — *Problemi di fisica e chimica.* Torino, Paravia, 1897-98, pag. 367+85; L. 5+7.

E. Cesàro. — *Lezioni di Geometria intrinseca.* Napoli, presso l'autore, 1896, pag. 264; L. 8.

S. Dickstein. — *Hoene Wronski, jego zycie i prace.* Krakowie, 1876, pag. 368.

F. Enriques. — *Lezioni di Geometria proiettiva*. Bologna, Zanichelli, 1898, pag. 377; L. 9.
G. Fontené. — *Géométrie dirigée*. Paris, Nony, 1897, pag. 83.
De Galdeano. — *Las modernas generalisationes expresadas por el álgebra simbólica*. Madrid 1896, pag. 142; 2 pesetas.
Gazzaniga. Verona, F. Drucker, 1897, pag. 392.
P. Gazzaniga. — *Libro di Aritmetica e di Algebra elementare*, 2ª ed. Padova, Prosperini, 1897, pag. 328; L. 3,50.
F. Giudice. — *Geometria piana*. Brescia, tip. Apollonio, 1897, pagine 394; L. 3.
C. Jordan. — *Cours d'Analyse*, 2e éd., t. III, Paris, Gauthier-Villars, 1896, pag. 542.
C. A. Laisant. — *La Mathématique. Philosophie, Enseignement*. Paris, Carré et Naud, 1898, pag. 292; Fr. 5.
L. Lorentz. — *Œuvres scientifiques*, t. I. Copenhague, 1896.
E. Mach. — *Populär-wissenschaftliche Vorlesungen*. Leipzig, Barth, 1896, pag. 335.
A. Martini-Zuccagni. — *Lezioni di Aritmetica teorica*. Livorno, I. Belforte, 1897, pag. 324: L. 2,50.
S. Ortu Carboni. — *Problemi elementari di applicazione dell'Algebra alla Geometria*. Livorno, Giusti, 1897, pag. 152; L. 2.
E. Pascal. — *Funzioni ellittiche*. Milano, Hoepli, 1896, p. 227; L. 1,50.
E. Pascal. — *I determinanti*. Milano, Hoepli, 1897, pag. 330; L. 3.
E. Pascal. — *Calcolo delle variazioni*. Milano, Hoepli, 1897, p. 330; L. 3.
E. Pascal. — *Repertorio di Matematiche superiori* t. I, Analisi. Milano, Hoepli, 1898, pag. 644; L. 6.
G. Riboni. — *Elementi di Geometria con esercizi* di D. Gambioli. Bologna, Zanichelli, 1896, pag. 278; L. 2.
G. Ricci. — *Lezioni sulle teoria della superficie*. Padova, Drucker, 1898, pag. 416, litografato; L. 10.
E. J. Routh. — *Die Dynamik der Systeme starrer Körper*. Ausg. v. A. Schepp. Leipzig, Teubner, 1898, pag. 472.
J. A. Serret. — *Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung; deutsch bearbeitet* v. A. Harnack. 2e aufl. v. Bohlmann, t. I. Leipzig, Teubner, 1897.
G. Veronese. — *Elementi di Geometria*. Con la collaborazione di P.
C. Wessel. — *Essai sur la représentation analytique de la direction*. Publié par l'Acad. des sciences de Danemark, à l'occasion du centenaire. Copenhague, 1897, pag. 60.

ADDITIONS ET CORRECTIONS A F_2

§1

Continuation. V. RdM t. VI p. 51

Note. «*a*» marque les P contenues dans ces additions.

Ajoutez les P 70′ 511 512 qui precédent F_2§2, et les

44′. $a(bc) = (ab)c$

86. Dem P71.

[P81 $.\supset. (x;y)\, \varepsilon\, (z;t) \ni (x=z\,.\,y=t)$ (1)
$(x;y)=(a;b)\,.\,(1)\,.$ P80 $.\supset. (a;b)\, \varepsilon\, (z;t) \ni (x=z\,.\,y=t) .\supset. x=a\,.\,y=b$ (2)
P81 $.\supset. x\, \varepsilon\, z \ni (\,(x;y)=(z;y)\,)$ (3)
$x=a\,.\,(3)\,.$ P80 $.\supset. a\, \varepsilon\, z \ni (\,(x;y)=(z;y)\,) .\supset. (x;y)=(a;y)$ (4)
$y=b\,.$ P80 . P81 $.\supset. (a;y)=(a;b)$ (5)
$x=a\,.\,y=b\,.\,(4)\,.\,(5)\,.$ P83 $.\supset. (x;y)=(a;b)$ (6)
$(2)\,.\,(6) .\supset.$ P] | C. Burali-Forti |

101·. $x,y-\varepsilon a \;.=.\; x-\varepsilon a\,.\,y-\varepsilon a$ | Ex. §2P346·2·4a | Df
109′. $ab = ac \;.=.\; a-c = a-b$ | Whitehead a.1898 p.40 |
123. $a-b = b-a \;.=.\; a=b$ | Vailati a.1891 |

402″ . $\exists\, a \frown b .\supset. \exists a\,.\,\exists b$ [Hp . P23 . P24 . P402 $.\supset.$ P]
| C. Burali-Forti |

540. $\omega x = x$ | Le signe ω représente l'identité | Ex. §2P351′·5a Df
1. $u\, \varepsilon$ Cls $.\supset.\ \omega\, \varepsilon\, ufu\ .\ \omega\, \varepsilon\, (ufu)$Sim $.\ \omega\, \varepsilon\, (ufu)$rcp

pag. 34, lignes 4-8 en remontant. Remplacez par:
Miss Ladd, *On the Algebra of Logic*, a. 1883, et ensuite plusieurs A. par l'instrument de la Logique symbolique, ont découvert la fausseté des formes traditionnelles de syllogisme, appelées «Darapti, Felapton, Bamalip, Fesapo». Correction suggérée par M. F. Invrea.

p. 42 ligne 5 en remontant: au lieu de a.1870 lisez a.1867

§2

pag. VII P450 au lieu de $x \supset a$ lisez $x \supset u$.
» P511 Lisez la Ths: $(ux)|x = u$
» ligne 22 en remontant, au lieu de: a est un $a\,\mathrm{f}\,b$ lisez: u est un $a\,\jmath\,b$.
» » 17 » » $\jmath$ » f

pag. VIII ligne 5 en remontant. Ajoutez:

La sigle Ⅎ désigne aussi les « Formule di Matematica » supplément à la RdM a. 1892, F_1I et F_1V.

Ajoutez la sigle Ⅎ aux P 014·4 015·2·3 023·5 038·12 083·1·18 093·3 095·16 ·21·31·34 096·4 098·1 100·1·2·3 101·22·23·31 104·1 111·1 115·2 150·3 162·1 163·21 171·1·6·7 180·2·3 194·1 210·1·5·6 211·1 341·2 342·3.

Ajoutez la sigle ꟼ aux P 003·2·3 010 023·1·6·7 050·1 054 060 062·1·2 067·1·3 150·5 151·3·4 161·2 162·4·5·6 220·1·1′ 310·1·2 311·11 313·1

Ajoutez la sigle ꟼ̣ aux P 011·7 017 030 200·1-·4 201·1·3 202.

Ajoutez la sigle « Vivanti F_1VI » aux P210·2·9.

p. 6 ligne 14 en remontant: lisez Paciuolo

Ajoutez et corrigez les P suivantes:

038·11′ $s, t, u \,\varepsilon\, \mathrm{Cls}'\mathrm{n} \,.\supset.\, \mathrm{P}019{\cdot}2\text{-}{\cdot}7 \,.\, (-|+)\, \mathrm{P}019{\cdot}2\text{-}{\cdot}4 \,.(s|\mathrm{N}_0)\mathrm{P}024.$

038·13 $\mathrm{n}+\mathrm{n} = \mathrm{n}$ Ⅎ ·14 $-\mathrm{n} = \mathrm{n}$ Ⅎ

044. Au lieu de ·1-·4 lisez ·2-·7 deux fois.

049·91 $ac = bc \,.\, c -= 0 \,.\supset.\, a = b$ Ⅎ

·993 $a,b \,\varepsilon\, \mathrm{n}c \,.\, m,n \,\varepsilon\, \mathrm{n} \,.\supset.\, ma+nb \,\varepsilon\, \mathrm{n}c$ ꟼ

055·1. $c \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1 \,.\, a,b \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1 \times c \,.\supset.\, (a+b)/c = a/c+b/c$ ꟼ

·2. ————————. $a \,\varepsilon\, b+\mathrm{N}_1 \,.\supset.\, (a-b)/c = a/c-b/c$ ꟼ

060 *Note.*

Selon le langage ordinaire, $\frac{a}{b}$ précède le nombre, ou la grandeur, sur laquelle on opère, et signifie « diviser par b et multiplier par a ». P. ex. « $\frac{3}{5}$ de 15 fr. » signifie « ce qu'on obtient en divisant 15 fr. par 5 et en multipliant le résultat par 3 ». Mais nous préferons de donner à a/b, qui suit le nombre sur lequel on opère, la signification « multiplier par a et diviser par b », afin de rendre possible l'opération dans un plus grand nombre de cas.

Les calculs sur les fractions étaient connus des anciens égyptiens, comme résulte du papyrus Rhind, (a. —1700 ⊢—2200?) publié par:

Eisenlohr, *Ein Mathematisches Handbuch der alten Aegypter*, Leipzig, a. 1877.

Dans ce papyrus l'auteur ou le copiste Ahmès (Aahmesu) indique les fractions /2, /3, 2/3, /4 par des signes de forme spéciale.

Les fractions de la forme $/a$, où a est un entier supérieur à 4, sont indiquées par le nombre a surmonté d'un point, qui a la valeur du signe /.

On remarquera la suppression du numérateur de la fraction, lorsqu'il est l'unité, comme dans le Formulaire.

Toute fraction est exprimée par la somme de la partie entière, et de fractions décroissantes de la forme considérée; à peu près comme nous, dans la théorie, réduisons toute fraction à la forme a/b, où a et b sont des entiers, et dans la pratique aux fractions décimales.

Les dénominateurs des fractions égyptiennes sont quelques fois des puissances de 2; alors la fraction a une forme analogue à notres fractions décimales, mais dans la numération binaire. Dans d'autres cas les termes successifs des expressions égyptiennes expriment la fraction donnée avec la plus grande approximation. Mais ces termes suivent aussi des lois plus compliquées.

Voici les résultats de quelques calculs contenus dans ce papyrus:

table I	2/5=/3+/15
table II	2/23=/12+/276
table IX, N. 6	9/10=2/3+/5+/35
table X, N. 21	1—(/3+/15)=/5+/15
table XI, N. 24	19/(1+/7)=16+/2+/8
table XIII, N. 34	10/(1+/2+/4)=5+/2+/7+/14

On peut aussi remarquer les signes de l'addition et de la soustraction: les jambes d'un homme qui va, ou qui vient (table XI, N. 28).

Voir: Rodet, *Journal Asiatique*, a. 1881 t. XVIII p. 184, 390.

Loria, *Studio intorno alla logistica greco-egiziana*, a. 1894, Giornale di Matem. t. 32.

063·6 $a + \mathrm{R} = \mathrm{R}$ ·7 $\mathrm{R} + \mathrm{R} = \mathrm{R}$ Ⅎ

064·1-·6. Au lieu de P034 lisez P043.

064·7 $a \times \mathrm{R} = \mathrm{R}$ ·8 $\mathrm{R} \times \mathrm{R} = \mathrm{R}$

·9 $\exists\, \mathrm{N}_1 \frown m\mathfrak{z}(ma, mb, mc, md \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1)$ ꟼ

·10 $\mathrm{N}_1 \supset \mathrm{R}$ ꟼ

065. Au lieu de ·1-·25 lisez ·1-·24 (deux fois).

065·36 $/\mathrm{R} = \mathrm{R}$

071·41-·45 $a,b \,\varepsilon\, \mathrm{r}-\iota 0 \,.\supset.\, /a \,\varepsilon\, \mathrm{r} \,.\, \mathrm{P}065{\cdot}32\text{-}{\cdot}35$ Ⅎ

071·51 $a \,\varepsilon\, \mathrm{r}-\iota 0 \,.\supset.\, /-a = -/a$ Ⅎ

074·1. { Ahmès, N. 24-38 }

074·4 pag. 18 ligne 2 en remontant. Lisez: le quotient [$(d-b)/(a-c)$]

075·2. { Ahmès, N. 63 }

076. $a,b,c \,\varepsilon\, \mathrm{r}-\iota 0 \,.\, a -= b \,.\, b -= c \,.\, c -= a \,.\, a+b+c=0 \,.\supset.$

$[(a-b)/c+(b-c)/a+(c-a)/b][c/(a-b)+a/(b-c)+b/(c-a)]=9$

{Lucas, *Th. des nombres*, a. 1891, p. 150} <

083·18 Au lieu de $+12abc$ lisez $-12abc$ {Escott}

084·11 $(N_1+1)^2 \supset N_1^2 + N_1^2 + N_0^2 + N_0^2$

{P. Tannery, *Int. des math.*, a. 1898, t. 5, p. 281}

095·8 $a,b,c,d \,\varepsilon\, N_0 \,.\supset.$

$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2=(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+(2ac\pm 2bd)^2+(2bc\mp 2ad)^2$

{P. Tannery, *Int. des Math.* a. 1898, p. 282}

095·20′ $(a^2+ab+b^2)^2-(a^2-ab+b^2)^2=4ab(a^2+b^2)$

·20″ $a(a-2b)^3-b(b-2a)^3=(a-b)(a+b)^3$

·44 $3(a+b+c)^2=(a+b-c)^2+(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+8(ab+ac+bc)$

·45 $a^4+b^4+c^4=(a+b+c)(a-b-c)(b-c-a)(c-a-b)+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

·46 $(a+b+c)^5=(a+b-c)^5+(b+c-a)^5+(c+a-b)^5+80abc(a^2+b^2+c^2)$

·47 $(a^6+b^6)(a+b)-2ab(a^5+b^5)=(a-b)^2(a+b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

.48 $(a^6+b^6)(a+b)-(a^2+b^2)(a^5+b^5)=(a-b)^2(a+b)(a^2+b^2)ab$

·49 $x=ab \,.\, y=(a+b)b \,.\, z=a(a+b)(a^2+ab+2b^2) \,.$
$w=a^2+ab+b^2 \,.\supset.\, x^4+y^4+z^2=w^4$

{P·44-·49. E. B. Escott (Grand Rapids, Mich. U. S. A.)}

·50 $(a^3+a^2b+ab^2+b^3)^2+(a^3-a^2b+ab^2-b^3)^2=2(a^2+b^2)^3$

·51 $(a^3+a^2b-ab^2-b^3)^2-(a^3-a^2b-ab^2+b^3)^2=4ab(a^2-b^2)^2$

·52 $(a^3+a^2b-ab^2+b^3)^2-(a^3-a^2b-ab^2-b^3)^2=4ab(a^2+b^2)(a^2-b^2)$

·53 $(a^4+ab^3-a^2b^2+ab^3+b^4)^2-(a^4-a^3b-a^2b^2-ab^3+b^4)^2=4ab(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$

·54 $(a^4+a^3b-a^2b^2-ab^3+b^4)^2-(a^4-a^3b-a^2b^2+ab^3+b^4)^2=4ab(a^2-b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$

{ ·50-·54. E. Sadun }

103·3 $m,n \,\varepsilon\, N_0 \,.\, f\varepsilon\, N_0 \,\mathrm{f}\, 0\cdots m \,.\, g\varepsilon\, N_0 \,\mathrm{f}\, 0\cdots n \,.\supset.$

$(\Sigma_0^m f)(\Sigma_0^n g) = \Sigma \{ \Sigma [(fr \times gs)|s, 0\cdots n] | r, 0\cdots m \}$

113·2 $m\varepsilon N_1 \,.\supset.$

$3\Sigma_1^m(2r-1)^2|r=3[1^2+3^2+5^2+\ldots+(2m-1)^2]=m(4m^2-1)$

$\Sigma_1^m(2r-1)^3|r=1^3+3^3+5^3+\ldots+(2m-1)^3=m^2(2m^2-1)$

{Ibn Albanna, a. 1275?; *Le Talkhys d'Ibn Albanna publié et traduit par Aristide Marre*, Roma 1865. (Atti Ac. Pont· N. Linc., t. 17, a. 1864)}

114·1 Lisez: $2s_1 = n(n+1)$

114·8 $2s_7=4s_3^2-s_2^2+s_1^2$ ·9. $2s_5=3s_2^2-s_1^2$

{Lucas, *Th. des nombres*, a. 1891, p. 249}

115·1. Ajoutez au premier membre $-(\Sigma_0^m xy)^2$

131. $n,a\varepsilon N_1 \,.\supset.\, a\urcorner(2^n)-1 = (a-1)\Pi_0^{n-1}(a\urcorner(2^r)+1)|r$

———————— $=(a-1)(a+1)(a^2+1)\ldots(a\urcorner(2^{n-1})+1)$

152·1. $a,b\varepsilon N_0 \,.\supset:\, b>a \,.=.\, b-a \,\varepsilon N_1$ Df?

·2. $a,b,c\varepsilon N_0 \,.\, a>b \,.\, b>c \,.\supset.\, a-b < a-c$

155·13 $a>b \,.=.\, a-b>0$

·14 $a>b \,.\, c<d \,.\supset.\, a-c>b-d$

·15 $a<b \,.\, c>d \,.\supset.\, a-c<b-d$

160′. $a,b\varepsilon \mathrm{n} \,.\, c\varepsilon N_1 \,.\supset:\, a>b \,.=.\, ac>bc$

163·25 $a<b \,.=.\, \exists\, R \frown x \ni (a<x<b)$

·26 $a<b \,.\, m,n\varepsilon R \,.\supset.\, a<(ma+nb)/(m+n)<b$

173·3 $(a+b)^{m+1} > a^{m+1}+(m+1)a^m b$

·4 $< a^{m+1}+(m+1)(a+b)^m b$ {P113 $\supset$ P·4·5}

173′. $a,b\varepsilon N_0 \,.\, a -= b \,.\supset.$

·1 $a^{m+2}+b^{m+2} > ab(a^m+b^m)$

[$a^{m+2}+b^{m+2} - ab(a^m+b^m) = (a-b)(a^{m+1}-b^{m+1})$]

·2 $2^{m-1}(a^m+b^m)>(a+b)^m$

175·1 $a\varepsilon R \,.\, m\varepsilon N_1+1 \,.\supset.\, (1+a)^m>1+ma$

[$(1, a, m-1)|(a, b, m)$P173·4 $.\supset$P]

·2 ———————— $(1-a)^m>1-ma$

[$(1-a, a, m-1)|(a, b, m)$P173·5 $.\supset.$P]

·3 $a,b\varepsilon R \,.\, a<b \,.\, m\varepsilon N_1 \,.\supset.\, \exists\, R \frown x \ni (a<x^m<b)$

180·4 $(\Sigma a)(\Sigma ax^2) \gtreqless (\Sigma ax)^2$ [$(1 | y)$P·3 $\supset$ P]

·5 $m\varepsilon N_1 \,.\supset.\, n^{m-1}(\Sigma x^m) \gtreqless (\Sigma x)^m$

183. $n\varepsilon N_1+1 \,.\, x,y \,\varepsilon\, \mathrm{rf}\, 1\cdots n \,.\, a\varepsilon\, \mathrm{R\,f}\, 1\cdots n \,.\, \Sigma = \Sigma_1^n \,.\supset.$

·1-·4 $=$ P180·1-·4

190. *Note.* Leibniz, *Math. Schrift.* t. 7. p. 219, pour indiquer mod a, a proposé la notation mol.a, abréviation du mot latin « moles ».

193·6′ $a\varepsilon\, \mathrm{r}-\iota 0 \,.\, m\varepsilon \mathrm{n} \,.\supset.$ ThsP·6

·7 $\mathrm{mod}a = \mathrm{mod}b \,.=.\, a^2=b^2$

{Leibniz, *ibid.*:

Quantitates duae diversae, eandem molem habentes semper habent idem quadratum.}

203·2 $\mathrm{num}\, a \,\varepsilon\, N_0 \cup \iota\infty$

204. $a\varepsilon N_0 \,.\supset.\, a+\infty = \infty+a = \infty+\infty = \infty \,.\, a<\infty$ Df

205. $a,b \,\varepsilon\, \mathrm{Cls} \,.\supset.$ ·1-·2 $=$ 201·1-·2

220·6″ $\exists u \,.\, a\varepsilon N_0 \,.\, -\exists\, u \frown (a+N_0) \,.\supset.\, \exists\, \iota\, \mathrm{max}u$

·6‴ $\exists u \,.\supset.\, \exists\, \iota\, \mathrm{min}\, u$

228. Hyp 220·6 $.\supset.\ \max(u \upharpoonleft v) = (\max u) \upharpoonleft (\max v)$ $\lessdot$

229. $u \varepsilon \mathrm{Cls}'\mathrm{R}\ .\ v \varepsilon \mathrm{Cls}'\mathrm{N}_0\ .\ \exists\ \iota \max u\ .\ \exists\ \iota \max v\ .\supset.$ ThsP228 $\lessdot$

240·4 Au lieu de Σ_0 lisez Σ_1.

Remplacez les P241-242·6 par

$$\mathrm{N}_0\ \mathrm{N}_1\ \mathrm{n}\ +\ -\ \times\ /\ \cdots\ \Pi\ !\quad \mathrm{Cmb}$$

241. $m \varepsilon \mathrm{n}\ .\ n \varepsilon \mathrm{N}_1\ .\supset.$

·1. $\mathrm{Cmb}(m,n) = \mathrm{C}(m,n) = m(m-1)...(m-n+1)/n!$ Df $\lessdot$

» $= [\Pi_0^{n-1}(m-r)|r]/n!$

·1′ $\mathrm{C}(m,0) = 1$ Df

Note. Le symbole « Cmb » ou « C » est une abréviation du mot « combinatio » adopté par Pascal, *Œuvres*, t. 3, p. 289. Euler a indiqué $\mathrm{C}(m,n)$ par le symbole $\left[\frac{m}{n}\right]$. Acta Acad. Sc. Petr. a. 1781, t. 1, p. 90.

Plusieurs A. adoptent les simboles $\binom{m}{n}$, m_n, etc. $\lessdot$

·2 $m \varepsilon \mathrm{N}_0 \frown (n+\mathrm{N}_0)\ .\supset.\ \mathrm{C}(m,n) = m!/[n!(m-n)!]$ Df? $\lessdot$

·3. $\mathrm{C}(m+1,n+1) = \mathrm{C}(m,n+1)+\mathrm{C}(m,n)$ $\lessdot$

·4 $m \varepsilon 0\cdots(n-1)\ .\supset.\ \mathrm{C}(m,n) = 0$

·5 $\mathrm{C}(n,n) = 1$ ·6 $\mathrm{C}(m,1) = m$

·7 $m,n \varepsilon \mathrm{N}_0\ .\supset.\ \mathrm{C}(-m,n) = (-1)^n\, \mathrm{C}(m+n-1,n)$ {Euler, *id.*}

$$\mathrm{N}_0\ +\ \mathrm{N}_1\ -\ \times\ /\ \upharpoonleft\ \cdots\ \Sigma\ \mathrm{num}\ !\ \mathrm{Cmb}$$

242. $m,n \varepsilon \mathrm{N}_1\ .\supset.$

·1. $\mathrm{C}(m+n,n) = \mathrm{C}(m+n,m)$ $\lessdot$

·2. $\mathrm{C}(m+n-1,m)/\mathrm{C}(m+n-1,n) = n/m$ $\lessdot$

·3. $\mathrm{C}(2m,m) = 2\mathrm{C}(2m-1,m)$ $\lessdot$

·4. $\mathrm{C}(m+n,n)/\mathrm{C}(m+n-1,n) = (m+n)/m$ $\lessdot$

·5. $\mathrm{C}(m+n,n)/\mathrm{C}(m+n,n+1) = (n+1)/m$ $\lessdot$

·6. $\mathrm{C}(m+n+1,n+1)/\mathrm{C}(m+n,n) = (m+n+1)/(n+1)$ $\lessdot$

pag. 42, ligne 4, au lieu de: $[m+1\,,\,n+1]$ lisez: $[m\,,\,n]$.

242·8 $a \varepsilon \mathrm{N}_1+1\ .\ b \varepsilon 1\cdots(a-1)\ .\supset.\ \mathrm{C}(a,b)\ \varepsilon\ \mathrm{N}_1 \times [(\mathrm{N}_1+1) \frown (a/\mathrm{N}_1)]$ $\lessdot$

{Leibniz, *Math. Schrift.*, t. 7, p. 103:

Quaelibet combinatio, exceptis duabus extremis, divisibilis est per aliquem divisorem sui numeri rerum.} $\lessdot$

243·2′ $\Sigma_0^n\, \mathrm{C}(m+r,r)|r = \mathrm{C}(m+n+1,m)$ $\lessdot$

243·3 Au lieu de m lisez n $\lessdot$

243·3′ $n \varepsilon \mathrm{N}_1\ .\supset.\ \Sigma\{\mathrm{C}(n,s)|s,0\cdots n \frown (2\mathrm{N}_0)\} = 2^{n-1}$ $\lessdot$

243·3″ ——— $\Sigma\{\mathrm{C}(n,s)|s,0\cdots n \frown (2\mathrm{N}_0+1)\} = 2^{n-1}$ $\lessdot$

{243·3·3′·3″. Jacob Bernoulli a. 1654⊢1705, *Ars conjectandi*, Basileae, a. 1713, p. 104:

Numerus combinationum secundum omnes exponentes pares (incluso nullione) aequatur numerum combinationum secundum omnes impares, proinde utervis semissis est numeri omnium combinationum simpliciter (incluso quoque nullione) h. e. cum iste in rebus n, sit 2^n [P243·1] utervis illorum erit 2^{n-1}.} $\lessdot$

243·5·9·11 Supprimez. $\lessdot$

243·6 Ajoutez:

{Lagrange a. 1770; *Œuvres*, t. 2] p. 182:

$1+n^2+[n(n-1)/2]^2+\ldots = [1\times3\times5\ldots(2n-1)/(1\times2\times3\ldots\times n)]2^n$ } $\lessdot$

302·8′ $a > b\ .\supset.\ a > 2\,\mathrm{rest}(a,b)$

·19 $\mathrm{quot}(a+b,\ c) = \mathrm{quot}(a,c) + \mathrm{quot}\ [b+\mathrm{rest}(a,c),\ c]$

.20 $\mathrm{rest}(a+b,\ c) = \mathrm{rest}\ [b+\mathrm{rest}(a,c),\ c]$

310·10. Au lieu du dernier b lisez c

313·1 Dem

[Hp . P045·4·5 $.\supset:\ x \varepsilon \mathrm{N}_1\ .\ a,b \varepsilon\ \mathrm{N}_1\times x\ .=.\ x\varepsilon \mathrm{N}_1\ .\ a+b,\ b\ \varepsilon\ \mathrm{N}_1 \times x$ (1)

Hp . (1) $.\supset.\ \max\ [\ \mathrm{N}_1 \frown x \ni (a,b \varepsilon\ \mathrm{N}_1\times x)] = \max[\mathrm{N}_1 \frown x \ni (a+b,\ b\ \varepsilon\ \mathrm{N}_1\times x)]$ (2)

Hp . (2) . P311·2 $.\supset.$ Ths]

313·30 $a,b\ \varepsilon\ \mathrm{N}_1\ .\supset.\ \mathrm{D}(a,b) = \max(\mathrm{N}_1 \frown a/\mathrm{N}_1 \frown b/\mathrm{N}_1)$ Df? $\lessdot$

·31 $\mathrm{D}(2a-1,\ 2a+1) = 1$

·32 $a \varepsilon\ 2\mathrm{N}_1\ .\ b \varepsilon\ 2\mathrm{N}_1+1\ .\ a > b .\supset.\ \mathrm{D}(a+b,\ a-b) = \mathrm{D}(a,b)$

·33 $a,b\ \varepsilon\ 2\mathrm{N}_1+1$ ——$.\supset.$ ———— $= 2\mathrm{D}(a,b)$

·34 $a,b,c,d\ \varepsilon \mathrm{N}_1\ .\ \mathrm{D}(a,b) = 1\ .\ \mathrm{D}(c,d) = 1\ .\ a/b = c/d\ .\supset.\ a = c\,.\,b = d$

{Euclides VII P21}

·35 ——— . ———— $.\ a/b = c/d\ .\supset.\ c/a = d/b = \mathrm{D}(c,d)$

{Euclides VII P20}

·7 $\mathrm{D}(a,b) = 1 .\supset.\ (\mathrm{N}_1+1) \frown (a^2+b^2)/\mathrm{N}_1 \supset \mathrm{N}_1^2+\mathrm{N}_1^2$ $\lessdot$

314·1 $a,b\ \varepsilon\ \mathrm{N}_1 - \mathrm{N}_1^2\ .\ ab\ \varepsilon\ \mathrm{N}_1^2 .\supset.\ \mathrm{D}(a,b)\ \varepsilon\ \mathrm{N}_1+1$ $\lessdot$

{Leibniz, *Math. Schr.* t. 7, p. 122, a. 1678} $\lessdot$

315. $a,b,m\ \varepsilon\ \mathrm{N}_1\ .\supset.$

·1 $\mathrm{D}(a,b) = 1\ .\supset.\ \mathrm{N}_1 \frown (a^2+b^2)/\mathrm{N}_1 \supset 4\mathrm{N}_0+1$ $\lessdot$

·2 ——— $.\supset.\ \mathrm{N}_1 \frown (a^4+b^4)/\mathrm{N}_1 \supset 8\mathrm{N}_0+1$ $\lessdot$

·3 ——— $.\supset.\ \mathrm{N}_1 \frown [a \upharpoonleft (2^m) + b \upharpoonleft (2^m)]/\mathrm{N}_1 \supset \mathrm{N}_0 \times 2^{m+1}+1$ $\lessdot$

{315·1-3, Euler, *Theor. circa divisores numerorum*, N. C. Petr. I. a. 1747-48, p. 20} $\lessdot$

316. $n \varepsilon\ \mathrm{N}_1\ .\supset.\ \mathrm{N}_1 \frown (2^{4n}+1)/\mathrm{N}_1 \supset 16\,n\,\mathrm{N}_0 + 1$ $\lessdot$

{Lucas, *Atti Accad. d. Sc. di Torino*, a. 1878, t. 13, p. 281} $\lessdot$

317. $a,b,n \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1 . \mathrm{D}(a,b)=1 . ab \,\varepsilon\, 4\mathrm{N}_1+1 .\supset.$

$\mathrm{N}_1 \frown (a^{2abn}+b^{2abn})/\mathrm{N}_1 \supset 8abn\mathrm{N}_0+1$ {LUCAS, *id.* p. 282} <

321·3 Lisez: $\mathrm{m}(a,b) = \mathrm{m}(b,a)$

332. $a \,\varepsilon\, 1+\mathrm{N}_1 .\supset. \min[(1+\mathrm{N}_1)\frown(a/\mathrm{N}_1)] \,\varepsilon\, \mathrm{Np}$

336·2 Lisez l' Hp $a \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1+3$

336·51 $a \,\varepsilon\, \mathrm{Np}\frown(4\mathrm{N}_1-1) . b,c \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1 . b^2+c^2 \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1\times a .\supset. b,c \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1\times a$ <

{EULER, *ibid.* p. 26} <

337·4 {EULER, *Theor. circa divisores numerorum*, N. C. Petr. a. 1747, p. 20} <

337·9 $m \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1 . 4m+1 \,\varepsilon\, \mathrm{Np} .\supset. m^m-1 \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1\times(4m+1)$ <

{BIKMORE, a. 1896, *Ed. Times*, t. 65, p. 78} <

337·30 {Les chinois ont connu cette P pour $b=2$, dès le temps de *Confucius*, a. —550⊢—477; cfr. Heans, *The messenger of math.*, a. 1898, t. 27, p. 174} <

339·1 $a \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1 .\supset. \min[(\mathrm{N}_1+1)\frown x\ni(a!+1 \,\varepsilon\, x\times \mathrm{N}_1)] \,\varepsilon\, \mathrm{Np}\frown(\mathrm{N}_1+a)$

340·3 Invece di $(2a)!$ si legga $[(2a)!]^2$ <

344·1 $m \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1 . 2^m+1 \,\varepsilon\, \mathrm{Np} .\supset. m \,\varepsilon\, 2\upharpoonright \mathrm{N}_0$

{FERMAT, *Oeuvres*, t. 2, p. 205, a. 1640:

Soit par exemple la progression double depuis le binaire avec ses exposants au dessus:

1	2	3	4	5	6	7	8
2	4	8	16	32	64	128	256

Je dis que, si vous augmentez les nombres de la progression de l'unité, et que vous fassiez 3, 5, 9, 17, etc. tous les dits nombres progressifs ainsi augmentés, qui se trouveront avoir pour exposants des nombres qui ne sont pas de la dite progression double, seront nombres composés.}

·2 $m \,\varepsilon\, 2\upharpoonright \mathrm{N}_1 .\supset: 2^m+1 \,\varepsilon\, \mathrm{Np} .=. 3\upharpoonright(2\upharpoonright(m-1))+1 \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1\times[(2\upharpoonright m)+1]$ <

{PROTH, *Nouv. Corresp. Math.*, Bruxelles, a. 1878, p. 210} <

·3 $m \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1 . 2^m-1 \,\varepsilon\, \mathrm{Np} .\supset. m \,\varepsilon\, \mathrm{Np}$

{FERMAT, *Oeuvres*, t. 2, p. 198, a. 1640:

Les nombres moindres que l'unité que ceux qui procèdent de la progression double, comme

1	2	3	4	5	6	7
1	3	7	15	31	65	127 etc.,

soient appelés les radicaux des nombres parfaits, pour ce que, toutes les fois qu'ils sont premiers, ils les produisent.

Mettez, au dessus de ces nombres, autant en progression naturelle: 1, 2, 3, 4, 5, etc. qui soient appelés leurs exposants.

Cela supposé, je dis que:

Lorsque l'exposant d'un nombre radical est composé, son radical est aussi composé.} <

344·4 $m \,\varepsilon\, \mathrm{Np} .\supset. \mathrm{Np}\frown(2^m-1)/\mathrm{N}_1 \supset 2m\times \mathrm{N}_1+1$

{FERMAT, id. p. 198:

...Lorsque l'exposant est un nombre premier je dis que son radical ne peut être mesuré par aucun nombre premier que par ceux qui sont plus grands de l'unité qu'un multiple du double de l'exposant ou que le double de l'exposant.}

·8 $n \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1+1 .\supset. \exists\, \mathrm{Np}\frown x\ni[\mathrm{mp}(x,n!)=1]$

{LIOUVILLE, t. 2, série II, a. 1857, p. 278} <

345·1 $a \,\varepsilon\, \mathrm{Np} . b \,\varepsilon\, 1\cdots(a-1) .\supset. \mathrm{Cmb}(a,b) \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1\times a$ <

{LEIBNIZ, *Math. Schr.*, t. VII, p. 102:

Si numerus rerum sit primitivus, combinatio ejus quaelibet per ipsum dividi potest, dempta prima et ultima.} <

345·2 $a \,\varepsilon\, \mathrm{Np} - \iota 2 . b \,\varepsilon\, 0\cdots(a-1) .\supset. \mathrm{Cmb}(a-1,b) \,\varepsilon\, \mathrm{N}_0\times a+(-1)^b$ <

·3 $a \,\varepsilon\, \mathrm{Np} . b \,\varepsilon\, 2\cdots a .\supset. \mathrm{Cmb}(a+1,b) \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1\times a$ <

{·2·3, LUCAS, *Amer. Journ.*, t. 1, p. 229, a. 1878} <

346. $m,a,b,c \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1 . 2c+1 \,\varepsilon\, \mathrm{Np} .\supset.$

·1 $a^{2c}+b^{2c} \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1\times(2c+1) .\supset. a,b \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1\times(2c+1)$ <

·2 $a,b \,-\varepsilon\, \mathrm{N}_1\times(2c+1) .\supset. a^{2c}-b^{2c} \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1\times(2c+1)$ <

·3 ——————— $.\supset.$

$a^c+b^c \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1\times(2c+1) .\cup. a^c-b^c \,\varepsilon\, \mathrm{n}\times(2c+1)$ <

·4 ——————— $.\supset.$

$-\exists(a,b)\ni[a,b \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1 . a^c+b^c, a^c-b^c \,\varepsilon\, \mathrm{n}\times(2c+1)]$ <

·5 $a^m+b^m \,\varepsilon\, \mathrm{Np} .\supset. m \,\varepsilon\, 2^{\mathrm{N}_0}$ <

·6 $a^m-b^m \,\varepsilon\, \mathrm{Np} .\supset. m \,\varepsilon\, \mathrm{Np} . a=b+1$ <

·7 $n \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1 . a^m+b^n \,\varepsilon\, \mathrm{Np} .\supset. \mathrm{D}(m,n) \,\varepsilon\, 2\upharpoonright \mathrm{N}_0$ <

{LUCAS, a. 1891, *Th. des nomb.*, p. 342} <

347. $m,a,b,c \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1 . 2c+1 \,\varepsilon\, \mathrm{Np} .\supset.$

·1 $a^m-b^m \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1\times(2c+1) .\supset. a\upharpoonright \mathrm{D}(m,2c) - b\upharpoonright \mathrm{D}(m,2c)$

$\varepsilon\, \mathrm{N}_1\times(2c+1)$ <

·2 $\mathrm{D}(m,2c)=1 . a^m-b^m \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1\times(2c+1) .\supset. a-b \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1\times(2c+1)$

·3 $m \,\varepsilon\, \mathrm{Np} .\supset. \mathrm{N}_1\frown(a^m-b^m)/\mathrm{N}_1 \supset [\mathrm{N}_1\frown(a-b)/\mathrm{N}_1]\cup(\mathrm{N}_1\times m+1)$ <

·4 ——— $.\supset. \mathrm{N}_1\frown(2^m-1)/\mathrm{N}_1 \supset \mathrm{N}_0\times m+1$ <

{346·1-·6, 347·1-·4, EULER, *Theor. circa div. numerorum*, N. C. Petr. I, a. 1747-48, p. 20} <

348. $q \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1 . 4q+3, 8q+7 \,\varepsilon\, \mathrm{Np} .\supset. 2^{4q+3}-1 \,\varepsilon\, (8q+7)\mathrm{N}_1$ <

{LUCAS, *Atti Accad. d. Sc. di Torino*, a. 1878, t. 13, p. 283} <

351·1 $u \,\varepsilon\, \mathrm{Cls'N}_0 . \mathrm{num}\, u \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1 .\supset.$

$\Sigma u = \iota\, x\ni[f \,\varepsilon\, (u \mathbin{f} 1\cdots\mathrm{num}\, u)\mathrm{rep} .\supset_f. x=\Sigma(f, 1\cdots\mathrm{num}\, u)]$ Df

{ Ex. P352·6*a* }

$\cdot 2$ Hyp P$\cdot 1$ $.\supset.$ $\Pi u = (\Pi \mid \Sigma)Df\cdot 1$ { Ex. P352$\cdot 7a$ } Df

$\cdot 3$ $u \varepsilon \mathrm{Cls}'\mathrm{N}_0 . \mathrm{num}(u - \iota 0) \varepsilon \mathrm{N}_1 .\supset. \Sigma u = \Sigma(u - \iota 0)$ Df

$\cdot 4$ ——————1—————— $\Pi u = \Pi(u - \iota 1)$ Df

$\cdot 5$ Hyp P$\cdot 3$ $.\supset.$ $\Sigma u = \Sigma(\omega, u)$: Hyp P$\cdot 4$ $.\supset.$ $\Pi u = \Pi(\omega, u)$ Df?

352$\cdot$3, 2.e ligne. Au lieu de $a\upharpoonleft$ lisez $2\upharpoonleft$. Ajoutez:

{P$\cdot$2$\cdot$3 LEGENDRE a. 1797 p. 8}

352$\cdot$4 $u \varepsilon \mathrm{Cls}'\mathrm{N}_1 . \exists u .\supset. \mathrm{Dvr}u = \Pi\{[x\upharpoonleft \min \mathrm{mp}(x,u)] \mid x, \mathrm{Np}\}$ ⊧

$\cdot 5$ ———. $\mathrm{num}u \varepsilon \mathrm{N}_1 .\supset. \mathrm{m}u =$———max————————

$\cdot 6$ $\Sigma(\mathrm{N}_1 \frown a/\mathrm{N}_1) = \Pi(\{[x\upharpoonleft(\mathrm{mp}(x,a)+1)-1]/(x-1)\} \mid x, \mathrm{Np})$

{ WALLIS J.: *Discours of combinations*, London a. 1685, cap. IV, 1 }

$\cdot 7$ $\Pi(\mathrm{N}_1 \frown a/\mathrm{N}_1)^2 = a\upharpoonleft \mathrm{num}(\mathrm{N}_1 \frown a/\mathrm{N}_1)$ ⊧

354$\cdot$6 Au lieu de Σ lisez Π.

380$\cdot 1'$ $\mathrm{E}x = \imath\, \mathrm{n} \frown z \ni (x \leq z < x+1)$

$\cdot 1''$ $\mathrm{E}x = \imath\, \mathrm{n} \frown \{x - [(\mathrm{R} \smile \iota 0) \frown (1 - \mathrm{R})]\}$ $<$

380$\cdot$3 Au lieu de $0<$ lisez $0\leq$

380$\cdot$9 $x - = 0 .\supset. \mathrm{E}[(\mathrm{E}x)/x] - 1 = \mathrm{E}x + \mathrm{E}(-x)$ $<$

384. $a,b \varepsilon \mathrm{N}_1 .\supset. \mathrm{D}(a,b) = b + \Sigma_1^b \mathrm{E}(ah/b) \mid h + \Sigma_1^b \mathrm{E}(-ah/b) \mid h$ $<$

390$\cdot$8 $a,b \varepsilon \mathrm{N}_1 .\supset. \mathrm{rest}(a,b) = b \times \Theta(a/b)$ Df?

391. { BERTRAND *Aritmetica*, a.1862 p.139 }

Les P391-395, qui ne contiennent pas le signe Θ, doivent venir après la 383.

396. $m,n \varepsilon \mathrm{N}_1 . a \varepsilon \mathrm{Np} .\supset.$

$\cdot 1$ $\mathrm{C}(m,n) \varepsilon \mathrm{C}[\mathrm{E}(m/a), \mathrm{E}(n/a)] \times \mathrm{C}[a\Theta(m/a), a\Theta(n/a)] + \mathrm{N}_1 \times a$ $<$

$\cdot 2$ $\mathrm{C}(m,n) \varepsilon \Pi\{\mathrm{C}[a\,\Theta(m/a^r), a\,\Theta(n/a^r)] \mid r, \mathrm{N}_1\} + \mathrm{N}_1 \times a$ $<$

{396$\cdot$1$\cdot$2, LUCAS, *Amer. Journ.*, a. 1878, t. 1, p. 230} $<$

Sul § 2 del Formulario, t. II: Aritmetica

Il § 2, ultimamente pubblicato, contiene le proposizioni e dimostrazioni relative all'Aritmetica, già ridotte in simboli in lavori precedenti, insieme alle aggiunte proposte dai varii Collaboratori (vedi pag. VIII), e alle nuove proposizioni, ridotte in simboli in occasione di questa stampa, e che non portano sigle. Nel § 2 è solo contenuta la teoria dei numeri razionali. Quella degli irrazionali, e le successive, sono in corso di stampa.

Si sono dovute vincere molte difficoltà, di vario genere, affinchè questo F_2§2 potesse raggiungere il suo scopo; cioè riunire e coordinare il molto materiale, già contenuto in lavori precedenti, relativo alle teorie che formano oggetto del nuovo §; ordinare il tutto in modo da riuscirne facile la ricerca, e con una legge indipendente da ogni opinione personale, e da ogni abitudine invalsa; correggerlo e completarlo. Inoltre si doveva fare in modo da rendere facili le aggiunte e correzioni, le quali vanno completando e perfezionando il Formulario; e che in una prossima edizione (tomo III del Form.) non vada perduto il grande lavoro fatto nella correzione tipografica.

Le notazioni di Logica matematica furono ideate in modo da non presentare difficoltà tipografiche. Invero formule siffatte furono già stampate nelle più svariate tipografie di Torino, Milano, Roma, Napoli, Palermo, in Francia, Spagna, Germania, Russia, America, ecc. Ma per stampare un libro di pure formule, si è reso necessario un materiale tipografico apposito. Nel provvedere questo materiale si è cercato di riunire la chiarezza delle formule colla facilità della composizione. Si è fissata ad es. la lunghezza dei segni

$$= \quad > \quad \supset \quad + \quad - \quad \times \quad / \quad \upharpoonleft \quad \downharpoonright$$

proporzionale ai numeri

$$10 \quad 10 \quad 10 \quad 8 \quad 8 \quad 6 \quad 6 \quad 4 \quad 4$$

che le misurano in punti tipografici; queste dimensioni aiutano a leggere naturalmente le formule secondo le comuni convenzioni sulla soppressione delle parentesi. Si sono soppresse tutte le complicazioni non necessarie, ma dannose che alcuni A. amano introdurre nelle formule matematiche.

Le varie notazioni in uso sono riportate nelle note al Formulario, adottandone la più semplice. Si è introdotto un segno nuovo, per indicare la potenza, pure conservando l'usuale notazione dell'esponente in alto, quando esso ha una forma semplice; ma si usa il nuovo segno quando l'esponente ha una forma complicata. In conseguenza le formule di Matematica possono essere scritte, senza eccezioni, mediante segni seguentisi sullo stesso rigo; quantunque ciò non sia costantemente fatto nel F, onde non scostarci troppo dall'uso comune. Senza questa convenzione, siccome nel F si incontrano formule comunque complicate, gli esponenti possono portare altri esponenti, linee di divisione, indici, radicali, e così via; sicchè si aumenta indefinitamente il numero dei corpi tipografici, arrivando ben presto ai microscopici, senza che vi sia alcuna ragione per cui ciò che sta all'esponente sia meno leggibile di ciò che sta alla base.

Queste semplificazioni, per cui le formule si compongono come il testo ordinario, saranno molto apprezzate da chi ha qualche conoscenza dell'arte tipografica; alcune furono già accettate, e altre lo saranno da chi dovrà stampare a proprie spese un libro contenente molte formule.

Siccome le numerose e continue aggiunte rendono inapplicabile la stereotipia al F, finora si è deciso di conservarne la composizione, onde poterlo ristampare coi perfezionamenti, senza pericolo di nuovi errori.

Come si è già fatto pel §1 (RdM t. VI, pag. 48-52), anche qui è necessario dare la corrispondenza fra le P dei lavori precedenti e quelle del nuovo § 2, dando le ragioni delle modificazioni e soppressioni fatte. Queste ragioni saranno date un po' sommariamente, a causa del lungo cammino fatto da F_1 ad F_2.

Il segno « a » dopo il numero d'una P indica che occorre cercarla nelle aggiunte pubblicate in questo stesso fascicolo.

Confronto degli « *Arithmetices principia, nova methodo exposita* » a. 1889, con F_2 §2.

Il primo lavoro, che continuo ad indicare colla sigla ϖ, comincia la numerazione dall'unità invece che dallo 0, come in F. Fatto questo cambiamento, si ha che le P

1	6	7	8	9	di ϖ §1 diventano le
002·1	·2	·3	·4	·5	di F_2 §2.

Le 2, 3, 4, 5 di ϖ già furono enunciate nella logica F_2 §1 P81-84. Veramente la nuova Pp 002·3 è un po' meno restrittiva della antica 7; e precisamente le antiche P 7, 16 e 16′ valgono le nuove 003·5 003·2 002·3.

L'antica P10 ha dato luogo alla nuova 010.

Le P11, 12, 13, 14, 15, 17, trasformazioni logiche delle precedenti, si sono soppresse.

Le antiche	18	19	20	22	23	25	27
valgono le nuove	011·2	·3	012·3	·2	·4	·1	·5.

Le 21, 26, 28 si sono soppresse, causa la semplicità.

Le 24 e 24′ si sono incorporate nella dimostrazione della 012·1.

In ϖ §2 le P:

1	2	3	5	6	7	8	9	10	11

sono diventate con qualche perfezionamento, le

021·1	150·1	·2	·1	021·3	·4	022·4	023·1	·7	·6

14	15	16	17	18	20, 21	22	23
151·2	·1	·3	152·2a	150·5	151·5	·6	·4

Soppresse le 4, 12, 13 19 perchè perdono importanza nelle trasformazioni fatte.

Le P di ϖ §3

	1	2	3	4
diventano	220·1	·1′	·6″ a	·6‴ a

La 5, di minore importanza, si è tralasciata.

Corrispondenza fra ϖ §4 ed F_2:

1	2	3	4	5	7	8	10	11, 12	13	15
041·22	·2	·3	043·2	041·23	043·4	·1	046	160·1	·2	043·5

Le 6, 9, 14 si sono tralasciate. Le antiche dimostrazioni si sono sostituite con quelle comparse in $\mathfrak{P}$, ove si fa uso delle funzioni.

Le P di ϖ §5

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
diventano	080·21	·2	·3	·22	081·1	·2	·3	173·1	·2.

Nel §6 di ϖ si erano introdotte le notazioni $a \supset b$ $b \subset a$ $a \pi b$ per indicare rispettivamente le relazioni « a divide b » « b è divisibile per a » « a è primo con b ». Ma già nel tomo I di F, e ora nel tomo II, si sono soppresse queste notazioni (quantunque sia stretta la analogia dei segni $\supset$ e $\subset$ coi $>$ e $<$), potendosi le due prime esprimere coi simboli precedenti sotto la forma $b \varepsilon N_1 \times a$, e la terza come è scritto in F_2 §2 P310 nota.

In conseguenza si sono soppresse le antiche P 2, 3, 5, 6, 7, 11, 14, 15, 22, 24, 31, 32; come pure, perchè poco importanti, le 8, 9. Le altre sono riportate come segue:

1	4	10	12	13	16	17	18	19	20	21	23
050·1	330	050·4	·6	·5	052·4	050·3	053·1	·7	·5	097	045·3

25	26	27	28	29, 30	33	34	35	36	37
055·1a	·2a	045·4	·5	049·993a	311·0	313·1	310·2	311·5	311·6

Le P1-24 del §7 di ϖ si sono trasformate ordinatamente nelle:

085·8, 045·9, ·9′, ·91, 313·3, ·31a, 093·1, 333, 340·1, 342·1, 319·9, 311·6, 334, 337·1, 311·12, ·13, ·15, ·11, 322·1, 323·2, 321·5, 338·3, 339, 337·30.

Nel §8 di ɤ le P corrispondono alle nuove

1	2	3	4	5	6, 7	8, 10	9	11
054	062·1	060	050·6	062·2	062·3	313·34a	·35a	061·6, ·7

12, 12′, 13, 13′, 14	15	18	19, 20	21	22	23	24
064·9a	062·4	068·10	161·2	162·5	·4	·6	·3

25, 26, 27	28, 29	30	31	32	33	34	35
164·2	163·5·6·2·4	061·2	067·1	061·3	061·4	062·10	063·0

36	37	38	39	40	41
067·3	·2	062·22	064·0	062·24	065·1

Le proposizioni dei § 9 e 10 di ɤ trattano degli irrazionali. Esse saranno riprodotte nel § 3.

Nello scritto « Sul concetto di numero, a. 1891 » indicato nel Form. col segno ℨ, introdotto nel § 1 il concetto di funzione, ora contenuto in F_2 §1 P500 e segg., lo applicai a semplificare alcune proposizioni, e ad enunciarne delle nuove. Eccone la corrispondenza con F_2:

ℨ §2	P1-10	§3	P1-3	4-6, 8	7	9
F_2§2	P002·1-·5, 003·1-·8		014·1-·3	017	016·2	012·1

§4	P1-3	7	4	5	6	8	9, 10	11	§5	P1	2
	150·1-·3	·5	151·2	·1	·3	·4	·5	·6		014·1	011·1

Le altre P di ℨ §5 trattano dell'inversione; già furono riportate in F_1I, e ne abbiamo parlato in F_2 §1.

In ℨ §6 si introducono i numeri negativi; ma questa trattazione si è cambiata in F_2, onde non far uso dell'inversione.

ℨ §6	P1	1′	2	3	4	5	6	7	8
F_2§2	P041·0	·0′	·3	043·1	·4	042	043·6	080·0	·3

9	10	11
081·1	·3	·2

La P di ℨ §8 diventa la 050·1.

ℨ §9 P	1	2	3	4	5	7	10
F_2§2	P200·1	·2	201·1	202	200·4	200·3	100·0

Le antiche P6, 6′ trovansi in F_2 §1 P461 e 462; la 11 è diventata la 520 di F_2 §1.

Le antiche P8 e 9 sono soppresse, a causa delle nuove P210 più generali.

ℨ §10 P	1	3	4	5	6	7
F_2§2	P053·2	060·0′, 071	064·9a	061·1	·2	·3

Il §11 di ℨ si occupa dei numeri reali Q e q; le P ivi contenute saranno riprodotte nel prossimo fascicolo del F. Sicchè quanto è contenuto nei miei lavori ɤ e ℨ è riportato in F_2, salvo gli ultimi § in corso di stampa.

Confronto del « Formulaire de Mathématiques »,
t. I, parti II, III, V e VI con F_2 §2.

F_1II§1	P1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F_2 §2	P011·3	012·2	·1	·3, ·4	011·1	038·1	·7	·2	·4	·8	·5

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
·3, ·6	·10	·11	021·3	022·4	021·8	023·2	·5	·7	150·3	·1, ·2

23	24	25	26, 27	31	32	33	34, 35	36	37
151·2	·1	·3	·12	038·18	·13	·14	063·7	020·2	072·1

41, 42, 43	44	45	51	52	53	54	55	56	58
190	191·3	·2	100·1·2	101·22·23	·12	·31	194·1	100·3	101.21

Le antiche P28, 29, 30 si sono soppresse, poichè semplici. Nel passaggio dalla P51 alla nuova 100 si è sostituito alla notazione del Dedekind la nuova per le ragioni ivi addotte in F_2. In conseguenza sparisce la P57.

F_1II§2	P1	2	3	4	5	6	7	8	9	10, 11
F_2 §2	P041·3	·0′	·1	·22	048·2	043·4	043·5·6	·1	046	043·7

12, 13	14	15, 16	17	18, 19, 20	21-24	25
049·91a	045·1	160·1, 160′a	191·4	048·3, 164·8a	065·31-·34	074·1

26	27	28	29	30	31	32	33	34	36
052·4	051·8	053·6	062·3	·10	193·5	063·21	·22	071·51a	062·6

37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
·12	066·1·2	062·13	·8	·9	·14	121·22	·12	·31	103·2

47	48
121·51	194·2.

Alcune formule hanno subito trasformazioni, quali le 19 e 20, e quelle contenenti il segno Π, cioè le 43 e segg. La P35 si è soppressa, causa la semplicità.

F_1II§3	P1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_2 §2	P080·3	·22	·23	·21	098·1	080·1	081·1	·3	·2	098·2

11	12, 13, 14	15	16, 17	18
096·4	193·6, ·7a	173·1	·2	125.

F_1II§4	P1	2	3	4, 5	6	7	8	9	10
F_2 §2	P043·3	047	095·1	082·1	095·2	·3	083·11	049·8	·9

11	12	13	21	22	23	24	25	26	27	28
095·7	·4	·5	·10	082·2	083·1	·12	·13	095·11	·12	·13

29, 34, 35	30	31	32	33	36	40	41	42	43
·14	095·5	083·13	·14	095·16	·17	·20	082·3	083·16	·17

44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
095·25	·26	·27	·30	·21	·32	·33	·34	·35	083·3	095·28	083·18

56	57	58	59	60	61	62	63
095·31	·20′a	·20″a	·22	·23	·40	083·4	·5

F_1II§5	P2	3	4	11	12	13	14	15	16	17
F_2 §2	P160·3	170·1	·7	171·1	·2	174·1	·2	171·6,·9	·15	·7

18	19	20	21	22	23	24	25	26
·12	·11	·8,·14	·4	·17	171·19	162·1	·3	·2

Le P di F_1 II §6 e §7 saranno contenute in F_2 §3.

F_1II§8	P1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F_2 §2	P021·4	074·1	·2	·3	·4	075·1	·2	·5	·6	·3	·4

Le seguenti saranno contenute in F_2 §3; come pure quelle di F_1II§9

F_1II§10	P1, 2	3	5-9	10	11	12	13	14	15
F_2 §2	P113	244	114·1	104·4	·5	130	104·3	·2	181·1

17	20
080·1	081·3

Delle P contenute nelle aggiunte a F_1II (pag. 117) si ha la corrispondenza:

F_1II§2	P42′	§4	P14-39	52′	60′	66	67
F_2 §2	P062·2		soppresse	095·36	083·2	·6	·7

§10	P25	26	27, 28	29
	115·2	180·3	·4a	·2

Alcune P tralasciate troveranno il loro posto in altre teorie.

F_1III§1	P6	7	8	20	21, 22	23, 24	25, 26	27	28, 29
F_2 §2	P045·3	·4,·5	·6	·8	·9	·91	093·1	094	085·1

30	31	32	33	34
240·1	·2′	·3′	·4	020·3

Le P1-5 e 10-15 si sono soppresse, perchè semplici, ovvero riferentesi alla teorie delle congruenze, che non ha ancora trovato posto in F_2.

F_1III§2	P1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F_2 §2	P300·0	·2	·3	·10	302·1	·2	·3	·4	·6	300·4	302·7

12	13	14	15	16	17
·8	·8′a	300·5	·6	·9	·7.

Sono soppresse le P18-20.

F_1III§3	P1	2, 5	6	7	8	8′	9	10	10′	13	14
F_2 §2	P311·2	·3	·4	311·1	·4	·3	·5	·6	·8	·7	313·32a

15	16	17	18	19	19′	21
·33a	·5	311·9	·11	·13	·14	·15

Fra le P soppresse menzioneremo le Def P3 e 4, di cui non si è più fatto uso, modificando alquanto alcune P successive. Potrebbero essere utili in altre teorie.

F_1III§4	P1	2, 3	4	5	6	8	9, 10	11	12
F_2 §2	P321·2	·3	·4	323·2	·1	321·5	322·4	321·7	323·5

F_1III§5	P1	2	3, 4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_2 §2	P330	331	333	340·1	342·1	·2	·3	334	337·1	·2	·30

13	16	17	18	19	20	21	24	25	41	42
341·1	339	338·2	·3	350·1	·2·3	·4	·5	341·2	352·1	350·5

43	44
352·6a	·7a.

F_1III§6	P1	3	4	5	11, 12	13	14	17	18	20	21
F_2 §2	P352·2	350·6	352·5a	·3	353·1	·2	·3	354·4	·3	·5	·6

Nelle agg. a F_1III (pag. 118) le		§1 P27′	§3 P8″	§5 P1′	§6 P3
sono diventate	F_2§2	P093·3	313·3a	330	350·6

F_1V§1	P1	2	3	4	5	6	7	8	11
F_2 §2	P200·1	·2	·3	203·1	·2a	204a	201·1	·2	·3

Le P9 e 10 sono già contenute in F_2§1. Le P12-16 sono contenute nella P210.

F_1V§2	P1	2	3	4	5	6	7	10	11	12
F_2 §2	P220·1	·1′	227	220·7′a	·7a	223·7a	·7′a	220·6	·6′	222

13	14, 15	16
222′	223·9	224

I successivi § di F_1V saranno pubblicati in seguito.

Si sono pure riportate alcune delle P di F_1VI, sulla teoria degli aggregati, raccolte dal prof. VIVANTI.

Delle due notazioni ∞ e Nc, dovute rispettivamente al Cantor ed al Vivanti, si è conservata solo la seconda, perchè più semplice. In conseguenza l'antica P1 del §1 diventa la nuova 210·1.

Le 2, 3, 4 si trasformano in altre già enunciate in Logica. La 5 diventa la 211·1; le antiche 6, 7, 10, 11 si trasformano nelle nuove 210·2 ·9 ·5 ·6, Le 8, 9, 12 e successive racchiudono le idee di numero algebrico, q, q′, ... non ancora definite in F_2.

In F_1 VI §2 la P1 diventa la nuova 210·1. La P2 si potrà rimettere quando se ne continui la teoria. Ma le successive definizioni non sodisfano alle leggi delle definizioni simboliche.

Così la P3

$$u\,, v\, \varepsilon\, \mathrm{K} \,.\, u \frown v = \Lambda \,.\, \supset .\, \mathrm{Nc}`u + \mathrm{Nc}`v = \mathrm{Nc}`(u + v)$$

che è vera, non si può assumere come definizione della somma di due numeri cardinali; perchè dovrebbe avere la forma « Somma di due numeri cardinali = funzione nota di essi ». Bisognerebbe ridurla ad es. alla forma:

$$a\,, b\, \varepsilon\, \mathrm{Nc} \,.\, \supset .\, a + b = \imath\, z\, \varepsilon\, [u\,, v\, \varepsilon\, \mathrm{Cls} \,.\, -\exists\, u \frown v \,.\, \mathrm{Nc}`u = a \,.\, \mathrm{Nc}`v = b \,.\, \supset_{u,v} .\; z = \mathrm{Nc}`\,(u \smile v)]$$

cioè « dicesi somma dei due numeri cardinali a e b il valore costante dell'espressione $\mathrm{Nc}`(u \smile v)$, ove u e v sono classi qualunque, non aventi individui comuni, ed aventi per numeri cardinali rispettivamente a e b ».

Parimenti la P7 contiene non solo nel primo membro dell'eguaglianza, ma anche nel secondo, un segno non noto; cosa del resto ben avvertita dall'A. in RdM, a. 1894, p. 136.

In conseguenza, queste P e le successive non possono essere riportate nel Formulario, finchè qualcuno non le abbia riordinate, dando definizioni puramente simboliche, e non aventi bisogno del linguaggio ordinario per essere intese.

L'ordinamento del migliaio di P contenute nel F portò pure un lavoro lungo, che si è dovuto rifare più volte. I termini « Aritmetica, Algebra, Teoria dei numeri », non esprimono punto scienze con confini nettamente definiti. Chi fa cominciare l'Algebra coll'uso delle lettere chi coi numeri negativi. Da nazione a nazione questi termini cambiano affatto significato; e in una nazione stessa i varii A. attribuiscono loro senso differente. Ciò che si chiama « ordine logico » non è spesso che una abitudine più o meno invalsa. Per rendere il Formulario indipendente da ogni arbitrio personale, si sono raggruppate le P a seconda dei segni che le compongono (F_2 §2 pag. VIII).

I segni si seguono in un ordine tale che ogni segno, eccettuati i primitivi, sia definito mediante i precedenti. Ciò non vuol dire che ogni segno debba seguire immediatamente quelli mediante cui vien definito; cioè questa legge non basta a ordinare tutti i segni. Ad es. dopo il gruppo di idee primitive 0 N_0 + (P001–019) si può passare, come si è fatto, agli N_1 (P020) o al − (P021), come pure al × (P041), ai $\cdots$ e Σ (P100 e segg.), al > (P150), al num (P200); poichè ognuno di questi segni è definito mediante i primi.

Si è cercato di comporre il Formulario in modo che si possa leggere in tutti gli ordini legittimi, come si scorge dai titoli delle P.

La numerazione delle P che era progressiva, con lacune, nel § 1, qui si è fatta parte progressiva, e parte decimale, il che rende più facile l'interpolazione di formule. Tuttavia essa è ancora incomoda assai nei rimaneggiamenti di formule che si sono dovuti fare; poichè ognuno di essi richiede la correzione attenta di tutte le citazioni. In una futura pubblicazione si tenterà un sistema più comodo.

Le indicazioni storiche sia sulle proposizioni, come sulle notazioni, utili sempre, sono utilissime nel Formulario, perchè riposano un po' il lettore, e manifestano meglio l'importanza delle proposizioni, e spesso il vantaggio della ideografia. Ma anch'esse richiedono molto lavoro per poter avere un qualche valore. Le indicazioni che trovansi nei libri delle generazioni passate, e ancora in qualche libro moderno, secondo cui p. e. l'Algebra è dovuta a Des Cartes, o a Viète, o ai matematici italiani del secolo XIII, o agli arabi, o agli indiani, o ai greci, non hanno alcuna precisione. Nè l'ha ad es. l'affermazione più precisa che l'uso delle lettere sia dovuto a Viète, trovandosi esse in Aristotele, e di uso comune in Euclide, come risulta dalle citazioni contenute nel F.

Nè possono essere utili per noi indicazioni della forma: « Il segno + è dovuto a Leonardo da Vinci ». L'esame d'una frase siffatta importa un lunghissimo lavoro; da cui risulta che effettivamente il segno + fu usato da questo scienziato per indicare la cifra 4; e l'attribuire a questi l'uso del segno + vale quanto attribuirlo al primo abitante delle caverne che abbia incisa una croce. Simile è la citazione di Widman.

Le indicazioni poi che portano con precisione il nome dell'Autore, e la pagina del libro citato, passando per più mani, a causa degli errori materiali accumulati, spesso sono inesatte; e invano si cerca al posto indicato il passo in questione. Altre volte lo si trova, ma ha senso ben diverso da quello che gli attribuiva lo storico.

In conseguenza si è dovuto rimontare all'origine dei passi citati; le citazioni del F portano le indicazioni precise, in modo che chiunque possa facilmente confrontare il libro citato; e spesso si riporta il passo citato. Ciò finchè fu possibile; perchè anche nel F alcune citazioni attendono di essere meglio precisate.

Si badi poi che le indicazioni storiche contenute nel F non pretendono punto di rimontare alla prima origine della P in questione; ma solo di indicare un A. ove essa si trova. Uno studio ulteriore potrà sempre sostituire ad esse altre citazioni relative ad epoca più antica. Del resto qui si è fatto uso delle ricerche storiche di M. Marie, M. Cantor, di quelle contenute nell'*Intermédiaire des Mathématiciens*, ed in varii altri lavori stati menzionati.

Il Formulario d'Aritmetica, nello stato attuale, contiene già l'analisi completa delle idee d'Aritmetica. Ogni segno è posto eguale per definizione, ad un gruppo di simboli precedentemente definiti; e ciò finchè si arriva alle idee primitive. Questa analisi che io ho fatta in massima parte nel citato lavoro del 1889, è ciò che differenzia nella forma e nella sostanza questo F dagli altri libri. Alcuni di questi studii già furono introdotti in trattati scolastici, quali:

C. Burali-Forti e A. Ramorino, *Aritmetica*, Torino 1898

P. Gazzaniga, *Libro di Aritmetica e di Algebra elementare*, Padova, a. 1897

M. Nassò, *Algebra elementare*, Torino 1898

ma le proposizioni, private della loro forma simbolica perdono assai della loro chiarezza e ragione d'essere; sicchè non sempre il lettore rimane convinto che questa via sia migliore di altre. Lasciando in disparte i trattati mal fatti, su cui ben parlò il prof. Ciamberlini al Congresso della Società «Mathesis» (Periodico di Matematica, a. 1898, p. 37), molti A. cominciano l'aritmetica con definizioni che hanno la forma di circoli viziosi.

Così la Df

«Numerare oggetti significa considerarli come omogenei, insieme raccoglierli, e ad essi singoli far corrispondere altri oggetti che si considerano anche come omogenei»;

traduzione letterale di quella con cui comincia l' «Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, a. 1898, p. 1», e a cui l'A. si arresta dopo l'esame di molte definizioni del numero, non è che un accozzamento di parole. Invero con essa sarebbe definito il «Zählen» quando fossero precedentemente definiti i termini «gleichartig, ansehen, auffassen, zuordnen, ...», i quali ad un lettore possono riuscire più complicati del termine che si vuol definire; e ciò si può dimostrare con argomenti tratti dalla filologia, dalla storia delle civiltà e dalla pedagogia.

Insomma, trattandosi di termini che si incontrano nel linguaggio comune, affinchè una definizione possa avere un qualche valore, è necessario che prima sia costrutta una tabella di parole, delle quali si suppone noto il significato, e poi che la definizione, oltre al termine che si vuol definire, non contenga che termini di quella tabella. Ma chi fa questo lavoro, ricostruisce la Logica matematica.

L'analisi delle idee d'Aritmetica contenute in F_2 §2 è l'unica che esista attualmente. Per quel gruppo di proposizioni 002·1–·5, che si potrebbero chiamare definizione del numero intero positivo, usando la parola definizione in un significato più ampio di quello dato in F_2§1P7, il lavoro più prossimo è quello del Dedekind, a. 1888, di cui nel Formulario, pag. 3 si sono riportati i passi più importanti, in guisa da

formare un testo intelligibile di per sè. Già vi appare un principio di Logica matematica, coi segni di deduzione e moltiplicazione logica fra classi, usati sotto forma speciale. Ma vi mancano tutti gli altri segni di Logica matematica che costituiscono un'ideografia completa.

La composizione del mio lavoro a. 1889 fu ancora indipendente dallo scritto menzionato del Dedekind; prima della stampa, ebbi la prova morale dell'indipendenza delle proposizioni primitive da cui io partivo, nella loro coincidenza sostanziale colle definizioni del Dedekind. In seguito riuscii a dimostrarne l'indipendenza.

I così detti numeri negativi ed i fratti sono definiti come operazioni, sottrarre e dividere; essi rimontano così alla più remota antichità, e rappresentano bene l'uso che di essi facciamo; la teoria ne risulta molto semplice. Così sono considerati in varii trattati, in modo più o meno chiaro.

Altri A. invece nell'introduzione di questi enti rasentano l'assurdo. Invero, avendo ancora la parola «numero» il significato di «numero naturale» o N_1, se per 3–5, o per 3/5 si definisce quel numero che sommato con 5, o moltiplicato per 5, dà 3, si deve rispondere che tal numero non esiste. Nè se ne può ammettere l'esistenza per postulato, come alcuno fa, essendo tal postulato una proposizione falsa.

Nè vale l'aggiungere «esso non esiste; ma per ovviare a siffatto inconveniente, e per la generalità delle operazioni, noi lo creeremo». Queste parole, di veste troppo diversa da quella consueta nelle scienze matematiche, portano a conchiudere che si può far esistere ciò che non esiste; e quindi a togliere ogni distinzione fra il sì e il no, fra il vero e il falso. Queste difficoltà in cui si sono imbattuti alcuni Autori credo provengano dalla terminologia non precisa, come l'uso non fisso della parola *numero*, che, seguita da aggettivi, acquista un significato più ampio.

Il Formulario ha indirizzo puramente scientifico. I risultati nuovi contenuti in esso non sono già i teoremi, dovuti ad Autori spesso antichissimi, ma lo studio della loro dipendenza; l'affermazione e la prova che una determinata idea si possa, o non si possa definire, che una data proposizione si possa dimostrare o meno, e la raccolta delle varie definizioni, dimostrazioni e teorie possibili, è ciò che contiene di nuovo il F; e alla soluzione di questi problemi è necessaria la Logica matematica quale qui fu costrutta, o uno strumento equivalente da costruirsi.

I risultati che così si ottengono sono tanto importanti dal lato teorico quanto la scoperta d'ogni altra verità matematica. Essi sono poi direttamente utili alla pratica; perchè è utile, e direi doveroso per gli insegnanti il sapere a che punto si è arrivati con questo strumento analitico, ancorchè non lo si voglia introdurre nella scuola.

Del resto quest'anno mi sono deciso ad introdurre il nuovo F nell'insegnamento superiore, con ottimi risultati. Ho visto gli allievi interessarsi vivamente alla precisione e chiarezza della scrittura ideografica, apprendendola assai più facilmente di quanto mi sarei immaginato. Essi invero per apprendere ciò, hanno dovuto fare molto minor fatica di quella che dovemmo fare noi.

Ma si può tener conto di questi studii anche nell'insegnamento secondario ed elementare, col sopprimere tutte quelle definizioni di numero, e di somma, che sono pure parole; questa soppressione, e semplificazione dell'insegnamento già è stata proposta per ragioni didattiche da alcuni, eseguita da lungo tempo da altri; pur tuttavia ricompaiono in qualche libro. Da alcuni anni meditavo come si potrebbe compilare un libro di Aritmetica elementare, che seguisse fedelmente il mio lavoro del 1889; mi accorsi che nelle linee generali questo libro coincideva coll'*Aritmetica* che il prof. Gerbaldi aveva pubblicato, seguendo essenzialmente ragioni didattiche.

Il Formul. § 2 potrebbe forse essere usato nelle scuole liceali come libro di consultazione, quali tavole di logaritmi. A un professore che ne manifestò desiderio, ottenni che le copie siano cedute al puro prezzo di costo. Credo poi che queste teorie siano già sufficientemente mature perchè si possa fare un trattato d'Aritmetica e d'Algebra ad uso delle scuole secondarie, introducendo e facendo uso costante della Logica matematica.

Se questo formulario di Aritmetica in una prima lettura si presenta come una abbondante raccolta di teoremi, dimostrazioni, teorie e note storiche, ogni lettore più attento vi scorgerà lacune numerose e gravi.

Ad es. mentre di tutti i segni introdotti è data la definizione simbolica, cosa che non era ancor fatta in F_1, le dimostrazioni spesso mancano.

Il colmare queste lacune non spetta a me, editore di questa pubblicazione, assorto in conseguenza in svariati affari, e desideroso di andare avanti, onde raccogliere le numerose teorie cui si è già applicato lo stesso metodo analitico, ed applicarlo ad altre. Nè spetta ai Collaboratori che volonterosi mi aiutano in questa impresa, ma che sono ancora pochi. Spetta invece ai tanti studiosi della Matematica, che trovansi dovunque, e numerosi in Italia, i quali potrebbero portare un utilissimo contributo al perfezionamento del Formulario.

Fra le lacune più appariscenti, menzionerò le dimostrazioni alle teorie del Dvr (P310) e mlt (P320). Queste dimostrazioni sono pregevoli alcune per la loro remota antichità, altre, recenti, per la loro semplicità.

Le definizioni e teoremi sui Dvr e mlt si possono estendere ai numeri razionali, come trovasi ad es, nell'Aritmetica del Bertrand; questa estensione può essere fatta con cura da qualche cooperatore.

La teoria dei Np (P330 e segg.) è un aggruppamento di alcune proposizioni; essa è quasi completamente a scrivere. L'analisi indeterminata manca.

La teoria delle operazioni sui numeri espressi in cifre, esige la costruzione d'un simbolismo appropriato onde potersi scrivere. Questa teoria è importante sia per le applicazioni pratiche, che sotto l'aspetto storico.

Sui numeri cardinali (P210) non sono raccolte che poche proposizioni, mentrechè molte più sono note, anche di quelle che possono stare in F_2 §2, cioè che non dipendono dai numeri irrazionali, non ancora stampati. Oltre alla ricca bibliografia contenuta in F_1VI. si confronti: BOREL, *Leçons sur la théorie des fonctions*, a. 1898.

Non sono raccolte le P sul grado e divisibilità dei polinomii, sul loro massimo comun divisore, ecc. Qualche cosa è fatta in F_1IX; ma per sviluppare questa teoria occorrono nuove notazioni; e ritengo che per errore esse trovano posto nell'insegnamento secondario.

Un utile modo di collaborare al Formulario si è di confrontarlo con trattati. Si può usare un trattato qualunque, antico o moderno, e sempre un lettore attento scorge, frammezzo a tante questioni che già sono svolte in F, alcune volte anche meglio, delle altre che in F non sono sufficientemente trattate. Il confronto con libri antichi permette spesso di aggiungere o modificare indicazioni storiche. E ritengo utile il confronto con qualunque siasi trattato, poichè, in Italia specialmente, le condizioni librarie sono così poco floride, che se un A. si decide a pubblicare un libro, lo fa per esporre una qualche sua idea originale. Spesso però il libro, migliore degli altri in alcuni punti, ne è inferiore in altri, sia perchè non havvi autore enciclopedico, sia perchè egli si stanca durante il lavoro. Ciò non avviene nel F, che non deve ubbidire ad alcun programma prefisso, ma pubblica le proposizioni man mano che qualcuno ad esse si interessa, le riunisce e le invia per essere stampate.

I varii giornali di Matematica sono pure una miniera di P da aggiungersi al Formulario, perdute frammezzo ad altre che non hanno i pregi della novità e del rigore.

Sono pure utili le pubblicazioni aventi un indirizzo affine a quello del Formulario; quali:

LASKA, *Sammlung von Formeln, Braunschweig*, a. 1888-9.
HAGEN, *Synopsis der höheren Mathematik,* Berlin, a. 1891-4.
PASCAL, *Repertorio di Matematiche superiori*, Milano a. 1898,

e l'*Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Leipzig a. 1888 di cui è ora uscito il 1° fascicolo.

Chiunque s'interessi di Matematiche può collaborare al F, e se prende la cosa pel giusto verso, avrà una buona occasione di istruzione e di vero divertimento. Se si interessa alle pubblicazioni moderne relative ad un ramo della Matematica, può tenere al corrente di queste il capitolo corrispondente del F. Se preferisce i libri antichi, o di altre civiltà, come l'araba, l'egiziana, la cinese, può fornire utili citazioni al Formulario. Se predilige la storia, essa è ancora a scrivere nel F, nella massima parte dei casi. Se ama il proprio insegnamento, e ad esso solo si dedica, può confrontare la sua lezione col corrispondente Formulario; se alcune volte questo contribuirà a perfezionare la sua lezione, spesso essa servirà a perfezionare il F, mettendone in miglior ordine le P, dandone dimostrazioni mancanti, o semplificandole. Chi ama lo studio individuale, senza libri, ha da costrurre intere teorie. Ma il non far uso di libri è cosa pericolosa: credo che dovunque sia possibile il procurarsene; ad ogni modo se qualche lettore trova difficoltà può rivolgersi direttamente a me, che cercherò di facilitargli la consultazione dei libri desiderati. Già la RdM possiede una ricca biblioteca di libri e giornali, che mette ben volontieri a disposizione dei lettori.

Finora il Formulario è proceduto avanti senza alcun regolamento. Ma, col suo progredire, e coll'aumentare dei collaboratori, affine di rendere il F indipendente, per quanto è possibile, da ogni opinione personale, potrà essere utile il seguente:

SAGGIO DI REGOLAMENTO PEL FORMULARIO.

1. Il Formulario di Matematiche ha per scopo di pubblicare tutte le proposizioni, dimostrazioni e teorie, man mano che esse sono espresse coi simboli ideografici della Logica matematica; come pure le indicazioni storiche relative.
2. Chiunque può proporre nuove proposizioni, sia isolate che formanti una teoria, per farle inserire dapprima nella RdM, e poi nella successiva edizione del Formulario, sempre col nome del proponente, il quale si rende così garante dell'esattezza e dell'importanza della proposizione.
3. Le P a inserirsi nel F debbono essere completamente scritte con simboli ideografici. L'A. può usare quelli prima introdotti; ne può introdurre dei nuovi, per esprimere le idee nuove che si incontrano nella teoria che intrapprende a trattare. In nessun caso può dare ai simboli attuali un significato diverso da quello che ora hanno in F. Chi vuole alterarne il significato, dovrà cambiarne, anche leggermente, la forma.

4. Ogni proposizione riconosciuta inesatta, qualunque sia la causa dell'errore, sarà cancellata; salvo a ristamparla corretta. Una definizione che non soddisfi alle leggi delle definizioni simboliche, o che non sia intelligibile senza l'aiuto del linguaggio comune, o dia luogo ad ambiguità, sarà esclusa dal Formulario, insieme a tutte le P in cui se ne fa uso.
5. La nota storica d'ogni P indica il più antico lavoro in cui chi propone la nota incontrò la P. Una stessa P può portare più indicazioni storiche, corrispondenti a civiltà diverse, ovvero ad A. che successivamente la generalizzarono e la perfezionarono. Altrimenti ogni citazione annulla le posteriori. È bene che le citazioni siano tali da permettere a chiunque di consultare facilmente l'opera originale; i passi citati più importanti si possono anche riportare.
6. Le proposte di modificare la forma dei simboli, o il loro valore, o il loro ordine, pur soddisfacendo alla legge cui quest'ordine deve ubbidire, e tutte quelle proposte che possono contribuire al perfezionamento del F saranno pubblicate nella RdM.
7. Ogni Collaboratore al F avrà l'abbonamento onorario al tomo della RdM e del F in corso di stampa. Inoltre tante copie del fascicolo contenente le P aggiunte, quante sono queste.

G. PEANO.

Ideografia delle frazioni irriducibili

Contributo di ALESSANDRO PADOA *all'*F_2 § 2 (*).

Nell'F_2 § 2 nulla è detto relativamente agli R (numeri razionali positivi) irriducibili; mi propongo di colmare questa lacuna.

Se «$a \varepsilon$R», io rappresento rispettivamente con «nt$a$» e «dt$a$» il numeratore ed il denominatore dell'R irriducibile eguale ad a, leggendo rispettivamente le due nuove notazioni «numeratore di a» e «denominatore di a» senz'altro, poichè le parole «numeratore» e «denominatore» non furono adoperate nell'F § 2.

Definisco le nuove notazioni mediante le P

400. $a\ \varepsilon \mathrm{R} \,.\supset.$ (**)

$\cdot 1.\ \mathrm{nt}a = \min \{\mathrm{N}_1 \cap x \ni [\exists \mathrm{N}_1 \cap y \ni (x/y = a)]\}$ Df

$\cdot 2.\ \mathrm{dt}a = \min \{\mathrm{N}_1 \cap x \ni [\exists \mathrm{N}_1 \cap y \ni (y/x = a)]\}$ Df

cioè:

·1. il «numeratore di a» è il «minimo numero (intero e positivo) x tale che esiste un numero y per cui $x/y=a$»

·2. il «denominatore di a» è il «minimo numero x tale che esiste un numero y per cui $y/x=a$».

Dalle Df enunciate si deducono le P

$\cdot 3.\ \mathrm{nt}a,\ \mathrm{dt}a\ \varepsilon \mathrm{N}_1$ $[\mathrm{P}\cdot 1\cdot 2 \,.\supset.\, \mathrm{P}]$

(*) *Formulaire de Mathématiques* - Tome II - § 2: *Arithmétique* par G. Peano - Turin, 1898.

(**) Alle nuove P assegno provvisoriamente numeri progressivi cominciando dal 400.

L'Hp «$a\varepsilon$R» si sottintende premessa a ciascuna P del gruppo 400 così nell'enunciato simbolico come in quello a parole; analogamente per i seguenti gruppi di P.

$\cdot 4.\ \mathrm{dt}a = \mathrm{nt}(/a)$

$[x, y \varepsilon \mathrm{N}_1 .\ \mathrm{P}64\cdot 35.\ \mathrm{P}62\cdot 23. \supset : y/x = a .=. x/y = /a$ (1)

$\mathrm{Hp}.\ \mathrm{P}64\cdot 31.\ (/a)|a\ \mathrm{P}\cdot 1.\ (1).\ \mathrm{P}\cdot 2. \supset.\ \mathrm{Ths}]$

$\cdot 5.\ \mathrm{nt}a = \mathrm{dt}(/a)$ $[(/a)|a\ \mathrm{P}\cdot 4.\ \mathrm{P}65\cdot 32. \supset.\ \mathrm{P}]$

$\cdot 6.\ \mathrm{nt}a = \min [\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_1 \times a]$ Df?

$[\mathrm{Hp} .\supset.\ \mathrm{N}_1 \times a = x \ni [\exists \mathrm{N}_1 \cap y \ni (x = ya)]$ (1)

$x, y \varepsilon \mathrm{N}_1 . \supset : x = ya .=.\ x/y = a$ (2)

$(1).(2).\ \mathrm{P}\cdot 1. \supset.\ \mathrm{P}]$

$\cdot 7.\ \mathrm{dt}a = \min[\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_1/a]$ Df?

$[\ \mathrm{Hp} .\supset.\ \mathrm{N}_1/a = x \ni [\exists \mathrm{N}_1 \cap y \ni (x = y/a)]$ (1)

$x, y \varepsilon \mathrm{N}_1 .\supset: x = y/a .=.\ y/x = a$ (2)

$(1) . (2) .\mathrm{P}2. \supset.\ \mathrm{P}\ ]$

cioè:

·3. il numeratore ed il denominatore di a sono N_1 (numeri interi positivi)

·4. il denominatore di a è il numeratore del reciproco di a

·5. il numeratore di a è il denominatore del reciproco di a

·6. il numeratore di a è il minimo N_1 multiplo di a

·7. il denominatore di a è il minimo N_1 multiplo del reciproco di a.

Le P·6·7 si potrebbero assumere, invece delle P·1·2, quali Df delle notazioni «nt$a$» e «dt$a$»; da esse si deducono le P

$\cdot 8.\ \mathrm{nt}a = a \times \mathrm{dt}a$

$[\ \mathrm{Hp} .\ \mathrm{P}\cdot 7 .\supset.\ a \times \mathrm{dt}a = a \times \min[\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_1/a] = \min\{[\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_1/a] \times a\} =$

$\min[\mathrm{N}_1 \times a \cap (\mathrm{N}_1/a) \times a] = \min[\mathrm{N}_1 \times a \cap \mathrm{N}_1] = \min[\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_1 \times a]$ (1)

$(1) .\ \mathrm{P}\cdot 6 .\supset.\ \mathrm{P}\ ]$

$\cdot 9.\ \mathrm{dt}a = \mathrm{nt}a/a$ $[= (\mathrm{nt}a)/a]$ $[.=.\ \mathrm{P}\cdot 8]$

$\cdot 10.\ \mathrm{nt}a/\mathrm{dt}a = a$ $[.=.\ \mathrm{P}\cdot 8]$

la cui lettura non presenta alcuna difficoltà.

Le P·5·8 definiscono in due modi diversi la notazione «nt$a$» mediante la notazione «dt$a$»; analogamente le P·4·9 definiscono la notazione «dt$a$» mediante la notazione «nt$a$». Si potrebbe quindi far uso soltanto di una qualunque delle due notazioni «nt$a$» e «dt$a$».

Nella P·9 ho avvertito che «nta/a» significa «(nt$a$)$/a$» e non «nt(a/a)», nel qual caso non avrei ommesso le parentesi.

Dalla P·10 risulta che l'«R irriducibile eguale ad a» è rappresentato con «nt$a$/dt$a$».

Si noti che non si potrebbe rappresentare l'«R irriducibile eguale ad a» anteponendo ad «a» un qualche simbolo funzionale, ad es. «irr», scrivendo ad es. «2/3 = irr(4/6)», invece di «2/3 è l'R irriducibile eguale a 4/6»; e ciò perchè, essendo «4/6 = 2/3», dalla F_2 § 1 P83 $[x = y\ .\ y = z .\supset.\ x = z]$ si dedurrebbe «4/6 = irr (4/6)», contraddicendo la supposta Df della notazione «irr a».

Si noti ancora la P

$\cdot 11.\ \mathrm{D}(\mathrm{nt}a,\ \mathrm{dt}a) = 1$

$[x, y, z\, \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, \mathrm{nt}a = xy \,.\, \mathrm{dt}a = xz \,.\!\supset\!.\ (1) \,.\, (2)$

$\mathrm{P}{\cdot}10 \,.\, \mathrm{P}62{\cdot}3 \,.\!\supset\!.\ a = \mathrm{nt}a/\mathrm{dt}a = xy/xz = y/z$ (1)

$\mathrm{P}{\cdot}1.\ \mathrm{P}220{\cdot}2'.\ (1) \,.\!\supset\!.\ xy \leqq y \,.\!\supset\!.\ x \leqq 1 \,.\!\supset\!.\ x = 1$ (2)

$(2) \,.\!\supset\!.\ \mathrm{N}_1 \frown x \ni [\mathrm{nt}a, \mathrm{dt}a\, \varepsilon \mathrm{N}_1 \times x] = \iota 1$ (3)

$(3) \,.\, \mathrm{P}220{\cdot}3 \,.\, \mathrm{P}311{\cdot}2 \,.\!\supset\!.\ \mathrm{P}]$

cioè: il massimo comun divisore del numeratore e del denominatore di a è 1; ovvero [P310·1 *Note*]: il numeratore ed il denominatore di a sono primi tra loro.

Il procedimento pratico per la determinazione di «nt$a$» e «dt$a$» è indicato dalle P401·1·2

$401.\quad a, b\, \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\!\supset\!.$

$\cdot 1.\ \mathrm{nt}(a/b) = a/\mathrm{D}(a, b)$

$[\mathrm{Hp}.\ x = \mathrm{nt}(a/b) \,.\, y = \mathrm{dt}(a/b) \,.\!\supset\!.\ (1).(2)$

$\mathrm{P}400{\cdot}3{\cdot}10 \,.\!\supset\!.\ x, y\, \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, x/y = a/b \,.\, \mathrm{P}62{\cdot}2 \,.\!\supset\!.\ bx = ay$ (1)

$\mathrm{P}311{\cdot}6 \,.\, (1) .\!\supset\!. x \times \mathrm{D}(a, b) = \mathrm{D}(ax, bx) = \mathrm{D}(ax, ay) = a \times \mathrm{D}(x, y)$ (2)

$(2)\ 400{\cdot}11 \,.\!\supset\!.\ x \times \mathrm{D}(a, b) = a \,.\!\supset\!.\ x = a/\mathrm{D}(a, b) \,.\!\supset\!.\ \mathrm{P}]$

$\cdot 2.\ \mathrm{dt}(a/b) = b/\mathrm{D}(a, b)$

$[(a, b) | (b, a)\ \mathrm{P}{\cdot}1 \,.\, \mathrm{P}62{\cdot}23.\ \mathrm{P}311{\cdot}3.\ \mathrm{P}400{\cdot}4 \,.\!\supset\!.\ \mathrm{P}]$

ovvero: [P400·9. P·1. P62·24·3 $.\!\supset\!.$ $\mathrm{dt}(a/b) = [a/\mathrm{D}(a, b)]/(a/b) = ab/a\mathrm{D}(a, b) = b/\mathrm{D}(a, b)$].

cioè:

il numeratore ed il denominatore di a/b si ottengono dividendo rispettivamente a e b per il massimo loro comun divisore.

Dalle P. 1 . 2 si deduce la P

$\cdot 3.\ \mathrm{D}(a, b) = 1 \,.\!=\!.\, a = \mathrm{nt}(a/b) .\!=\!.\ b = \mathrm{dt}(a/b)$ $[\mathrm{P}{\cdot}1{\cdot}2 \,.\!\supset\!.\ \mathrm{P}]$

cioè: dire che a e b sono primi fra loro equivale a dire che a è il numeratore di a/b ed equivale a dire che b è il denominatore di a/b.

Perciò l'affermazione «a/b è un R irriducibile» si può rappresentare indifferentemente con l'una o con l'altra delle formole «$\mathrm{D}(a, b) = 1$», «$a = \mathrm{nt}(a/b)$», «$b = \mathrm{dt}(a/b)$».

Si noti che non si potrebbe rappresentare con un nuovo simbolo, ad es. «Ri», la «classe degli R irriducibili», scrivendo ad es. «$2/3 \varepsilon \mathrm{Ri}$» invece di «2/3 è un R irriducibile»; e ciò perchè, essendo «$4/6 = 2/3$», dalla F_2 § 1 P84 $[a \varepsilon \mathrm{K} \,.\, x \varepsilon a \,.\, x = y \,.\!\supset\!.\ y \varepsilon a]$ si dedurrebbe «$4/6 \varepsilon \mathrm{Ri}$», contraddicendo la supposta Df del simbolo «Ri»(*).

(*) La stessa osservazione trovasi nell'*Introduction au Formulaire de Mathématiques* - Turin, 1894 - pag. 49.

Ad esempio

$\cdot 4.\ a = \mathrm{nt}\,[a/(a+1)]$ $[\mathrm{P}{\cdot}3 \,.\, \mathrm{P}313{\cdot}3 \,.\!\supset\!.\ \mathrm{P}]$

$\cdot 5.\ 2a-1 = \mathrm{nt}[(2a-1)/(2a+1)]$ $[\mathrm{P}{\cdot}3 \,.\, \mathrm{P}(*) \,.\!\supset\!.\ \mathrm{P}]$

cioè: $a/(a+1)$ e $(2a-1)/(2a+1)$ sono R irriducibili.

Dalle P·1·2 si deducono anche le P

$\cdot 6.\ \mathrm{nt}(a/b) = \mathrm{m}(a, b)/b$ $[\mathrm{P}323{\cdot}2 \,.\, \mathrm{P}62{\cdot}2 \,.\, \mathrm{P}{\cdot}1 \,.\!\supset\!.$

$\cdot 7.\ \mathrm{dt}(a/b) = \mathrm{m}(a, b)/a$ [» » $\mathrm{P}{\cdot}2 \,.\!\supset\!.\ \mathrm{P}]$

cioè: il numeratore ed il denominatore di a/b si ottengono dividendo rispettivamente per b e per a il loro minimo comune multiplo.

Altri esempi d'applicazione delle P400·1·2 sono le P

$402{\cdot}1.\ a \varepsilon 2\mathrm{N}_1 \,.\, b \varepsilon 2\mathrm{N}_1{+}1 \,.\, a > b \,.\!\supset\!.\ \mathrm{nt}[(a+b)/(a-b)] = \mathrm{nt}(a/b) + \mathrm{dt}(a/b)$

$\cdot 2.$ » $.\!\supset\!.\ \mathrm{dt}[(a+b)/(a-b)] = \mathrm{nt}(a/b) - \mathrm{dt}(a/b)$

$\cdot 3.\ a, b \varepsilon 2\mathrm{N}_1{+}1 \,.\, a > b \,.\!\supset\!.\ 2 \times \mathrm{nt}[(a+b)/(a-b)] = \mathrm{nt}(a/b) + \mathrm{dt}(a/b)$

$\cdot 4.$ » $.\!\supset\!.\ 2 \times \mathrm{dt}[(a+b)/(a-b)] = \mathrm{nt}(a/b) - \mathrm{dt}(a/b)$

Dem P·1. $\mathrm{Hp}.\ \mathrm{P}401{\cdot}1 \,.\, \mathrm{P}(**) \,.\!\supset\!.\ \mathrm{nt}[(a+b)/(a-b)] = (a+b)/\mathrm{D}(a, b)$ (1)
$(1) \,.\, \mathrm{P}62{\cdot}10 \,.\, \mathrm{P}401{\cdot}1{\cdot}2 \,.\!\supset\!.\ \mathrm{P}$

Dem P·2. $\mathrm{Hp}.\ \mathrm{P}401{\cdot}2 \,.\, \mathrm{P}(**) \,.\!\supset\!.\ \mathrm{dt}[(a+b)/a-b)] = (a-b)/\mathrm{D}(a, b)$ (1)
$(1) \,.\, \mathrm{P}67{\cdot}3 \,.\, \mathrm{P}401{\cdot}1{\cdot}2 \,.\!\supset\!.\ \mathrm{P}$

Dem P·3. $\mathrm{Hp}.\ \mathrm{P}401{\cdot}1 \,.\, \mathrm{P}(***) \,.\!\supset\!.\ \mathrm{nt}[(a+b)/(a-b)] = (a+b)/2 \times \mathrm{D}(a, b)$ (1)
$(1) \,.\, \mathrm{P}62.10 \,.\, \mathrm{P}401{\cdot}1{\cdot}2 \,.\!\supset\!.\ \mathrm{P}$

Dem P·4. $\mathrm{Hp}.\ \mathrm{P}401{\cdot}2 \cdot \mathrm{P}(***) \,.\!\supset\!.\ \mathrm{dt}[(a+b)/(a-b)] = (a-b)/2 \times \mathrm{D}(a, b)$ (1)
$(1) \,.\, \mathrm{P}67{\cdot}3 \,.\, \mathrm{P}401{\cdot}1{\cdot}2 \,.\!\supset\!.\ \mathrm{P}$

Un'applicazione più importante delle P401·1·2 si ha nelle P

$403 \,.\, a \varepsilon \mathrm{R} \,.\, m \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\!\supset\!.$

$\cdot 1.\ \mathrm{nt}(a^m) = (\mathrm{nt}a)^m$

$[\mathrm{Hp}.\quad x = \mathrm{nt}a \,.\, y = \mathrm{dt}a \,.\!\supset\!.\ (1) \,.\, (2)$

$\mathrm{P}400{\cdot}10 \,.\!\supset\!.\ x/y = a \,.\, \mathrm{P}96{\cdot}5 \,.\ .\!\supset\!.\ x^m/y^m = a^m$ (1)

$(1) \,.\, \mathrm{P}400{\cdot}3 \,.\, \mathrm{P}401{\cdot}1 \,.\!\supset\!.\ \mathrm{nt}(a^m) = x^m/\mathrm{D}(x^m, y^m).$ (2)

$\mathrm{P}400{\cdot}3{\cdot}11 \,.\, \mathrm{P}313{\cdot}5 \,.\, (2) \,.\!\supset\!.\ \mathrm{P}]$

(*) La P $a \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\!\supset\!.\ \mathrm{D}(2a-1, 2a+1) = 1$ si trovava nelle bozze dell'F_2 § 2 ed andò perduta nell'impaginazione.

(**) (***) Si trovavano pure nelle bozze dell'F_2 § 2 ed andarono perdute nell'impaginazione le P

(**) $a \varepsilon 2\mathrm{N}_1 \,.\, b \varepsilon 2\mathrm{N}_1{+}1 \,.\, a > b \,.\!\supset\!.\ \mathrm{D}(a+b, a-b) = \mathrm{D}(a,b)$

(***) $a, b \varepsilon 2\mathrm{N}_1{+}1 \,.\, a > b \,.\!\supset\!.\ \mathrm{D}(a+b, a-b) = 2 \times \mathrm{D}(a,b).$

$\cdot 2.\ \mathrm{dt}(a^m) = (\mathrm{dt}a)^m$

$[\ \mathrm{Hp}.\ \mathrm{P}400{\cdot}9\ .\supset.\ \mathrm{dt}(a^m) = [\mathrm{nt}(a^m)]/a^m\ .\ \mathrm{P}{\cdot}1\ .\supset.$
$(\mathrm{nt}a)^m/a^m\ .\ \mathrm{P}96{\cdot}5\ .\supset.\ [(\mathrm{nt}a)/a]^m\ .\ \mathrm{P}400{\cdot}9\ .\supset.\ \mathrm{P}]$

ovvero: $[\ \mathrm{Hp}.\ \mathrm{P}400{\cdot}4\ .\supset.\ \mathrm{dt}(a^m) = \mathrm{nt}[/(a^m)]\ .\ \mathrm{P}96{\cdot}4\ .\supset.\ \mathrm{dt}(a^m) =$
$\mathrm{nt}[(/a)^m]\ .\ \mathrm{P}{\cdot}1\ .\supset.\ \mathrm{dt}(a^m) = [\mathrm{nt}(/a)]^m\ .\ \mathrm{P}400{\cdot}4\ .\supset.\ \mathrm{P}\ ]$

cioè: il numeratore ed il denominatore della potenza m-esima di a sono le potenze m-esime, rispettivamente, del numeratore e del denominat. di a.

Sono pur degne di nota le P

$404\ .\ a, b \varepsilon \mathrm{R}\ .\supset.$

$\cdot 1.\ (a+b)\varepsilon \mathrm{N}_1\ .\supset.\ \mathrm{dt}a = \mathrm{dt}b$

$[\mathrm{Hp}.\ x = \mathrm{nt}a\ .\ y = \mathrm{dt}a\ .\ u = \mathrm{nt}b\ .\ v = \mathrm{dt}b\ .\supset.\ (1)\text{-}(5).$

$\mathrm{P}400{\cdot}10\ .\supset.\ x/y = a\ .\ u/v = b \qquad (1)$

$(1)\ .\ \mathrm{P}400{\cdot}3\ .\ \mathrm{P}62{\cdot}11\ .\supset.\ a+b = (xv+yu)/yv \qquad (2)$

$\mathrm{Hp}.\ (2)\ .\supset.\ (xv+yu)\varepsilon \mathrm{N}_1 yv \qquad (3)$

$(3)\ .\ \mathrm{P}400{\cdot}3\ .\ \mathrm{P}45{\cdot}3{\cdot}5\ .\supset.\ xv\varepsilon \mathrm{N}_1 y\ .\ yu\varepsilon \mathrm{N}_1 v \qquad (4)$

$(4)\ .\ \mathrm{P}400{\cdot}3\ .\ \mathrm{P}400{\cdot}11\ .\supset.\ v\varepsilon \mathrm{N}_1 y\ .\ y\varepsilon \mathrm{N}_1 v\ .\ \mathrm{P}400{\cdot}3\ .\supset.\ y = v \qquad (5)$

$(5)\ .\supset.\ \mathrm{P}\ ]$

$\cdot 2.\ (a-b)\varepsilon \mathrm{N}_1\ .\supset.\ \mathrm{dt}a = \mathrm{dt}b \qquad [(-|+)\ \mathrm{Dem\ P}{\cdot}1]$

cioè: se la somma o la differenza di due R è un N_1, allora quei due R hanno lo stesso denominatore.

Dalle P404 si deducono le P

$405\ .\ a\varepsilon \mathrm{R}\ .\ m\varepsilon \mathrm{N}_1\ .\supset.$

$\cdot 1.\ \mathrm{dt}(m+a) = \mathrm{dt}a$

$[\ \mathrm{Hp}\ .\supset.\ (m+a)\varepsilon \mathrm{R}\ .\ [(m+a)-a]\varepsilon \mathrm{N}_1 \qquad (1)$

$(1)\ .\ \mathrm{P}404{\cdot}2\ .\supset.\ \mathrm{P}\ ]$

$\cdot 2.\ m>a\ .\supset.\ \mathrm{dt}(m-a) = \mathrm{dt}a$

$[\ \mathrm{Hp}\ .\supset.\ (m-a)\varepsilon \mathrm{R}\ .\ [(m-a)+a]\varepsilon \mathrm{N}_1 \qquad (1)$

$(1)\ .\ \mathrm{P}404{\cdot}1\ .\supset.\ \mathrm{P}\ ].$

Agosto, 1898.

ALESSANDRO PADOA.

E. SCHRÖDER. *Ueber Pasigraphie, ihren gegenwärtigen Stand und die pasigraphische Bewegung in Italien.*

Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich vom 9 bis 11 August 1897.

« Nella discussione di un Congresso matematico internazionale tema importantissimo è quello della Pasigrafia, ed io sono persuaso che il medesimo più non sparirà dall'ordine dei giorno dei futuri congressi. »

Così comincia il discorso detto, al Congresso matematico internazionale tenuto a Zurigo l'anno scorso, dal prof. Schröder, ai cui lavori la logica matematica è debitrice di tanti progressi.

Accennato rapidamente a Descartes e Leibniz, l'A. passa ad esporre i principii di questa scienza.

L'A. introduce 18 segni che, dice, formano il completo sistema di notazione della generale Pasigrafia, e che riduce a cinque categorie. Li paragona con quelli usati nel « Formulario di matematiche » e nei lavori di più Autori italiani; mediante essi definisce le classi, il numero, l'infinito, la funzione, e così via.

Applica la sua Pasigrafia alle relazioni di parentela. Parla degli attuali cultori della logica matematica, del Macfarlane, di origine inglese, del Peirce in America; e soggiunge che fino ora gli scopi della Pasigrafia solo in Italia hanno trovato zelanti promotori. Delle cortesi espressioni rivolte dai nostro A. agli Italiani che coltivano la logica matematica, questi gli saranno certo grati, tantopiù che presso noi questi studii non sono ancora da molte persone apprezzati come si meritano.

Dato così un cenno generico del lavoro dello S., non sarà inutile il ricordare che le opinioni dei varii cultori di questa scienza che ora è in rapida via di formazione, sono ancora spesso diverse.

Dei tomi I e II della grande opera dello Schröder, *Algebra der Logik*, già si è parlato in questo giornale, a. 1891, p. 164-170.

Afferro l'occasione portami dall'A. onde passare all'esame minuto di due soli punti controversi di esso, cioè:

1. La corrispondenza fra i simboli del nostro A., e quelli del Formulario.

2. Le categorie, o idee primitive della logica matematica.

In questo esame confronterò il lavoro dello S. col Formulario F_2 § 1, il quale appunto uscì stampato al Congresso di Zurigo, ove lo Schöder tenne la sua applaudita conferenza.

1.

Il confronto fra i simboli dello Schröder e quelli del Formulario è facilitato dalla corrispondenza seguente che stabilisce lo Schröder:

Schröder	0	1	$+$	$\cdot$	Σ	Π	$\overline{a}$	$\leqq$
Formulario	$\wedge$	$\vee$	$\cup$	$\cap$	$\cup'$	$\cap'$	$-a$	$\varepsilon \supset$

(Mi permetto di dare la forma $\leqq$ ad un segno speciale dello S. che risulta dalla sovrapposizione del segno $=$ e del segno $<$ curvato)

Quindi a primo aspetto parrebbe che si può passare dalle formule scritte col sistema dello S. a quelle del F. sostituendo ai segni dell'una serie i corrispondenti dell'altra; in conseguenza la differenza fra le due teorie sia solo nella forma dei segni; e per adottare l'una forma ovvero l'altra si debbano seguire sole ragioni tipografiche.

La cosa invece è ben diversa.

Invero il nostro A., oltre agli 8 già citati usa ancora i segni $0'$ $1'$ $\cup$ $\underline{\cup}$ $\jmath$; e altri. D'altra parte nel Formul. Introduction, tomo I e tomo II si sono studiate successivamente le proprietà espresse da più altri simboli. Così si scorge che in F_2 § 2 (Aritmetica) non si fa uso dei segni di logica $\wedge$ $\vee$ $\cup'$ $\cap'$; invece si usano i segni Cls, $\mathfrak{z}$, $\exists$, ι, $\imath$, f, $\jmath$, $|$, Sim, rep. Di questi segni non è stabilita la corrispondenza fra le due ideografie.

Ma anche la corrispondenza fra i primi 8 segni è solo approssimata, non esatta. I simboli corrispondenti dello S. e del F. hanno un campo di validità differente, come risulterà dall'esame che segue per alcuni di essi.

Lo S. fa corrispondere al segno $\leqq$ i due segni ε e $\supset$ del F. Ora i segni ε e $\supset$ esprimono idee differenti. Ciò si può riconoscere col linguaggio ordinario, poichè altro è affermare

x è un a $\qquad (x\ \varepsilon\ a)$

altro è $\quad x$ è una classe contenuta in a $\qquad (x \supset a)$.

Ma il miglior modo di far riconoscere la diversità di due idee si è di far vedere che esse hanno proprietà differenti.

Consideriamo perciò il sillogismo.

(F_2 §1 P25) $\quad a,b\ \varepsilon$ Cls. $a \supset b\ .\ x \varepsilon a\ .\supset.\ x \varepsilon b$

« Siano a e b delle classi: se ogni a è b, e se x è un a, allora x è un b. »

Se al posto di $x\varepsilon a$ si legge $x \supset a$, e si aggiunge la condizione $x\varepsilon$ Cls, si ottiene ancora una forma esatta di sillogismo

$$a,b,x\ \varepsilon\ \mathrm{Cls}\ .\ a \supset b\ .\ x \supset a\ .\supset.\ x \supset b$$

che, con uno scambio di lettere, diventa la P26.

Ma si trova invece una forma falsa, se al posto di $a \supset b$ si legge $a\varepsilon b$. Poichè dalle ipotesi $a\varepsilon b\ .\ b\varepsilon c$ non si deduce punto $a\varepsilon c$, come si riconosce da esempi.

L'esempio classico è il sofisma: « Pietro e Paolo erano apostoli; ma gli apostoli erano dodici: dunque Pietro e Paolo erano dodici. »

Nella frase « gli apostoli sono dodici » il verbo « sono » non corrisponde al segno $\supset$ dell'ideografia, cioè esso non vale « (apostoli)$\supset$(12)», ma bensì al segno ε, e si può trasformare in «(apostolo)ε(classe di 12 persone). » Già i Logici hanno distinto i due significati del termine « essere », chiamandoli « sensus compositi » e « sensus divisi », corrispondenti ai segni ε e $\supset$ del Formulario.

Sotto forma più matematica (V. F_0 § 16), dalle ipotesi

« 5 ε (numero primo) »

« (numero primo) ε (classe di infiniti numeri) »,

non dedurrò « 5 è una classe di infiniti numeri ».

Bensì (F_2 § 1 P470), dalle ipotesi $a\varepsilon b\ .\ b\varepsilon c$ si può dedurre $a\varepsilon \cup' c$; ad es. dalle ipotesi

« a è un punto della retta b . b è una retta del fascio c » non dedurrò a è una retta del fascio c », ma bensì « a è un punto del piano del fascio c.

Un'altra formula in cui non è permesso di sostituire al segno ε il segno $\supset$ è la P104

$$a\varepsilon \text{ Cls } .\supset: x\varepsilon\text{-}a \ .=.\ x\text{-}\varepsilon a$$

che esprime la proprietà commutativa dei segni - ed ε.

Invece non sussiste la commutatività dei segni - e $\supset$. Invero « x è un non a » vale evidentemente « x non è un a »; ma « ogni a è un b » non vale « non ogni a è un b ».

Ad es. « i numeri primi non sono tutti dispari », vera perchè $2 \varepsilon \mathrm{Np}$, non equivale alla falsa « i numeri primi sono tutti pari. »

Una terza proprietà che differenzia i segni ε e $\supset$ è espressa dalla P202 $\quad a,b \ \varepsilon \text{ Cls } .\supset: (x\varepsilon a)\cup(x\varepsilon b) \ .=.\ x\varepsilon\ (a\cup b)$
che esprime la proprietà distributiva del segno $x\varepsilon$ rispetto al segno $\cup$. « Dire che x è un a, ovvero dire che x è un b, equivale a dire che x è un a o b. » Essa cessa di sussistere se al posto di ε si legge $\supset$; cioè da $(x\supset a)\cup(x\supset b)$ si deduce $x\supset (a\cup b)$, come afferma la P228, dovuta al Mc Coll; ma non viceversa. Così è vero « ogni numero quadrato è o un multiplo di 3, o un multiplo di 3 più 1 » $\mathrm{N}_0^2 \supset 3\mathrm{N}_0\cup(3\mathrm{N}_0+1)$; ma è falso che « ogni quadrato sia un multiplo di 3 », o « che ogni quadrato sia un multiplo di 3 più uno. »

Un'altra proprietà che distingue gli stessi segni è la P401. Dal fatto che « x è un a » $(x\varepsilon a)$ si deduce « esistono degli a. » Ma dal fatto che « ogni a è b » $(a\supset b)$, non si può dedurre che esistano dei b, salvo quando ci siamo prima assicurati dell'esistenza degli a (P402).

E così via. Però le idee rappresentate dai segni ε e $\supset$, quantunque distinte, sono legate da più relazioni. Notevole è quella espressa dalla P422.

In conseguenza chi confonde e rappresenta con un sol segno le due idee espresse dai segni ε e $\supset$ del Formulario, non potrà costrurre nè una ideografia, nè un calculus ratiocinator. Non potrà costrurre una ideografia, perchè il lettore vedendo quel segno, non può distinguere se esso abbia il valore dell'ε o del $\supset$. Non può costrurre un algoritmo di ragionamento, perchè le identità del Formulario, tutte vere come sono scritte, diventano inesatte sostituendo l'un segno all'altro; e perciò diventano false, dovendosi dichiarare falsa una proposizione quando patisce un caso d'eccezione.

Lo stesso segno $\leqq$ dello S. fra proposizioni, non ha il valore del segno $\supset$ del F. Invero S. pone il segno $\leqq$ fra proposizioni categoriche non contenenti lettere variabili, mentrechè in F_2 §1 P5 il segno $\supset$ è introdotto fra proposizioni contenenti lettere variabili, e porta degli indici espressi o sottintesi.

Analogamente si può rilevare la non identità dei segni Σ e Π di S. coi $\cup'$ e $\cap'$ di F, poichè i primi portano indici variabili, ed i secondi no, e così via.

2.

Più importante è il secondo punto, perchè qui ragioneremo su formole.

L'A. parte da 5 « Urbegriffe » o « Categorie » secondo Aristotele e Kant, che indica coi segni

$=$	$.$	$-$	$\cup$	$;$
$1'$	Π			

e mediante cui definisce gli altri segni. Un lavoro analogo di riduzione delle idee di logica in primitive e derivate, è fatto in F_2 § 1, ove si danno come idee primitive, spiegate col linguaggio ordinario quelle espresse dalle P1,2,3,4,5,6,7,70,100, mentre di tutte le altre si dà la definizione simbolica.

Ho osservato però (F_0 pag. 50, e F_2 § 1 pag. 28) che questa distinzione delle idee in primitive e derivate ha dell'arbitrario; che in più modi è possibile costituire un sistema di idee primitive, e ne diedi qualche cenno nelle note. Quindi parmi interessante l'esaminare come lo S. abbia trattato la stessa questione.

Lo S. partendo da 5 sole categorie, pare abbia fatto una riduzione ulteriore. Ma, come egli osserva (pag. 149) « le nostre Categorie non fanno ancora l'intero sistema dei segni fondamentali », e menziona fra questi le parentesi. Anche le lettere variabili $a,b,c,\ldots$ sono dei segni. Quindi aggiungendo alle 5 categorie le convenzioni sulle parentesi, e sulle lettere variabili, espresse rispettivamente dalle P3 e 4 del F, si hanno già almeno 7 segni che non possono essere definiti. Anche la parola « Definizione » o il simbolo Df. espresso dalla P7 del F, non può essere evidentemente definito.

Inoltre lo S. considera come rappresentanti d'una stessa idea i segni $=$ e $1'$, come pure i segni . e Π. Ora i segni $=$ e $1'$ dello S. non sono equivalenti, nel senso cioè che si possano sostituire l'uno all'altro in ogni formola, come due forme tipografiche d'uno stesso segno. Quindi finchè l'A. non dà la definizione simbolica del segno 1' mediante l'$=$, e del segno Π mediante il punto, noi dobbiamo apprendere dalle spiegazioni date col linguaggio ordinario il loro valore.

In conseguenza le idee che non si possono definire simbolicamente, nella teoria dello S. sono in numero non minore di 10.

Sulla scelta e valore di queste idee primitive nulla c'è ad osservare, essendo ogni A. libero di partire dal gruppo che più gli soddisfa. Vediamo invece come lo S. definisca gli altri segni.

La prima definizione dello S. è

$$0 = a \,.\, \bar{a}$$

la quale valendosi della corrispondenza che Egli stabilisce, si trasforma coi simboli del F, in $\Lambda = a \text{-} a$, la quale nel F_2 § 1 è preceduto dall'Hp. $a \varepsilon$ Cls, sicchè ha la forma:

321. $a \varepsilon \text{ Cls } .\supset.\ a \text{-} a = \Lambda$

« Essendo a una classe, la classe degli a e dei non a è nulla. »

Un'Hp, come la $a\varepsilon$Cls è necessaria. Invero, siccome nel F il segno - accompagna solo una classe, o una proposizione, o una relazione, se nella formula $a \text{-} a = \Lambda$ al posto di a metto una cosa che non sia nè una classe, nè una proposizione, nè una relazione, $\text{-}a$ non ha alcun significato, e quindi la proposizione $a \text{-} a = \Lambda$ è priva di senso.

Nè vale il rispondere che, essendo a un oggetto qualunque, con $\text{-}a$ si intende l'insieme degli oggetti diversi da a, classe che in F è indicata con $\text{-}\iota a$. Ma chi pone $\text{-}a = \text{-}\iota a$, ne dedurrà (P106) $a = \iota a$, e dalla P422, $x \varepsilon a .=. \iota x \supset a$, dedurrò $x \varepsilon a .=. x \supset a$, identità che non sussiste avendo già fatta rilevare la differenza dei segni ε e $\supset$. Ed essendo a una classe, $\text{-}a$ acquista due significati « classe formata dagli individui che non sono a », e « classi diverse dalla classe a. »

Adunque, essendo necessaria l'Hp. $a\varepsilon$Cls, per poter leggere la P321, è necessario che il lettore conosca già il valore dei segni ε, Cls, $\supset$, affine di poter leggere la prima proposizione dello S., sicchè il numero delle idee primitive va rapidamente aumentando.

Ma anche ammesso che si possa trascurare l'Hp. $a\varepsilon$Cls, la P dello S. non può essere assunta per Df. Invero la logica naturale non può essere soddisfatta dalla Df.

$$0 = a \text{-} a \quad \text{« diciamo nulla l'}a\text{ non }a\text{ »}$$

Ed esaminandola coi criterii della logica matematica, se ne vede la ragione in ciò che essa non è omogenea, poichè l'un membro è un simbolo costante 0, e l'altro è una funzione di una variabile a.

La def. che si vuol dare è questa:

« chiamiamo *nulla* il valor costante dell'espressione $a \text{-} a$, ove a rappresenta una classe qualunque », e ciò è espresso dalla F_2 §1 P435 $\Lambda = \imath\, x \ni (a \varepsilon \text{Cls} \,.\supset_a.\, a \text{-} a = x)$ la quale ha i caratteri d'una definizione. Ma non avendo lo S. a sua disposizione nessuno dei segni $\imath$ $\ni$ ε Cls $\supset$, non è in caso di poterla enunciare.

Così ho numerate 15 idee che si debbono premettere affinchè la prima def. data dallo S. abbia i caratteri d'una definizione simbolica.

G. PEANO.

A treatise on Universal Algebra, with applications. - By ALFRED NORTH WHITEHEAD, volume I, Cambridge, at the University Press, 1898. - Pag. XXVI + 586.

L'Autore si prefigge in quest'opera lo scopo di trattare, collegandoli in un tutto organico, i vari sistemi di calcolo simbolico.

Il I volume, tratta dell'algebra della logica simbolica, dei principi generali dell'addizione e di una teoria delle moltiplicità di posizione (*positional manifold*), dei principi del calcolo dell'estensione (*Ausdehnungslehre*, di Grassmann); della loro applicazione alla teoria delle forze, alla geometria non Euclidea, ed allo spazio ordinario Euclideo a tre dimensioni.

Pel II volume, non ancor pubblicato, l'A. promette un confronto particolareggiato della struttura simbolica delle varie algebre, ed una trattazione dei quaternioni, delle matrici e della teoria generale delle algebre lineari.

L'A. si è accinto a scrivere quest'opera fino dal 1890; però le sue occupazioni non gli hanno permesso di poter compiere uno studio completo ed esauriente delle molte questioni di logica e di matematica da lui trattate, come Egli afferma (pag. X) e come del resto risulta evidente al lettore.

L'A. si è ispirato ai lavori di Mill, Jevons, Lotze, Bradley sulla logica pura; per la parte matematica l'A. ha seguito Hamilton e sopratutto l'Ausdehnungslehre del 1862 di Grassmann; nello sviluppo della geometria non Euclidea l'A. ha consultato i lavori di Cayley, Klein e Clifford; e finalmente nella teoria dei sistemi di forze. R. S. Ball e Lindemann.

Le brevi notizie che precedono sull'opera del Whitehead sono estratte dalla sua prefazione; esse bastano a dare un'idea delle questioni da lui trattate. Aggiungerò soltanto che l'accuratezza e l'eleganza dell'edizione unitamente alla diligenza della correzione tipografica contribuiscono a far risaltare le doti e i pregi del lavoro.

Ci limiteremo in questa recensione ad analizzare il libro secondo del I volume, di 84 pag., poichè esso è dedicato all'algebra della logica simbolica. Ne faremo un minuto esame, confrontandolo col *Formulaire de Mathématiques*, § 1, t. 2, che indicheremo in seguito colla lettera F.

Un cenno storico chiude il libro: in esso l'A. menziona i lavori che hanno scritto su questo soggetto Boole, Venn, Schröder, Mc Coll, e pochi altri. Evidentemente la bibliografia dell'A. non è completa: egli non menziona gli importanti lavori di Leibniz, il quale ha messo le vere basi di questa nuova scienza, quelli di Lambert, e per parlare dei più recenti, i lavori del Frege e quelli di numerosi autori italiani. Così ad esempio, egli attribuisce (pag. 115) al Jevons (a. 1864) l'*addizione logica*, la quale come è attualmente considerata è stata introdotta da Leibniz. (F, P204).

Nel primo capitolo l'A. comincia col dire:

« Let a, b, c,.. be terms representing elements of the algebraic manifold of this algebra. »

Che cosa sia il *manifold* l'A. spiega a pag. 12 in forma poco chiara: però per le proprietà formali che seguono, noi possiamo ritenerlo equivalente all'idea rappresentata dal termine « Classe » del F.

Dopo di ciò introduce subito l'addizione, « l'elemento nullo », la moltiplicazione, l'« universe » ed il « Supplementary Element », che indica rispettivamente con

$$a+b, \quad 0, \quad ab, \quad \mathrm{i}, \quad \overline{a}$$

che equivalgono a

$$a\cup b, \quad \wedge, \quad ab, \quad \vee, \quad -a, \quad \text{del F},$$

limitatamente alle classi, perchè soltanto nel capitolo V ne dà, come vedremo, l'interpretazione proposizionale.

Le sue proposizioni sono scritte in simboli solo parzialmente dovendo egli indicare col linguaggio ordinario le idee *si deduce* ($\supset$), *e*, *o*, *non* ($\cap$, $\cup$, $-$) fra proposizioni, e quello che più importa, il significato delle lettere, che in F è scritto: a,b,c, ε Cls.

Riempiendo per quanto si può queste lacune, possiamo stabilire la corrispondenza tra le proposizioni dell'A. e quelle del F.

Dopo aver enunciato le P205,206,204 del F, l'A.[§23,(3)] dà la definizione dell'« elemento » nullo:

$$a+0 = a$$

Ora questa proposizione coincide colla P440 del F, salvo sempre il significato della lettera a, che l'A esprime col linguaggio ordinario mentre in F essa è scritta completamente in simboli:

$$a \,\varepsilon\, \mathrm{Cls} \,.\!\supset.\; a\cup\wedge = a$$

Però questa proposizione esprime una importante proprietà del segno $\wedge$, ma non si può assumere come una definizione simbolica, non avendo la forma:

$$\wedge = \textit{espressione nota.}$$

Se noi vogliamo scrivere completamente in simboli la definizione del segno $\wedge$, occorre scrivere:

$$\wedge = ℩\, \mathrm{Cls} \cap x϶(a\,\varepsilon\,\mathrm{Cls} \,.\!\supset_a.\; a\cup x = a) \qquad \text{Df.}$$

Dicesi « nulla » quella Classe x tale che, comunque si prenda la Classe a, sempre si ha: $a\cup x = a$.

Ma l'A. non è in grado di scrivere questa definizione mancando a lui i segni ι, ℩, ε, ϶, ed inoltre l'uso degli indici al segno $\supset$.

In seguito l'A. enuncia le P216,217,43,14',42,220 del F: dopo di che introduce l'idea dell'« Universe ». La sua definizione, presenta gli stessi inconvenienti di quella dell'elemento nullo.

L'A. dà poi a parole la definizione del supplemento di un elemento a, ($-a$), espressa completamente in simboli dalla P433 del F.

Le proposizioni ora ricordate sono dimostrate senza alcun cenno di dimostrazione: le successive sono dimostrate servendosi delle formole collegate col linguaggio ordinario, non avendo l'A. un simbolismo atto a ciò.

La sua proposizione I coincide colla P224 del F; però l'A. non l'enuncia in simboli, mancandogli la moltiplicazione logica fra proposizioni (F, P6) e la deduzione (F, P5).

Tralascieremo di ricordare le proposizioni dell'A. espresse completamente col linguaggio ordinario perchè mal si potrebbe affermarne la corrispondenza con quelle del F. Ciò premesso, possiamo affermare che tutte le proposizioni dell'A., già si trovano nel F, eccetto alcune poche che indicheremo.

Si ha quindi la corrispondenza tra il

Cor. II,	Cor. IV,	Prop. II,	Prop. III,	Prop. IV,	Prop. V,	Prop. VI,	dell'A. colle
P113,	106,	222,	439,	342,	274,	251,252	del F.

Il § 24 (pag. 37) del libro è dedicato alla reciprocità fra l'addizione e la moltiplicazione dovuta a Peirce ed a Schröder (F, pag. 42).

La proposizione VII dell'A. (pag. 40) si può enunciare così:

$$a,b,c \,\varepsilon\, \mathrm{Cls} \,.\!\supset.\; ab = ac \,.\!=.\; a-b = a-c$$

Non essendo contenuta nel F, sarebbe utile che essa vi fosse inserita.

La prop. VIII è una combinazione delle P52,212,324 del F.

La prop. IX è pure conseguenza immediata della P52 del F.

La prop. X coincide colla P274 del F.

L'A. introduce quindi (pag. 42) il simbolo di Schröder, che corrisponde al simbolo ($\supset$) del F, e ne dà le principali proprietà: ecco la corrisp. tra le

Prop. XI,	XII,	XIII,	XIV,	XV,	XX	dell'A, e le
P52,23,219	26	16	34,209	111	230	del F.

Le PXVI—XIX dell'A. sono semplici applicazioni delle leggi di semplificazione e inversione.

Mancano nel F le prop. XXI, XXII: esse si possono scrivere:

$a,b,c,d\ \varepsilon\ \mathrm{Cls}\ .\supset.\qquad c \supset ac\cup bc\ .\supset.\ c \supset a\cup b$

$(a\cup c)\,(b\cup d) \supset e\ .\supset.\ ab\supset e$;

Ma a causa della loro semplicità (essendo conseguenza immediata delle P24,213, dovute a Leibniz) non sembra utile aggiungerle nel F.

Nel capitolo II (pag. 45) l'A. si occupa dello sviluppo delle funzioni logiche, teoria questa non ancora ridotta da alcuno, completamente in simboli.

Le principali proposizioni di questo capitolo sono già contenute nel F: esse sono le P276,270,272,271,273 e poche altre.

Nel capitolo III l'A. tratta delle « Espressioni esistenziali ».

L'A. vuole scrivere la proposizione $\exists a$ (F,P400). Egli, seguendo il Boole, non rileva che questa proposizione non è altro che la negativa della $a{=}\Lambda$, e che quindi si esprime per mezzo dei simboli già introdotti, cioè:

$\overline{}(a = 0)$ dell'A., e $a{-}{=}\Lambda$, del F.

In conseguenza introduce nuovi simboli e li esprime ora con xj, ora con xj_1, ora con lettere umbrali, cioè $\alpha,\beta,\ldots$ significano rispettivamente $\exists a$, $\exists b,\ldots$ e per questa via l'A. si trova alle prese con calcoli estremamente intricati e di nessun vantaggio.

La mancanza di ogni relazione simbolica di questi nuovi segni coi precedenti, ne rende difficile la lettura.

Nel capitolo IV l'A. applica il simbolismo introdotto alla rappresentazione delle forme tradizionali del sillogismo.

Il capitolo V ed ultimo del libro contiene l'interpretazione proposizionale delle formole scritte nei capitoli precedenti. L'A. fa vedere che i segni $\cap$, $\cup$, $-$, V, Λ, $\supset$, si possono pure interpretare quando le lettere a, b, c,.. rappresentino delle proposizioni.

Però egli non fa rilevare la relazione che passa tra la doppia interpretazione di questi simboli secondo che sono usati tra classi o tra proposizioni; Manca cioè l'equivalente delle prop. seguenti di F:

$a,b\ \varepsilon\ \mathrm{Cls}\ .\supset.$

14.	$x\varepsilon\ ab\ .{=}.\ x\varepsilon a\ .\ x\varepsilon b$	Df.
202.	$x\varepsilon\ a\cup b\ .{=}.\ x\varepsilon a\ .\cup.\ x\varepsilon b$	Df.
103.	$x\varepsilon{-}a\ .{=}.\ {-}(x\varepsilon a)$	Df.
12.	$a\supset b\ .{=}{:}\ x\varepsilon a\ .\supset_x.\ x\varepsilon b$	Df.
300'.	$a{=}\Lambda\ .{=}{:}\ x\varepsilon a\ .{=}_x\ \Lambda$	Df.

le quali legano la doppia interpretazione di questi simboli.

E, quello che più importa, mancano gli indici al segno $\supset$, cosicchè la parola « si deduce » ($\supset$) risulta indeterminata, e nelle applicazioni produce delle ambiguità, che l'A. non trova perchè qui termina la sua trattazione.

Molto importanti sono gli studi geometrici dell'A. contenuti nei libri successivi, in cui sono sviluppate specialmente le idee di Grassmann: e noi li raccomandiamo vivamente ai lettori. Di essi però menzioneremo soltanto le dimostrazioni dei teoremi classici sulle superficie fatte colla teoria dei vettori, avvicinandosi alle idee già esposte dal prof. Burali-Forti nella sua *Introduction à la Géométrie différentielle;* poichè l'indole della Rivista ci obbliga a limitarci agli argomenti concernenti lo sviluppo della logica matematica.

G. VACCA.

NOTE DI LOGICA MATEMATICA

Modificazioni ed aggiunte a F_2§1 *proposte da*

Alessandro Padoa

CAP. I. — « è »

In parecchie dimostrazioni di F_2§2 (incominciando dalla prima, quella della P003·1) è fatto uso tacito della P

(α). $N_0\ \varepsilon\ \mathrm{Cls}$

che nel §2 non è enunciata e nel quale bisognerebbe inserirla.

Però, nello stato attuale del *Formulaire*, la P (α) (la quale costituisce l'anello di congiunzione tra il §1, che è una teoria delle « Cls » (*), ed il §2, che incomincia con la teoria degli « N_0 ») non può essere dimostrata; non può, cioè, essere dedotta da altre P del §2 mediante procedimenti logici espressi da P del §1: e ciò perchè in nessuna di tali P la tesi è del tipo « $a\ \varepsilon\ \mathrm{Cls}$ ».

Indipendentemente da ciò, ponendo a riscontro la §1P

2. Soit a une Cls; $x\varepsilon a$ indique la proposition « x est un a »

con la prima P simbolica del §1, cioè con la P

11. $a\varepsilon\ \mathrm{Cls}\ .\supset{:}\ x,y\varepsilon\ a\ .{=}.\ x\varepsilon\ a\ .\ y\varepsilon\ a$ Df

risulta che l'ipotesi « $a\varepsilon\ \mathrm{Cls}$ » di questa P è priva di significato, se non si ammette prima la P

(β). $\mathrm{Cls}\ \varepsilon\ \mathrm{Cls}$

che nel §1 non è enunciata e nel quale bisognerebbe inserirla.

Però, nello stato attuale del *Formulaire*, la P (β) non può essere dimostrata; e la ragione di ciò è la medesima di quella enunciata a proposito della P (α).

Ma v'ha di più: a cagione della §1P2, la P (β) presuppone sè

(*) Nel §2 al simbolo « K » del §1 fu sostituito, con egual significato, il simbolo « Cls ».

stessa: essa non ha significato se, prima di leggerla, non la si è ammessa.

Inoltre, sempre a cagione della §1P2, la prima P simbolica del §2, cioè la P

002·1. $0 \varepsilon N_0$ Pp

è priva di significato, se prima non si ammette la P (α) della quale ho già parlato.

Il desiderio di eliminare questi lievi difetti del *Formulaire* m'ha suggerito una modificazione, ch'era già stata considerata possibile nelle *Notes* al §1 [pag. 22, linee 10-13] e che, per mio conto, ho già adottata nelle « *Conférences sur la Logique Mathématique* » (*). Se la mia proposta venisse accettata, gl'inconvenienti additati sparirebbero, nuovi, parmi, non sorgerebbero, e gli enunciati di parecchie P acquisterebbero in concisione; vantaggio non disprezzabile questo, ma secondario dal mio punto di vista attuale: indipendentemente da esso convien giudicare l'opportunità di adottare la modificazione di cui mi occupo in questo Cap.

* *
*

La modificazione è questa: nel §1, alla citata P2 si sostituisca la P

(1). « x è a » signifie « x est un a »

inoltre, si inserisca la P

(2). x è a .$\supset$. a è Cls Pp

Esaminiamone le conseguenze.

Anzitutto, per la (1), la notazione « x è a » ha significato ancorchè non preceduta dalla « a è Cls », e questa ha significato ancorchè non sia stata prima enunciata la P

(β'). Cls è Cls.

(*) Tenute, dal 19 ottobre al 23 novembre 1898, nell'*Université Nouvelle* di Bruxelles.

In particolare, sostituendo alla citata §2P002·1 la P

(3). 0 è N_0 Pp

questa ha significato anche se non si enuncia la P

(α'). N_0 è Cls.

Ma la (2) permette di inserire nel §2 la P (α'), dandone la dimostrazione « [(3).§1P (2) .$\supset$. P] ».

Dopo ciò, la P (β') potrebb'esser dimostrata così: « [§2 P (α'). §1 P (2) .$\supset$. P] ». Però questa dimostrazione, benchè rigorosa, non mi soddisfa: perchè non mi parrebbe opportuno inserire la P (β') nel §1, ricorrendo per la sua dimostrazione ad una P del §2, nè inserirla nel §2, dove sarebbe fuori posto. Eppure, anche accettando la modificazione da me proposta, la P (β') non potrebb'essere dimostrata nel §1, perchè esso non contiene alcuna P del tipo « x è a », qual'è la P (3).

Ma a ciò si rimedia facilmente, inserendo nel §1 le P

(4). x è (ιx) [($x|y$) P421 .$\supset$. P=P81]
(5). (ιx) è Cls [P (4) . P (2) .$\supset$. P]

l'ultima delle quali permette di dimostrare la P (β'), senza uscire dal §1, così: « [P (5) . P (2) .$\supset$. P] ».

E così mi pare d'aver dimostrato che mediante la modificazione proposta (*) gli inconvenienti additati risulterebbero eliminati.

* *
*

Per convincersi che, accettando la modificazione proposta, inconvenienti nuovi non sorgerebbero, conviene esaminare tutte le variazioni che produrrebbe negli enunciati delle attuali P del §1.

Per comodità del lettore ne do qui l'elenco completo, ripetendo le P enunciate e tralasciando tutte le P del §1 nelle quali la variazione si ridurrebbe alla sostituzione tipografica dell'« è » all'« ε ». A ciascuna P è premesso un numero d'ordine pro-

(*) La quale è completamente espressa nella sostituzione della P (1) alla §1P2 e nell'inserzione della P (2); è chiaro che l'inserzione nel §1 delle P (4) e (5) è conseguenza, non parte, di tale modificazione.

gressivo; alcune P sono seguite dal numero d'ordine (entro due graffe «} {») delle P del §1 cui dovrebbero sostituirsi (qualora si ritenesse opportuno, come a me sembra, abolire l' «ε» in una eventuale ristampa del *Formulaire* (*)); le P in cui tale indicazione manca, sono aggiunte (**).

·1. «$x \text{ è } a$» signifie «x est un a» }2{

·2. $x, y \text{ è } a \mathrel{.=.} x \text{ è } a \,.\, y \text{ è } a$ Df }11{

·3. $x, y \text{ è } \mathrm{Cls} \mathrel{.=.} x \text{ è } \mathrm{Cls} \,.\, y \text{ è } \mathrm{Cls}$ [$= (\mathrm{Cls}|a)$ p2]

·4. $x \text{ è } a \mathrel{.\supset.} a \text{ è } \mathrm{Cls}$ Pp

·5. $x \text{ è } a \,.\, b \text{ è } \mathrm{Cls} \,.\, a \supset b \mathrel{.\supset.} x \text{ è } b$ Pp }25{

·6. $a, b \text{ è } \mathrm{Cls} \,.\supset:\, x \text{ è } ab \mathrel{.=.} x \text{ è } (ab)$ Df

·7. $a, b \text{ è } \mathrm{Cls} \,.\, x \text{ è } ab \mathrel{.=.} x \text{ è } a \,.\, x \text{ è } b$ }54{

·8. $x \text{ è } a \mathrel{.=:} a \text{ è } \mathrm{Cls} : b \text{ è } \mathrm{Cls} \,.\, a \supset b \mathrel{.\supset_b.} x \text{ è } b$ }61{

·9. $x = y \mathrel{.=:} x \text{ è } a \mathrel{.\supset_a.} y \text{ è } a$ Df }80{

·10. $x \text{ è } a \,.\, x = y \mathrel{.\supset.} y \text{ è } a$ }84{

·11. $x -\text{è } a \mathrel{.=.} -(x \text{ è } a)$ Df }101{

·12. $x \text{ è } -a \mathrel{.=.} x \text{ è } (-a)$ Df

·13. $x \text{ è } -a \mathrel{.\supset.} a \text{ è } \mathrm{Cls}$

[Hp . p12 . p4 $.\supset.$ $(-a)$ è Cls . P105 $.\supset.$ $[-(-a)]$ è Cls . P106 . p10 $.\supset.$ Ts]

·14. $x \text{ è } -a \mathrel{.=.} a \text{ è } \mathrm{Cls} \,.\, x -\text{è } a$ }104{

[p13 . P52 $.\supset:$ $x \text{ è } -a \mathrel{.=.} a \text{ è } \mathrm{Cls} \,.\, x \text{ è } -a$ (1)
P103 $.\supset:$ $a \text{ è } \mathrm{Cls} \,.\, x \text{ è } -a \mathrel{.=.} a \text{ è } \mathrm{Cls} \,.\, x -\text{è } a$ (2)
(1). (2). P83 $.\supset.$ P]

·15. $x \text{ è } a \,.\, x \text{ è } -c \,.\, b \text{ è } \mathrm{Cls} \,.\, ab \supset c \mathrel{.\supset.} x \text{ è } -b$ Pp }107{

·16. $x \text{ è } -b \,.\, a \text{ è } \mathrm{Cls} \,.\, a \supset b \mathrel{.\supset.} x \text{ è } -a$ }110{

·17. $a,b \text{ è } \mathrm{Cls} \,.\supset:\, x \text{ è } a \cup b \mathrel{.=.} x \text{ è } (a \cup b)$ Df

·18. $x \text{ è } a \,.\, x \text{ è } -b \,.\, c \text{ è } \mathrm{Cls} \,.\, a \supset b \cup c \mathrel{.\supset.} x \text{ è } c$ }258{

·19. $y \text{ è } \iota x \mathrel{.=.} y \text{ è } (\iota x)$ Df

·20. $x \text{ è } \iota x$ [P421 $.\supset.$ p=P81]

·21. $(\iota x) \text{ è } \mathrm{Cls}$ [p20 . 19 . 4 $.\supset.$ p]

·22. $\mathrm{Cls} \text{ è } \mathrm{Cls}$ [p21 . 4 $.\supset.$ p]

(*) Intendo parlare non del *segno* «ε» ma dell'*idea* ch'esso attualmente rappresenta nel §1; quanto al segno, si potrebbe adottare l' «ε» invece dell' «è» col significato che qui gli attribuisco. Così appunto feci nelle già ricordate mie *Conférences*; e così non ho fatto in questo articolo per evitare equivoci e per rispettare l'art. 3 del *Saggio di Regolamento del Formulario* (Rivista di Matematica, Tomo VI, pag. 88).

(**) Nelle citazioni seguenti il numero d'ordine è preceduto da un «p» o da un «P», secondo che si tratta di proposizioni di questo scritto o del F_2§1.

·23. $x \text{ è } a \mathrel{.\supset.} \exists a$ }401{

·24. $x \text{ è } a \mathrel{.=.} a \text{ è } \mathrm{Cls} \,.\, \iota x \supset a$ }422{

·25. $x,y \text{ è } a \mathrel{.=.} a \text{ è } \mathrm{Cls} \,.\, \iota x \cup \iota y \supset a$ }423{

·26. $x \text{ è } a \mathrel{.=.} a \text{ è } \mathrm{Cls} \,.\, \exists (\iota x) \cap a$ }424{

·27. $x \text{ è } -a \mathrel{.=.} a \text{ è } \mathrm{Cls} \,.\, (\iota x) \cap a = \Lambda$ }425{

·28. $x \text{ è } a \,.\, b \text{ è } \mathrm{Cls} \,.\, u \text{ è } a \mathrm{f} b \,.\, x = y \mathrel{.\supset.} xu = yu$ }503{

·28'. ———————— $.\supset.$ $xu \text{ è } b$ }504{

Le p1 e 4 sono le p(1) e (2) di cui ho già parlato.

Nella P11 ho soppressa l'Hp «a è Cls», divenuta inutile, e ne è risultata la p2, della quale la p3 è un caso particolare.

Nell'Hp della P25 ho soppresso il fattore «a è Cls», divenuto inutile, ed ho diversamente ordinato i fattori rimasti; ne è risultata la p5.

Le p6 . 12 . 17 . 19 esprimono altrettante convenzioni sulla punteggiatura, di cui è fatto uso tacito nel §1, e che mi sembra opportuno enunciare, com'è stato fatto per molte altre.

La P54 ha per Hp «b,c è Cls» (vedi l'Hp che precede la P28); ora, per la p4, tale Hp è implicita nel secondo membro della Ts; non però nel primo, potendo «bc» essere una Cls, senza che lo siano b e c (si consideri, ad es., l' «$N_0 +$» del §2). Ciò spiega perchè alla P54 sostituirei la p7 (mentre analoga trasformazione non sarebbe possibile per la P202).

L'Hp «a è Cls» della P61, per la p4, è implicita nel primo membro, soltanto, della Ts: ecco perchè alla P61 sostituirei la p8; analoghe sono le trasformazioni delle P422 . 423 . 424 nelle p24 . 25 . 26.

Le trasformazioni delle P80 . 84 nelle p9 . 10 non abbisognano di commenti.

L'Hp «a è Cls» della P101 non mi par necessaria; ad essa sostituisco la p11.

La p13, essendo una conseguenza della p4, mancava necessariamente nel §1; mediante la p13 ho dimostrato la p14 che sostituirei alla P104. Infatti, soppresso il terzo membro della Ts della P101, inutile dopo la p11, l'Hp «a è Cls», per la p13, è implicita nel primo membro, soltanto, della Ts; perciò convien trasformarla analogamente alla P61.

Per comprendere la semplificazione introdotta sostituendo le p15 . 16 . 18 alle P107 . 110 . 258, si badi che l'Hp sottintesa della P110 è «a,b è Cls» e quella di ciascuna delle P107 . 258 è «a,b,c è Cls»; la trasformazione è ottenuta mediante la p14.

Le p20-22 sono le p (4) (5) (β') di cui ho già parlato; la p20 differisce dalla p (4) per la soppressione delle parentesi, consentita dalla p19.

La p23 differisce dalla P401 per la soppressione dell'Hp «a è Cls», inutile per la p4.

Distribuendo l'Hp «a è Cls» della P425 ai due membri della Ts, essa, per la p14, diviene la p27.

Dalle P503 . 504 si ottengono le p28 . 28' sopprimendo nelle Hp la condizione «a è Cls», divenuta superflua a cagione della p4, ed anche, nell'Hp della P503, la condizione «$y \, \varepsilon \, a$» inutile per la p10.

***

Dalla p10 si deducono, come casi particolari, le P

·29. x è Cls . $x=y$.$\supset$. y è Cls [$=(\mathrm{Cls}|a)$p10]
·30. y è Cls . $x=y$.$\supset$. x è Cls [P82 . p29 .$\supset$. p]

dalle quali risulta che, quando « $x=y$ », la condizione « x,y è Cls » è sufficientemente espressa da una soltanto delle notazioni « x è Cls », « y è Cls ».

Questo fatto consente di abbreviare l'enunciato di parecchie P del §1 (*); ad es., a cagione della p29, le §1P85 . 210 . 211 si possono riscrivere così:

·31. a è Cls . $a=b$.$\supset$. $a\supset b$ }85{
·32. a,c è Cls . $a=b$.$\supset$. $a\cup c = b\cup c$ }210{
·33. ———————— . $c=d$.$\supset$. $a\cup c = b\cup d$ }211{

Si ha pure

·34. a è Cls . $-a = -b$.$\supset$. b è Cls
[Hp . P105 . p29 .$\supset$. $-b$ è Cls . P105 . 106 . p29 .$\supset$. Ts]

che, insieme alla p29, consente, ad es., di abbreviare così l'enunciato della P113

·35. a è Cls .$\supset$: $a=b$.=. $-a=-b$ }113{

***

Quando, a proposito della p (β'), dissi che nessuna P del §1 è del tipo « x è a », non tenni conto deliberatamente della P436 « $\Lambda\,\varepsilon$Cls », perchè nel §1 quella P non è dimostrabile; e la ragione di ciò è ancor quella enunciata a proposito della p (α).

Perciò, volendo dimostrare la p22, anzichè alla P436, ricorsi alla p21; ed ora, giovandomi delle p21.29, oltre ad alcune P del §1, dimostro la p

(γ). Λ è Cls }=P436{
[p21 . P105 .$\supset$. $-(\iota x)$ è Cls . P22 . P103' .$\supset$. $(\iota x)-(\iota x)$ è Cls (1)
p21 . P321 .$\supset$. $(\iota x)-(\iota x)=\Lambda$ (2)
(1) . (2) . p29 .$\supset$. p]

(*) Per comprendere tali abbreviazioni, qui e nel seguito, bisogna imaginar sempre anteposta a ciascuna P l'Hp del gruppo di P cui appartiene.

da cui per la p30,

(δ). $a=\Lambda$.$\supset$. a è Cls [p (γ) . Hp . p30 .$\supset$. Ts]

Però mi sembra che, senz'alcun inconveniente, si possa implicitamente ammettere la p (δ) nell'atto in cui si definisce la notazione « $a=\Lambda$ », sostituendo alla P

300. a è Cls .$\supset$:. $a=\Lambda$.=: b è Cls .$\supset_b$. $a\supset b$ Df

la p

·36. $a=\Lambda$.=: a è Cls : b è Cls .$\supset_b$. $a\supset b$ Df }300{

da cui, immediatamente,

·37. $a=\Lambda$.$\supset$. a è Cls [p36 .$\supset$. p]

Così facendo, si può ricorrere alla p37 per abbreviare l'enunciato di parecchie P del §1 successive alla P300; mentre la p (δ), essendo stata dimostrata mediante la p (γ) e questa mediante la P321, non si potrebbe legittimamente applicare che a P del §1 successive alla P321.

Ecco l'elenco completo delle P del §1 che si possono abbreviare mediante la p37 (*).

·38. $a=\Lambda$. b è Cls .$\supset$. $a\supset b$ }301{
·39. ——— . $b=\Lambda$.$\supset$. $a=b$ }302{
·40. ——— . b è Cls . $b\supset a$.$\supset$. $b=\Lambda$ }303{
·41. ——— . $a=b$.$\supset$. $b=\Lambda$ }304{
·42. ——— . b è Cls .$\supset$. $ab=\Lambda$ }305{
·43. ——— . x è a . $=\Lambda$ }308{
·44. ——— . b è Cls .$\supset$. $a\cup b=b$ }341{
·45. a,b è Cls . $a\cup b=\Lambda$.=. $a=\Lambda$. $b=\Lambda$ }342{
·46. $a=\Lambda$.=. a è Cls . $-\exists a$ }414{
·47. a è Cls . $a\supset\Lambda$.=. $a=\Lambda$ }438{

***

Per ultimo, accenno ad alcune semplificazioni prodotte in F_2§2 dalla modificazione proposta in questo Cap.

(*) Vedi nota precedente.

A cagione della p4 si può sopprimere la condizione « s è Cls »: nell'Hp di ciascuna delle P002·5 . 003·7·8 . 039·3, nell'Hp delle P015 . 016, mettendo come primo fattore « x è s », nell'Hp delle P003·10·11, trasportandola nel secondo membro della Ts.

Alla P003·1 si può premettere la p (a'), cioè

003·0. N_0 è Cls [P2·1 . p4 $.\supset.$ P]

A cagione della p10. si può sopprimere la condizione « b è N_0 » nell'Hp della P003·2. Ecc.

Cap. II. — « $\ni$ »

La notazione « $x \ni$ » (*) — che può esser letta « la classe degli x che soddisfanno alla condizione » ovvero, più brevemente, « gli x tali che » — si trova per la prima volta nella P

13. a è Cls $.\supset.$ $x \ni (x$ è $a) = a$ Df

la quale definisce, non la notazione « $x \ni$ », ma la « $x \ni (x$ è $a)$, dove « a è Cls ».

Pertanto, nell'uso della notazione « $x \ni$ » bisogna avvertire — se non si vogliono scrivere proposizioni prive di significato — di premetterla soltanto a notazioni del tipo « x è a », dove « a è Cls » (**), ovvero a notazioni che *già* furon ridotte a quel tipo.

*
* *

Ora, nella P

14. a,b è Cls $.\supset.$ $a \frown b = x \ni (x$ è a . x è $b)$ Df

(*) Per uniformità di scrittura adopero la notazione « $x \ni$ » invece della « $x\,\bar{\varepsilon}$ » usata nel F_2§1 o della « $x \backepsilon$ » usata nel F_2§2; il significato di queste tre notazioni è il medesimo.

(**) Per la p4, la condizione « a è Cls » è implicita nella notazione « x è a », quando questa rappresenta una P isolata od affermata simultaneamente con altre, non però nel caso attuale. In altre parole, senza mutare il significato della notazione « $x \ni$ », non si potrebbe sopprimere l'Hp della P13, perchè allora, ad es., si avrebbe « $x \ni (x$ è $1) = 1$ », mentre « (1) è Cls » e non « 1 è Cls ».

io noto che la riducibilità di « x è a . x è b » al tipo richiesto risulta più tardi dalle P

14'. a,b è Cls $.\supset.$ $ab = a \frown b$ Df
22. ——— $.\supset.$ ab è Cls Pp
54. ——— $.\supset:$ x è ab $.=.$ x è a . x è b

cui conviene aggiungere la p6.

Per eliminare questo inconveniente assumerei, invece, quale Df la p

·48. x è$(a \frown b)$ $.=.$ x è a . x è b Df

la quale non mi sembra abbisognare d'Hp (*).

Assunta poi quale Pp (**) la p

·49. a,b è Cls $.\supset.$ $(a \frown b)$ è Cls Pp

risulta dimostrabile la P14 ovvero, in attesa della P82, la p

·50. a,b è Cls $.\supset.$ $x \ni (x$ è a . x è $b) = a \frown b$
[Hp . p49 . P13 $.\supset.$ $x \ni [x$ è$(a \frown b)] = a \frown b$. p48 $.\supset.$ Ts]

Dopo ciò, per comodità di scrittura, enuncerei le convenzioni espresse dalla P14' e dalla p6.

*
* *

Analogo difetto presenta la P

103. a è Cls $.\supset.$ $-a = x \ni (x-$ è $a)$ Df

perchè la riducibilità di « $x-$ è a » al tipo richiesto risulta più tardi dalle P

104. a è Cls $.\supset:$ x è $-a$ $.=.$ $x-$ è a
105. ——— $.\supset.$ $-a$ è Cls Pp

cui conviene aggiungere la p12.

(*) Per la p4, l'Hp « a,b è Cls » è implicita nel 2° membro della p48; inoltre, finchè ad « $a \frown b$ » non si sostituisce « ab », la notazione « x è$(a \frown b)$ » è usata nel F_2 sol quando « a,b è Cls » [Cfr. con l'osservazione fatta a proposito della p7].

(**) Dalla p48 si potrebbe dedurre la p

x è a . x è b $.\supset.$ $(a \frown b)$ è Cls [p48 . 4 $.\supset.$ p]

ma da questa non si potrebbe dedurre la p49, nulla potendosi concludere nel caso in cui « $a \frown b$ » fosse una classe nulla.

Mi pare che questo difetto riuscirebbe eliminato assumendo, invece, quale Df la p

$\cdot 51 \;\; a \text{ è Cls} \,.\supset:\, x \text{ è}(-a) \,.=.\, x - \text{è } a$ Df

conservando quale Pp la P105 e dimostrando così la P103:

$[\, \text{Hp} \,.\, \text{P105} \,.\, \text{P13} \,.\supset.\, x \ni [x \text{ è}(-a)] = -a \,.\, \text{p51} \,.\, \text{P82} \,.\supset.\, \text{Ts} \,]$

Dopo ciò, per comodità di scrittura, enuncerei la convenzione espressa dalla p12.

*
* *

Analogo inconveniente presenta pure la P

$420. \;\; \iota x = y \ni (y = x)$ Df

perchè la riducibilità di «$y = x$» al tipo considerato risulta più tardi dalla P

$421. \;\; y \text{ è } \iota x \,.=.\, y = x$

cui conviene aggiungere le p19 . 21.

Per eliminare questo inconveniente assumerei, invece, quale Df la p

$\cdot 52. \;\; y \text{ è}(\iota x) \,.=.\, y = x$ Df

da cui si deduce la p

$\cdot 53. \;\; x \text{ è}(\iota x)$ $[\, \text{p52} \,.\supset.\, \text{p} = \text{P81} \,]$

(che differisce dalla p20 soltanto per le parentesi racchiudenti l' «ιx») e la p

$\cdot 21. \;\; (\iota x) \text{ è Cls}$ $[\, \text{p53} \,.\, 4 \,.\supset.\, \text{p} \,]$

La P420 si potrebbe allora dimostrare così:

$[\, \text{p21} \,.\, \text{P13} \,.\supset\, y \ni [y \text{ è}(\iota x)] = \iota x \,.\, \text{p52} \,.\, \text{P82} \,.\supset.\, \text{P} \,]$

Dopo ciò, per comodità di scrittura, enuncerei la convenzione espressa dalla p19.

*
* *

Analogo difetto presenta anche la P

$450. \;\; u \text{ è Cls} \,.\supset.\, \text{Cls}'u = \text{Cls} \frown x \ni (x \supset u)$ Df

perchè la riducibilità di «$x \supset u$» al tipo richiesto è accennata

più tardi incompletamente, come risulta da ciò che segue, mediante la P

$453. \;\; a,b \text{ è Cls} \,.\supset:\, b \supset a \,.=.\, b \text{ è Cls}'a$

Io assumerei invece quale Df la P

$451. \;\; a \text{ è Cls} \,.\supset:\, x \text{ è}(\text{Cls}'a) \,.=.\, x \text{ è Cls} \,.\, x \supset a$ Df

e dimostrerei poi le p

$\cdot 54. \;\; a \text{ è Cls} \,.\supset.\, (\text{Cls}'a) \text{ è Cls}$

$[\, \text{Hp} \,.\, \text{P21} \,.\, \text{P451} \,.\supset.\, a \text{ è}(\text{Cls}'a) \,.\, \text{p4} \,.\supset.\, \text{Ts} \,]$

$\cdot 55. \;\; a \text{ è Cls} \,.\supset.\, \text{Cls}'a = x \ni (x \text{ è Cls} \,.\, x \supset a)$

$[\, \text{Hp} \,.\, \text{p54} \,.\, \text{P13} \,.\supset.\, x \ni [x \text{ è } (\text{Cls}'a)] = \text{Cls}'a \,.\, \text{P451} \,.\, \text{P82} \,.\supset.\, \text{Ts} \,]$

*
* *

Ho esaminato così tutte le Df del F_2§1 in cui è fatto uso della notazione «$x \ni$» tranne le P461 e 462, delle quali non mi occupo perchè i simboli «$\cup$'» e «$\frown$'» in esse definiti non furono adoperati nel F_2§2.

Vediamo piuttosto l'uso fatto della notazione «$x \ni$» in alcune dimostrazioni del F_2§1.

La si trova per la prima volta nella Dem P

$82. \;\; x = y \,.\supset.\, y = x$

$[\, \text{P81} \,.\supset.\, x \text{ è}[z \ni (z = x)] \,.\, \text{Hp} \,.\supset.\, y \text{ è}[z \ni z = x] \,.\supset.\, \text{Ts} \,]$

Ma poichè la P82 precede la teoria degli «ι» (che incomincia con la P420), la riducibilità di «$z = x$» al tipo richiesto perchè abbia significato «$z \ni (z = x)$» non può nemmeno essere sospettata dal lettore del F_2§1; e perciò quella Dem riesce inesplicabile.

A me parrebbe vantaggioso, per non dir necessario, ordinare le proposizioni nel modo seguente: anzitutto, le p9 . 10, poi la P

$81. \;\; x = x$ $[\, \text{p9} \,.\supset:\, x \text{ è } a \,.\supset_a .\, x \text{ è } a \,.=.\, \text{p} \,]$

e le p52 . 53; enuncerei allora la P82 dimostrandola così:

$[\, \text{p53} \,.\, \text{Hp} \,.\, \text{p10} \,.\supset.\, y \text{ è}(\iota x) \,.\, \text{p52} \,.\supset.\, \text{Ts} \,]$ (*)

(*) Della P

$83. \;\; x = y \,.\, y = z \,.\supset.\, x = z$ $[\, \text{Hp} \,.\supset:\, x \text{ è } a \,.\supset.\, y \text{ è } a \,.\, z \text{ è } a :\supset.\, \text{Ts} \,]$

si potrebbe anche dare questa dimostrazione

$[\, \text{Hp} \,.\, \text{P82} \,.\, \text{p52} \,.\supset.\, y \text{ è}(\iota x) \,.\, y = z \,.\, \text{p10} \,.\supset.\, z \text{ è}(\iota x) \,.\, \text{p52} \,.\, \text{P82} \,.\supset.\, \text{Ts} \,]$

Poi la notazione stessa riappare nella dimostrazione della P

$$85.\quad a,b \text{ è Cls} \,.\, a = b \,.\!\supset\!.\, a \supset b$$

$$[\ \text{Hp} \,.\, x \text{ è } a \,.\!\supset\!.\, a \text{ è}[z \ni (x \text{ è } z)] \,.\, \text{P80} \,.\!\supset\!.\, b \text{ è}[z \ni (x \text{ è } z)] \,.\!\supset\!.\, x \text{ è } b \qquad (1)$$

$$\text{Hp} \,.\, (1) \,.\, \text{Export} \,.\!\supset\!:\, x \text{ è } a \,.\!\supset_x\!.\, x \text{ è } b : \supset .\, \text{Ts}\ ]$$

Ma perchè avesse significato « $z \ni (x$ è $z)$ », occorrerebbe che « x è z » fosse riducibile al tipo « z è u », dove « u è Cls »: le notazioni di cui è fatto uso in F_2§1 non mi pare consentano tale riduzione (*). Convien dunque rinunciare al proposito di dedurre la P85 dalla P80, accontentandosi di ricavarla dalla P16.

Lasciando da parte le dimostrazioni delle P463 . 464, relative ai simboli « ◡' » e « ⌒' » non adoperati nel F_2§2, la notazione « $x \ni$ » non si ritrova più che in ciascuna delle due dimostrazioni della P

$$503.\quad a,b \text{ è Cls} \,.\, u \text{ è } a\mathfrak{J}b \,.\, x,y \text{ è } a \,.\, x = y \,.\!\supset\!.\, xu = yu \qquad (**)$$

facendone uso che, per ragioni analoghe a quelle esposte a proposito della P85, non mi sembra legittimo.

Per poter dimostrare soddisfacentemente la P503, di cui è pur fatto uso nel F_2§2 (***), ritengo necessario definire la notazione « $a\mathfrak{J}b$ » altrimenti che con la P500. A questo partito conviene attenersi anche per altre più forti ragioni; ma di ciò mi occuperò in altro CAP., in cui proporrò un rifacimento di quello del F_2§1 intitolato « [J f] ».

Frattanto, un'osservazione mi sembra opportuna: le critiche al F_2§1, svolte in questo CAP., valgono in quanto non si voglia estendere l'uso della notazione « $x \ni$ » oltre il caso previsto dalla P13; esse cadrebbero, invece, se si convenisse di usarla, ogniqual-

(*) Bisognerebbe introdurre, definendolo, un simbolo che rappresentasse l'idea « classe cui appartiene »; attribuendo per un momento tale significato al simbolo « A » si avrebbe

$$(\varepsilon)\quad y \text{ è}(\text{A}x) \,.\!=\!.\, x \text{ è } y \qquad \text{Df}$$

e la (1) della dimostrazione della P85 diverrebbe

$$x \text{ è } a \,.\, \text{p}(\varepsilon) \,.\!\supset\!.\, a \text{ è}(\text{A}x) \,.\, \text{Hp} \,.\, \text{p10} \,.\!\supset\!.\, b \text{ è}(\text{A}x) \,.\, \text{p}(\varepsilon) \,.\!\supset\!.\, x \text{ è } b$$

Ma, per questo caso soltanto, non mette il conto di introdurre una nuova notazione, sia pur definita.

(**) Il cui enunciato ho semplificato nella p28.

(***) Vedi F_2§2 Dem1 P003·2. Nè, per ragioni analoghe a quelle esposte, in sua vece potrebbe accettarsi la Dem2.

volta l'occasione se ne presentasse, ad esprimere l'idea « la classe degli x che soddisfanno alla condizione ». Ma allora essa dovrebb'essere annoverata tra le idee *primitive*; è dunque preferibile introdurre nel F_2§1 le modificazioni da me proposte.

CAP. III. — « ι Elm $\overline{\iota}$ »

Anzitutto, dimostro alcune altre proprietà del simbolo « ι » che nel F non sono enunciate e di cui faccio uso in questo scritto.

$$\cdot 56.\quad \exists(\iota x) \qquad [\ \text{p53} \,.\, 23 \,.\supset \text{p}\ ]$$

$$\cdot 57.\quad a \text{ è Cls} \,.\!\supset\!.\!\cdot.\, a \supset \iota x \,.\!=\!:\, y \text{ è } a \,.\!\supset_y\!.\, y = x$$

$$[\ \text{Hp} \,.\, \text{p21} \,.\, \text{P12} \,.\, \text{p52} \,.\supset .\, \text{p}\ ]$$

$$\cdot 58.\quad a = \iota x \,.\!=\!:\, x \text{ è } a : y \text{ è } a \,.\!\supset_y\!.\, y = x$$

$$[\ \text{p21} \,.\, a = \iota x \,.\, \text{p30} \,.\!\supset\!.\, a \text{ è Cls} \qquad (1)$$

$$x \text{ è } a : y \text{ è } a \,.\!\supset_y\!.\, y = x :\supset .\, x \text{ è } a \,.\, \text{p4} :\supset .\, a \text{ è Cls} \qquad (2)$$

$$a \text{ è Cls} \,.\, \text{p57} \,.\, \text{P422} \,.\!\supset\!.\, \text{p} \qquad (3)$$

$$(1) \,.\, (2) \,.\, (3) \,.\!\supset\!.\, \text{p}\ ]$$

$$\cdot 59.\quad \iota y = \iota x \,.\!=\!.\, y = x$$

$$[\ (\iota y|a)\, \text{p58} \,.\!=\!.\!\cdot.\, \iota y = \iota x \,.\!=\!:\, x \text{ è}(\iota y) : y \text{ è}(\iota y) \,.\!\supset_y\!.\, y = x \qquad (1)$$

$$(1) \,.\, \text{p52} \,.\, 53 \,.\, \text{P82} \,.\supset .\, \text{p}]$$

*
* *

Mediante la p

$$\cdot 60.\quad a \text{ è Elm} \,.\!=\!:\, a \text{ è Cls} \,.\, \exists a : x,y \text{ è } a \,.\!\supset_{x,y}\!.\, x = y \qquad \text{Df}$$

definisco la notazione « a è Elm » in cui appare il nuovo simbolo « Elm », che potrà essere letto « elemento ».

Il sig. C. Burali-Forti, nella sua *Nota* intitotata *Le classi finite* (*), introdusse il simbolo « Un » dandone la Df (§1P13).

$$\text{Un} = \text{K}\text{-}\iota\Lambda \cap \overline{x\varepsilon}\,\{ y\varepsilon x \,.\!\supset_y\!.\, \iota y = x \} \qquad \text{Df}$$

dalla quale risulta che l'idea « Un » non dipende affatto dal concetto di numero. A togliere ogni equivoco in proposito, adopero il simbolo « Elm » invece dell' « Un », con lo stesso significato.

Dalla p60 deduco alcune proprietà del simbolo « Elm », delle

(*) *Acc. R. delle Scienze* di Torino, 1896.

quali mi varrò tosto ad abbreviare l'enunciato di qualche P del F; tali abbreviazioni giustificano l'introduzione del nuovo simbolo.

$\cdot 61.\ (\iota x)$ è Elm
 [p2 . 52 $.\supset:$ y, z è (ιx) $.=.\ y=x\ .\ z=x$ (1)
 (1) . P82 . 83 $.\supset:$ ——— $.\supset_{y,z}.\ y=z$ (2)
 p21 . 56 . (2) $.\supset.$ p]

$\cdot 62.\ x$ è $a\ .\supset.\!\cdot.\ a$ è Elm $.=:\ y$ è $a\ .\supset_y.\ y=x$
 [Hp . p4 . 23 $.\supset.\ a$ è Cls . $\exists a$ (1)
 Hp . (1) . p60 $.\supset.\!\cdot.\ a$ è Elm $.=:\ x,y$ è $a\ .\supset_{x,y}.\ x=y$ (2)
 Hp . (2) . P82 $.\supset.$ p]

$\cdot 63.\ a=\iota x\ .=.\ x$ è a . a è Elm [p58 . 62 $.\supset.$ p]

* * *

La P

430. a è Cls . $\exists a : x,y$ è $a\ .\supset_{x,y}.\ x=y\ :\supset:\ x=\text{ɿ}a\ .=.\ a=\iota x$ Df

definisce nel F_2§1 la notazione « $x=\text{ɿ}a$ », nella quale è fatto uso per la prima volta del simbolo « ɿ » (*).

Preferisco, perchè più breve e di più pronta comprensione, la Df

$\cdot 64.\ a$ è Elm $.\supset:\ x=\text{ɿ}a\ .=.\ x$ è a Df {430}

Il significato della notazione « $x=\text{ɿ}a$ » è il medesimo; infatti, dalla p64 si deduce la p

$\cdot 65.\ a$ è Elm $.\supset:\ x=\text{ɿ}a\ .=.\ a=\iota x$ [p63 . 64 $.\supset.$ p]

che diviene la P430 se all'Hp si sostituisce il suo significato espresso dalla p60.

Mediante la p60, l'enunciato della P431 si abbrevia e diviene

$\cdot 66.\ a$ è Elm $.\supset.\ (\text{ɿ}a)$ è a {431}
 [Hp . x è a . p61 $.\supset.\ x$ è a . $x=\text{ɿ}a$. p10 $.\supset.$ Ts (1)
 Hp . p60 $.\supset.$ Ea . (1) $.\supset.$ Ts]

Alla P

432. $\text{ɿ}(\iota x)=x$ [p61 . 66 $.\supset.\ \text{ɿ}(\iota x)$ è (ιx) . p52 $.\supset.$ p]

(*) Il simbolo « ɿ » fu adoperato nel F_2§2 in sostituzione, e con lo stesso significato, del simbolo « $\bar{\iota}$ », usato nel F_2§1.

si può aggiungere la p

$\cdot 67.\ a$ è Elm $.\supset.\ \text{ɿ}(\iota a)=a$
 [Hp . p21 . 60 $.\supset.\ \iota(\text{ɿ}a)$, a è Cls (1)
 Hp . p64 . 52 $.\supset: x$ è $[\iota(\text{ɿ}a)]\ .=.\ x$ è a : (1) . P17 $.\supset.$ p]

Cap. IV. — « ; : »

L'idea « la coppia formata da x ed y » è assunta nel F_2§1 come primitiva e vi è rappresentata con « $(x;y)$ » (*). La prima P in cui è fatto uso di tale notazione è la P

71. $x;y=a;b\ .=.\ x=y\ .\ a=b$ Df

data nel F_2§1 come Df dell'eguaglianza di due coppie; da questa P risulta che, nella *coppia*, oltre agli oggetti che la compongono si deve considerare il loro ordine.

Però, avendo definito l'eguaglianza in generale, mediante la P80 del F_2§1 (o la p9 di questo scritto), mi sembra che non sia poi lecito stabilire per Df il significato di alcuna eguaglianza particolare.

Ciò bene avvertì il sig. C. Burali-Forti quando, recentemente, propose una dimostrazione della P71 (**); ma francamente, la sua dimostrazione non mi persuade, *a priori*, per due ragioni.

Anzitutto, egli non ricorre ad alcuna P in cui entri l'idea di coppia: ora io domando: « è possibile dimostrare una proprietà di una notazione, senza conoscere alcuna proprietà della notazione stessa? »

Poi, egli adopera il simbolo « ϱ » in casi non previsti dalla P13 [vedi *Cap.* II] e perciò, dal punto di vista formale, posso dichiarare di non comprendere il significato della sua dimostrazione.

* * *

Se « a, b è Cls », con « $a:b$ », che si può leggere « le coppie di a e di b » (da non confondersi con la coppia « $a;b$ »), rap-

(*) Veramente, nel F_2§1 è rappresentata con « (x,y) », mentre la notazione $(x;y)$ fu adoperata con egual significato soltanto nel F_2§2.

(**) RdM, t. VI, p. 65, P82a.

presento la classe cui appartengono tutte e soltanto le coppie il cui primo oggetto è un a ed il cui secondo oggetto è un b (*). Ciò è espresso dalla p

·68. $(x ; y)\,\text{è}\,(a : b) . = . x\,\text{è}\,a . y\,\text{è}\,b$ Df

dalla quale si deducono le p

·69. $(x ; y)\,\text{è}\,(\iota x : \iota y)$ [p53 . 68 . $\supset$. p]
·70. $x ; y = u ; v . \supset . x = u . y = v$
[p69 . Hp . p10 . $\supset$. $(u ; v)\,\text{è}\,(\iota x : \iota y)$. p68 . 52 . P82 . $\supset$. Ts]
·71. $x = u . y = v . \supset . x ; y = u ; v$
[$(x ; y)\,\text{è}\,(a : b)$. p68 . $\supset$. $x\,\text{è}\,a . y\,\text{è}\,b$. Hp . p10 . $\supset$.
$u\,\text{è}\,a . v\,\text{è}\,b$. p68 . $\supset$. $(u ; v)\,\text{è}\,(a : b)$ (1)
(1) . p9 . $\supset$. p]
·72. $x ; y = u ; v . = . x = u . y = v$ [= p70 . 71]

La p72, ora dimostrata, è appunto la P71, dianzi citata e commentata.

* * *

Se diamo significato alla notazione « $a : b$ », soltanto quando « $a , b\,\text{è}\,\mathrm{Cls} . \exists a . \exists b$ », allora la p69 si può risolvere rispetto ad « $a : b$ ».

$a , b\,\text{è}\,\mathrm{Cls} . \exists a . \exists b . \supset$. p73 . 74.
·73. $(a : b)\,\text{è}\,\mathrm{Cls}$
[$x\,\text{è}\,a . y\,\text{è}\,b$. p68 . $\supset$. $(x ; y)\,\text{è}\,(a : b)$. p4 . $\supset$. p (1)
Hp . (1) . $\supset$. p]
·74. $a : b = (x ; y)\,\text{è}\,(x\,\text{è}\,a . y\,\text{è}\,b)$
[p73 . P13 . $\supset$. $(x ; y)\,\ni\,[(x ; y)\,\text{è}\,(a : b)] = a : b$. P82 . p68 . $\supset$ p]

Son pur degne di nota le p

·75. $\iota x : \iota y = \iota\,(x ; y)$
[$(u ; v)\,\text{è}\,(\iota x : \iota y)$. p68 . 52 . $\supset$. $u = x . v = y$. p71 . $\supset$. $u ; v = x ; y$ (1)
p58 . $\supset$: p . = . p69 . (1)]

(*) Nelle bozze del fascicolo della RdM d'imminente pubblicazione, vidi proposta tale notazione, con tale significato; però ivi si trovava enunciata la sola p74, che a me non piace assumere quale Df per le ragioni addotte nel *Cap.* II relativamente ad altre Df del F_2§1.

·76. $x ; y = \text{ɿ}(\iota x : \iota y)$
[p75 . 63 . $\supset$. $(\iota x : \iota y)\,\text{è}\,\mathrm{Elm}$. p65 . $\supset$. p = p75]

la quale mostra che, assumendo quale primitiva la « $a : b$ », si potrebbe con questa definire la « $x ; y$ ».
Si notino ancora le p

·77. $\iota x : \iota y = \iota u : \iota v . = . x ; y = u ; v$
[$\iota x : \iota y = \iota u : \iota v$. p75 . $=$. $\iota(x ; y) = \iota(u ; v)$. p59 . $=$. $x ; y = u ; v$]
·78. $a , b , c , d\,\text{è}\,\mathrm{Cls} . \exists a . \exists b . a ; b = c ; d . \supset. a : b = c : d$
[Hp . p70 . $\supset$. $a = c . b = d$ (1)
$(x ; y)\,\text{è}\,(a : b)$. p68 . $=$. $x\,\text{è}\,a . y\,\text{è}\,b$. Hp . (1) . P17 . $=$.
$x\,\text{è}\,c . y\,\text{è}\,d$. p68 . $=$. $(x ; y)\,\text{è}\,(c : d)$ (2)
Hp . p73 . 29 . (2) . P17 . $\supset$. Ts]

Sondrio, 1899.

ALESSANDRO PADOA.

SUI PRECURSORI DELLA LOGICA MATEMATICA

Il Prof. Gino Loria in un suo articolo intitolato: *La logique mathématique avant Leibniz* (Bull. de Darboux, a. 1894, t. 18, p. 107-112), dedicato specialmente a dar notizia delle opere di Pierre Herigone, ha giustamente osservato (p.110) che sebbene in questo scrittore si trovi un certo numero di simboli per indicare dei concetti astratti, tuttavia esso non ha fatto alcun tentativo per ridurre al minimo il numero dei simboli necessari per esporre una teoria, mentre in questa riduzione è contenuto il problema fondamentale della logica matematica.

In questa nuova scienza, i simboli che si usano rappresentano idee primitive, ed in tal caso il loro significato è determinato dalle proposizioni primitive, oppure sono definiti per mezzo dei simboli già noti. In ogni caso il linguaggio ordinario è reso superfluo. Al contrario negli scritti di Herigone, come in quelli degli scrittori di *Pasigrafia*, relativamente numerosi nei secoli scorsi, i simboli sono soltanto sigle od abbreviazioni le quali sostituiscono parole isolate o frasi del linguaggio ordinario. Simboli dello stesso genere di questi erano usati dagli alchimisti e dagli astrologi, ed ai giorni nostri si adoperano in molti dizionari (specialmente inglesi), o come segni convenzionali nelle carte geografiche e topografiche, o come simboli di abbreviazione nei sistemi di stenografia, ecc.

In altre parole mentre tutte le altre pasigrafie non sono che metodi di abbreviare parole o frasi del linguaggio ordinario senza modificare affatto la struttura dei ragionamenti, la logica matematica è uno strumento delicato e di somma precisione, col sussidio del quale si può compiere (ed è stato già fatto per i fondamenti dell'aritmetica, della geometria proiettiva, etc.) l'analisi dei concetti che stanno a base delle scienze matematiche.

Questa differenza caratteristica della logica matematica, sebbene sia scritta in modo chiaro nel F, non è finora molto nota. (P. es. lo Schröder, nei Rend. del Congr. di Zurigo p. 158 e 161, considera il simbolo del F: $D(m,n)$, dove m, n sono dei numeri interi, soltanto come una abbreviazione stenografica della frase « *massimo comun divisore di m e di n* »).

La parte più interessante dell'opera di Herigone (come osserva il Loria, p. 109) consiste nel metodo di rappresentare le dimostrazioni. Ciò, del resto, egli stesso afferma nella sua prefazione (*Cursus Mathematicus*, t. 1 Parisiis, a. 1644), dicendo:

« J'ay inventé une nouvelle methode de faire les demonstrations, briefve « et intelligible, sans l'usage d'aucune langue ».

« La demonstration s'entretient depuis son commencement jusqu'à la con- « clusion, par une suite de consequences legitimes, necessaires et imme- « diates, contenue chacune dans une petite ligne, lesquelles se peuvent re- « soudre facilement en syllogismes... ».

Questa parte del simbolismo di Herigone è però molto povera: i suoi simboli sono: hyp = « dall'ipotesi si deduce », constr = « dalla costruzione si ha », concl = « conclusione », arbitr = « prendendo arbitrariamente », 20.1 = « dalla proposizione 20 del primo libro si deduce », e qualche altro raramente usato: essi erano comuni nei secoli scorsi, anche anteriormente ad Herigone, nelle note che si ponevano in margine agli Elementi di Euclide, per chiarirne le dimostrazioni.

È mio intento di render conto, in questa nota, di un simbolismo dello stesso genere, ma più complicato e preciso, dovuto a J o h a n n P e l l (a. 1610–1685) e da lui adoperato sistematicamente nella sua opera: *Introductio in Algebram*, Londini a. 1668 (una prima edizione era comparsa in lingua tedesca, Tigurii, 1659).

Non mi è stato possibile consultare l'opera originale di Pell. Mi limito quindi a dare un'idea del suo metodo, come esso risulta nella esposizione svolta da Wallis nel t. 2 p. 238-246 delle sue opere (Londini a. 1693).

Esso consiste nell'indicare simbolicamente le operazioni da eseguire su una o più eguaglianze per ottenerne una nuova. Pell indica le diverse eguaglianze coi numeri 1, 2, 3, ...: occorrendogli distinguere questi simboli dai numeri interi 1, 2, 3, ... indica questi ultimi con 1·, 2·, 3·, ...

I simboli che egli adopera sono $+$, $-$, $\times$, $\div$ (corrispondente al / del F), che hanno il significato di sommare membro a membro, etc.; ed inoltre i due simboli per indicare le operazioni *involuzione* (elevazione a potenza) ed *evoluzione* (estrazione di radice) da eseguirsi sui due membri di una eguaglianza, che, non potendoli riprodurre, indico coi simboli corrispondenti del F, ↑, √.

Così egli scrive:

29 ↑ 2·	(elevando ambo i membri della 29 a quadrato)
12 , 38	(dalla 12, e dalla 38 si deduce)
44 — 41	(sottraendo membro a membro dalla 44 la 41)
62 + 63 + 64	(sommando membro a membro le 62, 63, 64)
57 ÷ 10·	(dividendo ambo i membri della 57 per 10)
90 √ 2·	(estraendo la radice quadrata dai due membri della 90)
$m\,ab$ — 13	(sottraendo ambo i membri della 13 da $m\,ab$)
18 × $4mn$	(moltiplicando la 18 per $4mn$)
82 + − +	(trasportando nella 82, due termini dal 1o al 2o membro)
133 + —	(trasportando un termine dal 1o al 2o membro, ed uno dal 2o al 1o, della 133);

e così via. Queste indicazioni stanno scritte a sinistra della nuova eguaglianza che si tratta di dimostrare.

Wallis attribuisce inoltre a Pell l'uso del simbolo ∴ (ergo) come simbolo di *illazione*, che ancora oggi è frequentemente usato dagli scrittori inglesi: questo segno sta scritto soltanto tra due eguaglianze o due diseguaglianze (rovesciato) per dire che dalla prima si deduce la seconda. Eccone alcuni esempi:

(p.283) $a+x=R \because aa+2ax+xx=RR$

(p.284) $aa-bb>0 \because aa>bb \because a>b>0$

In tempi più recenti, altri matematici hanno sentito il bisogno di notazioni speciali per rendere più brevi e chiare le dimostrazioni. Ad esempio il Prof. P. Mansion, in una sua *Note on a universal Analitical Language* (The Messeng. of Math. a. 1875 t. 4 p. 166) propone l'introduzione di un simbolismo analogo a quello di Pell. Egli scrive:

$\int(3)$	(integrando la equazione differenziale (3))
$(4)+(2)$	(sommando le due equazioni (4) e (2))
$\frac{(8)+(10)}{2}$	(sommando la (8) e la (10) e dividendo per (2))
$D_x(6)$	(derivando rispetto ad x ambo i membri della (6))
$\frac{1}{a}\int(9)$	(dividendo per a ed integrando la (9))

S(6) & (7) $x=0$, $u=Fy$, $\frac{du}{dx}=fy$ (sostituendo nella (6) e nella (7) 0, Fy, fy in luogo di x, u, $\frac{du}{dx}$).

Quest'ultimo simbolo si trova già nel F ed ha in esso un significato determinato e preciso (|).

Come Pell, il Mansion scrive queste formole a sinistra delle eguaglianze che vuol dimostrare. Egli aggiunge infine che Gauss nei suoi manoscritti ha probabilmente adoperato una notazione analoga.

Mi sono fermato alquanto su questo genere di simbolismo, perchè, sebbene quello che è attualmente adoperato nel F permetta di scrivere completamente ogni dimostrazione, tuttavia alcune di queste si potrebbero notevolmente abbreviare e chiarire, introducendo nuovi simboli analoghi a quelli adoperati da Pell e dal Mansion, o meglio ad alcuni che già si trovano nel F. (Si vedano p. es. i simboli « Transp », « Syll », « Cmp », « Export » etc. del F, N1),

***

Il Prof. Gino Loria nell'articolo sopra citato accenna pure, in una nota, che in L. N. M. Carnot si può trovare un sistema di simboli analogo a quello della Logica matematica. Mi sembra utile accennare in breve il metodo di questo A. che costituisce un tentativo di analisi logica delle idee della geometria. Esso è esposto diffusamente nel suo libro: *De la corrélation des figures de géométrie*, Paris an IX=1801.

In questo lavoro egli ha introdotto delle abbreviazioni « qui pourraient servir à exprimer brievement un grand nombre de propositions, qui ne peuvent être énoncées que par de longues phrases en langage ordinaire. On le ramenerait à une sorte d'expressions techniques et uniformes, qui auraient plusieurs avantages » (p. 51).

Le abbreviazioni di L. Carnot corrispondono a simboli di *proprietà* (F_2 §1 p. 21); cioè un unico simbolo posto dopo (o sopra, o fuso insieme) alle lettere variabili sta per indicare il verbo (ε) seguito dal nome di una classe.

Egli indica i punti colle lettere maiuscole, A, B, C, ... (p. 40).

$\overline{AB}$, $\widehat{AB}$ significano il segmento AB, l'arco di cerchio AB.

$\overline{BCD}$ significa: i punti B, C, D sono in linea retta, ed il punto C sta tra i punti B e D.

$\overline{AB} \cdot \overline{CD}$ è il punto d'incontro delle rette indefinite AB, CD (p. 41).

$\widehat{ABCD}$ i quattro punti A B C D stanno sullo stesso arco di cerchio nell'ordine A, B, C, D.

$\underline{\widehat{AB} \cdot \widehat{CD}}$ è il punto d'incontro dei due archi $\widehat{AB}$, $\widehat{CD}$.

$F\,\overline{AB} \cdot \overline{CD}$ è la retta che passa per i punti F e $\overline{AB} \cdot \overline{CD}$ (p. 42).

=¦= è il segno di *equipollenza* che indica l'identità di due oggetti qualunque; esso, a differenza del segno = che è applicabile alle sole quantità reali, è applicabile ai punti, alle equazioni, alle formule, etc. (p. 43).

$A\hat{B}C$ è l'angolo formato dalle rette AB , BC.

$\overline{AB} \wedge \overline{CD}$ —————————————— AB CD.

$\underline{\wedge}ABC$ significa: i tre punti A B C formano un triangolo.

$\varDelta ABC$ ——————————————————————— rettangolo

$\overline{\overline{ABC}}$ è l'area del triangolo ABC.

Il simbolo $\supset$ è sostituito dalla parola *donne*, o *donnent* (in corsivo).

Con queste notazioni l'A. è in grado di scrivere completamente in simboli molte proposizioni di Geometria.

Eccone alcuni esempi:

(p. 51) $\varDelta ABC$ *donne* $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$

(p. 54) $\underline{\wedge}ABC$, $\underline{\wedge}BDE$, $\overline{ADB}$, $\overline{BEC}$, *donnent*

$$(\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2) . \overline{BE} . \overline{BD} = (\overline{DE}^2 - \overline{BE}^2 - \overline{BD}^2) . \overline{AB} . \overline{BC}$$

È però da notarsi che la corrispondenza tra i simboli dell'A. ed il linguaggio ordinario che io ho dato, è soltanto approssimativa, e che inoltre l'A. introduce frasi complete del linguaggio ordinario allorquando gli si presentano parti di proposizioni che non possono essere scritte coi soli simboli da lui introdotti. P. es.:

(p. 52) *Cir.* ABCD , A, B, C, D *rangés comme on veut*, $\overline{AD} \cdot \overline{BC}$ =¦= K, *donne*

$$\overline{AK} . \overline{DK} = \overline{BK} . \overline{CK}$$

(p. 127) A, B, C, D, *rangés à volonté sur un plan, donnent*,

1o. $\overline{AB} . \overline{D\,\overline{AB} \cdot \overline{CD}} . \overline{C\,\overline{AC} \cdot \overline{BD}} = \overline{CD} . \overline{A\,\overline{AC} \cdot \overline{BD}} . \overline{B\,\overline{AB} \cdot \overline{CD}}$

. . . .

5o. $\overline{\overline{AD\,\overline{AB} \cdot \overline{CD}}} . \overline{\overline{BC\,\overline{AB} \cdot \overline{CD}}} :: \overline{\overline{AD\,\overline{AC} \cdot \overline{BD}}} : \overline{\overline{BC\,\overline{AC} \cdot \overline{BD}}}$

Di queste ultime due proposizioni (*formules techniques*) ecco la traduzione in linguaggio ordinario:

« Les trois côtés d'un triangle quelconque étant prolongés indéfiniment, si l'on mène une transversale indéfinie qui les coupe tous trois il résultera de cette construction, sur chacun des côtés du triangle, deux segments. Or de ces six segments, le produit formé de trois d'entre eux, comme facteurs, est égal au produit formé des trois autres; en prenant ces facteurs de manière qu'il n'en entre pas deux dans le même produit qui aient pour extrémités un même angle du triangle ou un même point de la transversale. »

« Dans tout quadrilatère complet, si l'on mène les trois diagonales, les deux triangles qui ayant pour sommet commun l'une des extrémités de l'une des trois diagonales, et pour bases respectives les deux autres diagonales, sont entre eux comme les deux triangles qui, respectivement appuyés sur les mêmes bases, ont pour sommet commun l'autre extrémité de la première diagonale. »

La complicazione della interpretazione col linguaggio ordinario di questi teoremi, spiega a sufficienza l'utilità del simbolismo di Carnot.

Giovanni Vacca

SUI NUMERI IRRAZIONALI

Nota di G. PEANO.

Le proprietà dei numeri irrazionali sono note da tempo antico: poichè il libro X d'Euclide contiene proposizioni interessantissime su essi; se ne può vedere la versione in simboli ideografici in RdM t. 2 p. 7.

Alcuni A. attribuiscono a Platone degli studi sugli irrazionali (Baltzer, Elem. d. Mathem. a. 1885 p. 100; Encyclopl. p. 49). Invero nei dialoghi di questo filosofo trovansi qua e là dei termini matematici, ma riuniti in modo così incerto da farli ritenere come parole difficili con cui un interlocutore cerca confondere l'avversario; all'incirca come nei giornali politici del giorno d'oggi sta scritto *incommensurabile* invece di *grandissimo*. Il passo più volte citato, nella *Πολιτεία* VIII 546 è considerato dai commentatori Jowett and Campbell, Oxford a. 1894, come un *riddle*. Al più da un passo del *Θεαιτήτος* 143 E, si può dedurre $\sqrt{8}<3$, e ciò parmi la cosa più importante contenuta in quelle opere su questo soggetto.

In Euclide non sono considerati che irrazionali quadratici, cioè ragione di due segmenti che si deducono l'uno dall'altro colla riga e col compasso. L'esistenza di questi irrazionali è conseguenza della costruibilità di questi segmenti. Quindi nel loro concetto stanno inclusi dei postulati geometrici, non ancora ben analizzati, poichè l'analisi dei principii della Geometria, e specialmente della Euclidea, è meno avanzata dell'analisi dei concetti aritmetici.

Pare che Apollonio abbia considerati gli irrazionali che provengono dall'inserzione di più medie geometriche, cioè dall'estrazione di radici d'indice qualunque, in un libro di cui tentò la ricostruzione il Woepke, servendosi d'un manoscritto arabo (*Mémoires des savants étrangers*, a. 1856 p. 694). Ma nessun teorema su questi irrazionali è pervenuto fino a noi.

Solo ai nostri tempi, per opera di Matematici in gran parte viventi, nello studio di importanti questioni analitiche, si è vista la necessità di dare la definizione generale del numero reale, razionale o irrazionale, Q. La definizione antica, che si potrebbe dire Euclidea:

numero reale = rapporto di due grandezze

esige l'analisi dell'idea di « grandezza »; e in questa analisi, fatta da più A. e in F_1IV dal prof. Burali-Forti coi simboli ideografici, si incontrano precisamente le stesse difficoltà che nel definire direttamente il numero reale; del resto in geometria un passo equivalente a quello che costituisce la definizione del numero reale in generale è rappresentato da un postulato ben noto, detto postulato di Dedekind.

§1.

Trattandosi solo di radici, ad es. quadrate, si può assumere per definizione

$\cdot 1 \quad a \varepsilon \mathrm{R}^2 . \supset . \sqrt{a} = \iota\, \mathrm{R} \frown x \ni (x^2 = a)$ Df

« essendo a un razionale quadrato, con $\sqrt{a}$ si intende quel razionale che elevato a quadrato dà a ». E se $a - \varepsilon\, \mathrm{R}^2$, senza definire $\sqrt{a}$, si può definire la relazione $b > \sqrt{a}$:

$\cdot 2 \quad a, b \varepsilon \mathrm{R} . a - \varepsilon \mathrm{R}^2 . \supset : b > \sqrt{a} . = . b^2 > a$ Df

seguendo Bertrand, *Traité d'Arith.* a. 1851 p. 197:

« On dit qu'un nombre est plus grand ou plus petit que $\sqrt{N}$ suivant que son carré est plus grand ou plus petit que N. »

Si può pure definire la « $\sqrt[n]{a}$, calcolata a meno d'un'unità », che indicheremo col simbolo $\mathrm{E}\sqrt[n]{a}$, avvertendo che i segni E e $\sqrt{}$ non si possono ancor separare:

$\cdot 3 \quad n \varepsilon \mathrm{N}_1 . a \varepsilon \mathrm{R} . \supset . \mathrm{E} \sqrt[n]{a} = \max \mathrm{N}_0 \frown x \ni (x^n \leqq a)$ Df

e così via. Ma la cosa si va rapidamente complicando.

Kronecker, senza definire gli irrazionali in generale, sviluppò la teoria completa degli irrazionali algebrici. Vedasi pure Drack, *Introd. à ... l'algèbre sup.*, Paris a. 1895 p. 123-332. Si può notare che per questa via il teorema che « ogni equazione di grado n ha n radici » si riduce ad una identità, cioè è all'incirca la definizione stessa dell'irrazionale algebrico (p. 171). Questi studii interessanti meritano certo di essere tradotti in simboli ideografici. Però per l'uso pratico e per l'insegnamento attuale tale via si presenta non intuitiva ed estremamente complicata.

D'altronde io non veggo difficoltà nella definizione generale di Q; varie definizioni sono state date, che paionmi del tutto soddisfacenti sia sotto l'aspetto del rigore che quello della semplicità; e se sopra esse tanto si è discusso e si discute tuttora, ciò verte sulla incerta interpretazione di qualche termine del linguaggio ordinario, o su ragioni didattiche.

La riduzione delle definizioni relative agli irrazionali, in simboli ideografici, fu pubblicata nel mio opuscolo: *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, a. 1889 p. 15. A causa della sua brevità, e per dispensare il lettore dalla ricerca di quell'opuscolo, qui la riproduco.

Rationalium Systemata, Irrationales.

Explicatio. Si $a \varepsilon$ K R, signum T a legitur *terminus summus*, vel *limes summus classis a*. Supra hoc novum ens relationes ac operationes tantum definimus.

Definitiones.

1. $a \varepsilon \mathrm{K\,R} . x \varepsilon \mathrm{R} : \supset :: x < \mathrm{T}a . = \therefore a . \ni > x : - = \Lambda.$

2. $a\,\varepsilon\,\mathrm{KR}\,.\,x\,\varepsilon\,\mathrm{R}\,:\supset\,:::\,x=\mathrm{T}\,a\,.=\,.\because.\,a\,.\,\ni\,>x\,:\,=\Lambda\,::\,u\,\varepsilon\,\mathrm{R}\,.\,u<x\,:\supset_u\,.\because.\,a\,.\,\ni\,>u\,:-=\Lambda.$

3. $a\,\varepsilon\,\mathrm{KR}\,.\,x\,\varepsilon\,\mathrm{R}\,:\supset\,.\because.\,x>\mathrm{T}\,a\,.=:\,x-<\mathrm{T}\,a\,.\,x-=\mathrm{T}a.$

Theorema.

4. $x\,\varepsilon\,\mathrm{R}\,.\supset\,::\,x=.\because.\,\mathrm{T}:\mathrm{R}\,.\,\ni<x.$

Explicatio. Signum Q legitur *quantitas*, numerosque indicat reales positivos, rationales aut irrationales, 0 et ∞ exceptis.

Definitiones.

5. $\mathrm{Q}=[x\,\varepsilon](a\,\varepsilon\,\mathrm{KR}:a-=\Lambda:\mathrm{R}.\ni>\mathrm{T}\,a\,.-=\Lambda:\mathrm{T}\,a=x\,.\because.-=\Lambda).$

6. $a,b\,\varepsilon\,\mathrm{Q}\,.\supset\,::\,a=b\,.=.\because.\,\mathrm{R}\,.\,\ni<a:=:\mathrm{R}\,.\,\ni<b.$

7. $a,b\,\varepsilon\,\mathrm{Q}\,.\supset\,::\,a<b\,.=.\because.\,\mathrm{R}\,.\,\ni>a\,.\,\ni<b:-=\Lambda.$

8. $a,b\,\varepsilon\,\mathrm{Q}\,.\supset:b>a\,.=.\,a<b.$

Theoremata.

9. $a\,\varepsilon\,\mathrm{Q}\,.\supset\,.\because.\,\mathrm{R}\,.\,\ni<a:-=\Lambda.$

10. $a\,\varepsilon\,\mathrm{Q}\,.\supset\,.\because.\,\mathrm{R}\,.\,\ni>a:-=\Lambda.$

11. $\mathrm{R}\supset\mathrm{Q}.$

Definitiones.

12. $a,b\,\varepsilon\,\mathrm{Q}\,.\supset.\,a+b=\mathrm{T}[z\,\varepsilon]([(x,y)\,\varepsilon]:x,y\,\varepsilon\,\mathrm{R}\,.\,x<a\,.\,y<b\,.\,x+y=z\,.\because.-=\Lambda).$

13. $a,b\,\varepsilon\,\mathrm{Q}\,.\supset.\,ab=\mathrm{T}[z\,\varepsilon]([(x,y)\,\varepsilon]:x,y\,\varepsilon\,\mathrm{R}\,.\,x<a\,.\,y<b\,.\,xy=z\,.\because.-=\Lambda).$

Ut valeant hae definitiones, demonstrandum est subsistere propositiones 12 et 13, si $a, b\,\varepsilon\,\mathrm{R}$.

Subtractionem et divisionem ut operationes inversas additionis et multiplicationis definire licet.

§2

Nei dieci anni trascorsi da questa prima applicazione della Logica matematica ad oggi, il simbolismo si è alquanto trasformato.

Avendo il segno $<$ il valore di « è minore di », nel lavoro del 1889 si è rappresentato con $\ni<$ l'espressione « minore di », sicchè $\varepsilon\ni<$ ritorna a valere $<$. Ma, per diminuire il numero delle convenzioni, questa notazione non fu più in seguito usata, sicchè la classe « minore di a » indicata allora con « $\ni<a$ » è ora indicata colla scrittura $x\ni(x<a)$.

Invece di $a-=\Lambda$ (la classe a non è la classe nulla), si è introdotta la notazione $\exists\,a$ (esistono degli a). Vedasi $\mathrm{F}_2\mathrm{N}1$ nota alla P400.

Si è cambiata la forma del segno K, trasformato in Cls; come pure al segno d'inversione, allora indicato colle parentesi quadre, sicchè $[x\,\varepsilon]$ di quel lavoro ora si scrive $x\ni$. Il segno aritmetico T si è scritto poi sotto la forma l' (limite superiore).

Le convenzioni espresse in $\mathrm{F}_2\mathrm{N}2$ P019 e analoghe, per cui si chiama somma di due classi u e v e si indica con $u+v$, la classe ottenuta sommando ogni u con ogni v, permettono pure qualche riduzione.

Tenendo conto di queste trasformazioni, le P precedenti diventano:

$u\varepsilon\,\mathrm{Cls'R}\,.\,x\varepsilon\mathrm{R}\,.\supset:$

1. $x<\mathrm{l'}u\,.=.\,\exists\,u\frown(x+\mathrm{R})$ Df
2. $x=\mathrm{l'}u\,.=:\,-\exists\,u\frown(x+\mathrm{R})\,:\,y\varepsilon\mathrm{R}\,.\,y<x\,.\supset_y.\,\exists\,u\frown(y+\mathrm{R})$ Df
3. $x>\mathrm{l'}u\,.=.\,-(x<\mathrm{l'}u)\,.\,-(x=\mathrm{l'}u)$ Df
4. $x=\mathrm{l'}\,\mathrm{R}\frown y\ni(y<x)$
5. $\mathrm{Q}\;=\;x\ni\{\exists\,\mathrm{Cls'R}\frown a\ni[\exists a\,.\,\exists\,\mathrm{R}\frown y\ni(y>\mathrm{l'}a)\,.\,x=\mathrm{l'}a\,]\}$ Df

$a,b\varepsilon\mathrm{Q}\,.\supset:$ 6. $a=b\,.=.\,\mathrm{R}\frown z\ni(z<a)=\mathrm{R}\frown z\ni(z<b)$ Df

7.8. $a<b\,.=.\,b>a\,.=.\,\exists\,\mathrm{R}\frown x\ni(a<x<b)$ Df

9.-11. $\exists\,\mathrm{R}\frown x\ni(x<a)\,.\,\exists\,\mathrm{R}\frown x\ni(x>a)\,.\,\mathrm{R}\supset\mathrm{Q}$

12. $a+b=\mathrm{l'}\{[\mathrm{R}\frown x\ni(x<a)]+[\mathrm{R}\frown x\ni(x<b)]\}$ Df
13. $a\times b=$ » $\times$ » »
14. $a<b\,.\supset.\,b-a=\iota\,\mathrm{Q}\frown x\ni(a+x=b)$ Df
15. $/a=\iota\,\mathrm{Q}\frown x\ni(x\times a=1)$ Df
16. $m\varepsilon\mathrm{N}_1\,.\supset.\,a^m=1(\times a)m$ Df
17. » $.\supset.\,\sqrt[m]{a}=\iota\,\mathrm{Q}\frown x\ni(x^m=a)$ Df

Esse significano:

Sia u una classe di R. Noi introduciamo la funzione $\mathrm{l'}u$ (limite superiore degli u), di cui non diamo una definizione nominale, cioè della forma

$\mathrm{l'}u=$ (espressione composta mediante i segni precedenti);

ma definiamo solo le relazioni in cui figura questo segno. Essendo x un razionale, diremo, P1, che $x<\mathrm{l'}u$, quando esistono degli u maggiori di x. Le P2 e 3 definiscono le relazioni $x=\mathrm{l'}u$ e $x>\mathrm{l'}u$. Si deduce (P4), che un numero razionale è il limite superiore dei numeri più piccoli di esso.

P5. Il limite superiore d'una classe di razionali, supposto però questa classe effettivamente esistente, onde escludere lo 0, e tale che esistano dei numeri y maggiori d'ogni numero della classe, onde escludere l'∞, chiamasi quantità, o numero reale positivo, e in simboli Q.

P6. Due quantità a e b diconsi eguali, se ogni razionale minore dell'una è pure minore dell'altra, e viceversa. P7. Si dice $a<b$, o $b>a$ se esistono razionali compresi fra a e b. Ne risulta (P9, 10) che data una quantità qualunque, esistono razionali minori, ed altri maggiori di essa. Ogni R è un Q.

P12. Dicesi somma di due quantità a e b il limite superiore delle somme d'un numero razionale minore di a, con un razionale minore di b. Analogamente pel prodotto.

P14-17. Le altre operazioni si definiscono come per i numeri razionali.

Si può aggiungere la

1'. $x<\mathrm{l'R}$

« ogni razionale è minore del limite superiore della classe R »

§3

Invece che dagli R, razionali assoluti, si potrebbe partire dagli r, razionali relativi, o con segno. Ecco alcune proposizioni trasformate:

$u \varepsilon \mathrm{Cls}'\mathrm{r} \,.\, x \varepsilon \mathrm{r} \,.\supset.$

1. $x < \mathrm{l}'u \,.=.\, x \varepsilon u - \mathrm{R}$ Df
2. $x = \mathrm{l}'u \,.=.\, x - \mathrm{R} = u - \mathrm{R}$ Df
4. $x = \mathrm{l}'(x - \mathrm{R})$

Invece di definire le relazioni $=$ e $<$ fra Q, che sono i limiti superiori di classi speciali, in cui si era escluso lo 0 e l'∞, si possono definire in generale:

$u,v \varepsilon \mathrm{Cls}'\mathrm{r} \,.\supset:$

6. $\mathrm{l}'u = \mathrm{l}'v \,.=.\, u - \mathrm{R} = v - \mathrm{R}$ Df

6'. $\mathrm{l}'u = \mathrm{l}'(u - \mathrm{R})$

7. $\mathrm{l}'u < \mathrm{l}'v \,.=.\, \mathrm{l}'v > \mathrm{l}'u \,.=.\, \exists\, (v - \mathrm{R}) - (u - \mathrm{R})$ Df

8. $\mathrm{l}'u \leqq \mathrm{l}'v \,.=.\, u - \mathrm{R} \supset v - \mathrm{R}$ Df

Si possono considerare le 7 e 8 come definizioni indipendenti, e i segni $<$ e $\leqq$ come segni semplici, e dedurre le P151·7·9; ovvero assumere una di queste come def. al posto di una delle 7 e 8 ora scritte.

Seguendo questa via conviene definire direttamente « q » o « quantità relativa » cioè il numero reale con segno, anzichè Q. Si potrà porre

5. $\mathrm{q} = x \ni \exists\, \mathrm{Cls}'\mathrm{r} \cap a \ni [\exists a \,.\, \exists\, \mathrm{r} - (a - \mathrm{R}) \,.\, x = \mathrm{l}'a]$ Df

5'. $\mathrm{Q} = \mathrm{q} \cap x \ni (x > 0)$

Questo procedimento però non conviene alla disposizione del Formulario; poichè essendo tutte le prop. e teorie ordinate a seconda dei segni che vi figurano, una teoria che contenga il segno R, ma non r, deve necessariamente precedere quella che contiene r. La disposizione del Formul. anche qui va d'accordo coll'uso comune, perchè nell'insegnamento suolsi parlare prima dei Q, numeri reali assoluti, e poi dei q.

Si può fare la teoria dei Q, scrivendo formule egualmente semplici delle precedenti, introducendo un segno per indicare « frazione propria », cui daremo la forma ϑ. Ricordiamo che già in F_2N2, Θ significa « la parte frazionaria di »; e in F_1 θ significa « l'intervallo fra 0 ed 1 ». Essendo la nuova idea affine alle precedenti, si indicherà con un segno pure simile.

Le P seguenti hanno la forma consueta del Formulario. Qualche citazione si riferisce all'edizione in corso di stampa; ma il lettore non troverà difficoltà a riscontrarle nell'edizione pubblicata.

§4 ϑ

$\mathrm{R} < \vartheta$

·0 $\vartheta = \mathrm{R} \cap x \ni (x < 1) \;\{= \text{“ fraction propre ”}\}$ Df

$\mathrm{N}_0 + \mathrm{N}_1 - \times \,/\, \mathrm{R} < \vartheta$

·01 $\mathrm{R} - \mathrm{N}_1 = \mathrm{N}_0 + \vartheta$ ·02 $1 - \vartheta = \vartheta$ ·03 $\vartheta = \mathrm{R} \cap (1 - \mathrm{R})$ Df?

·04 $\vartheta = x \ni \exists (a;b) \ni [a,b \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1 \,.\, x = a/(a+b)]$ Df?

·11 $x,y \varepsilon \vartheta \,.\supset.\, xy\, \varepsilon \vartheta$ [§> P6·2 $\supset$ P]

·12 $x \varepsilon \vartheta \,.\supset.\, \exists\, \vartheta \cap y \ni (x \varepsilon\, \vartheta y)$

[$a,b \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, x = a/(a+b) \,.\, y = (a+1)/(a+b+1) \,.$ §> P7·4 $.\supset.\, x < y \,.\, y < 1 \,.\supset.$ Ths]

·13 $\vartheta\vartheta = \vartheta$ [P·11 $.\supset.\, \vartheta\vartheta \supset \vartheta$: P·12 $.\supset.\, \vartheta \supset \vartheta\vartheta \,:\supset.$ P]

·14 $\vartheta \mathrm{N}_1 = \vartheta \mathrm{R} = \mathrm{R}$ ·15 $\mathrm{R} = \vartheta \cup /\vartheta \cup \iota 1$

$a,b \varepsilon \mathrm{R} \,.\supset:$

·21 $\vartheta a = \mathrm{R} \cap x \ni (x < a) = \mathrm{R} \cap (a - \mathrm{R})$

·22 $b < a \,.=.\, b \varepsilon\, \vartheta a$

·23 $\vartheta a \supset \vartheta b \,.\supset.\, a \leqq b$ [Hp $.\supset.\, b - \varepsilon \vartheta b \,.\supset.\, b - \varepsilon \vartheta a \,.\supset.\, b - < a \,.\supset.$ Ths]

·24 $\vartheta a = \vartheta b \,.\supset.\, a = b$ [Hp . P·23 $.\supset.\, a \leqq b \,.\, b \leqq a \,.\supset.$ Ths]

·25 $\vartheta(a+b) = \vartheta a + \vartheta b$

[§× P2·02 $.\supset.\, \vartheta(a+b) \supset \vartheta a + \vartheta b$ (1)

$x \varepsilon\, \vartheta a \,.\, y \varepsilon\, \vartheta b \,.$ §> P2·3 $.\supset.\, x + y \,\varepsilon\, \vartheta(a+b)$ (2)

(2) $.\supset.\, \vartheta a + \vartheta b \supset \vartheta(a+b)$ (3)

(1) . (3) $.\supset.$ P]

$u,v \,\varepsilon\, \mathrm{Cls}'\mathrm{R} \,.\supset.$

·31 $\vartheta u = \mathrm{R} \cap x \ni [\exists u \cap y \ni (y > x)]$ ·32 $\vartheta(uv) = (\vartheta u) \times (\vartheta v)$ [P·13 $\supset$ P]

·33 $\vartheta(u+v) = \vartheta u + \vartheta v$

[§× P2·02 $.\supset.\, \vartheta(u+v) \supset \vartheta u + \vartheta v$ (1)

$x \varepsilon u \,.\, y \varepsilon v \,.\, z \varepsilon\, \vartheta x + \vartheta y \,.$ P·25 $.\supset.\, z \varepsilon\, \vartheta(x+y) \,.\supset.\, z \varepsilon\, \vartheta(u+v)$ (2)

(2) . Elim(x,y) $.\supset.\, \vartheta u + \vartheta v \supset \vartheta(u+v)$ (3)

(1) . (3) $.\supset.$ P]

In conseguenza, essendo a un R (numero razionale positivo), ϑa significa «frazione propria di a», cioè «numero razionale minore di a»; ed essendo u una classe di R, ϑu vale «frazione propria di qualche u».

Con questo segno, le P precedenti diventano

§5 $\mathrm{R} < \vartheta\ \mathrm{l}'$

$u,v \varepsilon \mathrm{Cls}'\mathrm{R} \,.\, a \varepsilon \mathrm{R} \,.\supset:$

1. $a < \mathrm{l}'u \,.=.\, a \,\varepsilon\, \vartheta u$ Df
2. $a = \mathrm{l}'u \,.=.\, \vartheta a = \vartheta u$ Df   4. $a = \mathrm{l}'\vartheta a$ 4'. $1 = \mathrm{l}'\vartheta$
6. $\mathrm{l}'u = \mathrm{l}'v \,.=.\, \vartheta u = \vartheta v$ Df

6′. $\mathrm{l}'u = \mathrm{l}'\vartheta u$ 6″. $\mathrm{l}'\mathrm{N}_1 = \mathrm{l}'\mathrm{R} = \mathrm{l}'(a+\mathrm{R})$

7. $\mathrm{l}'u < \mathrm{l}'r \;.=.\; \mathrm{l}'r > \mathrm{l}'u \;.=.\; \exists\, \vartheta r - \vartheta u$ Df

8. $\mathrm{l}'u \leqq \mathrm{l}'r \;.=.\; \mathrm{l}'r \geqq \mathrm{l}'u \;.=.\; \vartheta u \supset \vartheta r$ Df

8′. $\mathrm{l}'u \leqq \mathrm{l}'\mathrm{R}$ 8″. $\mathrm{R} \supset \vartheta u \,.\supset.\, \mathrm{l}'u = \mathrm{l}'\mathrm{R}$

§6

Se il l′ è razionale, la P·2 non definisce l′u, ma solo la relazione $a = \mathrm{l}'u$. È possibile il dare in questo caso la definizione nominale di l′u:

1. $u\varepsilon\ \mathrm{Cls}'\mathrm{R} \,.\, \exists\, \mathrm{R} \frown x \ni (\vartheta x = \vartheta u) \,.\supset.\, \mathrm{l}'u = \iota\, \mathrm{R} \frown x \ni (\vartheta x = \vartheta u)$ Df

«Sia u una classe di razionali; e supponiamo che esista un razionale x tale che $\vartheta x = \vartheta u$. Allora con l′$u$ si intende questo razionale». Si deduce:

2. $\mathrm{HypP1} \,.\supset.\, \mathrm{l}'u\, \varepsilon \mathrm{R} \,.\, \vartheta \mathrm{l}'u = \vartheta u$
 | $x,y \varepsilon \mathrm{R} \,.\, \vartheta x = \vartheta u \,.\, \vartheta y = \vartheta u \,.\, \S\vartheta \mathrm{P}{\cdot}24 \,.\supset.\, x = y$ (1)
 (1) . Hyp. §ι P431 .⊃. P |

3. $a\varepsilon \mathrm{R} \,.\supset.\, a = \mathrm{l}'\vartheta a = \mathrm{l}'\iota a$

4. $u\varepsilon\, \mathrm{Cls}'\mathrm{R} \,.\, a\varepsilon \mathrm{R} \,.\, \vartheta a = \vartheta u \,.\supset.\, a = \mathrm{l}'u$

Però dalla 1 non si può dedurre la P2 del §5, poichè l′u ha solo senso nell'HypP1. Questa P si potrà dedurre dalla attuale P1, e dalla §5 P6.

Ricordiamo poi che le definizioni del §5 non sono del tutto indipendenti, cioè si sovrappongono alquanto. Invero, le relazioni $\mathrm{l}'u = \mathrm{l}'r$, $\mathrm{l}'u < \mathrm{l}'r$,... hanno già significato se questi l′ sono razionali; si deve provare che queste definizioni concordano con proposizioni note in questo caso particolare, il che è conseguenza immediata delle P·23·24 di §ϑ. Anche le definizioni $a < \mathrm{l}'u$ $a > \mathrm{l}'u$ si possono dedurre dalla $a = \mathrm{l}'u$ e $\mathrm{l}'u < \mathrm{l}'r$.

§7

Prima di procedere oltre, è opportuno introdurre un'operazione di logica, di cui già si è parlato in F_0§32-33, e in altri lavori, quantunque finora nelle applicazioni alla Matematica non se ne sia fatto uso.

Cls ε f ‘ ’

$a,b,c,d \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, u\varepsilon\, b\mathrm{f}a \,.\, r\varepsilon\, a\mathrm{f}b \,.\, c \supset a \,.\, d \supset a \,.\supset.$

·0 $u‘a = y \ni \exists\, a \frown x \ni (ux = y)$ Df ·01 $a'r = y \ni \exists\, a \frown x \ni (xr = y)$ Df

·1 $x\varepsilon a \,.\supset.\, ux\ \varepsilon\ u‘a$ [Hp . P·0 .⊃. $ux = y$.⊃. $y\varepsilon\, u‘a$: P84 .⊃. Ts] pd

·2 $u‘a \supset b$ pd
 [Hp . P501 . P84 .⊃: $x\varepsilon a \,.\, ux = y \,.\supset.\, y\varepsilon b$ (1)
 Hp . P·0 . (1) .⊃: $y\varepsilon u‘a \,.\supset.\, y\varepsilon b$:⊃. Ts]

·3 $x\varepsilon a \,.\supset.\, u‘\iota x = \iota\, ux$ pd
 [Hp . P422 . P505 .⊃. $u\varepsilon(b\mathrm{f}\iota x)$ (1)
 Hp , (1) . P·0 .⊃: $y\varepsilon u‘\iota x \,.\supset_y .\, \exists\, \iota x \frown z \ni (uz = y)$. P424 $.=_y .$
 $x\varepsilon[z \ni (uz = y)] \,.=_y .\, ux = y$. P421 $.=_y .\, y\varepsilon\iota ux$ (2)
 Hp . (2) . P17 .⊃. Ts]

·4 $u‘c \supset u‘a$ ·5 $u‘(c \cup d) = u‘c \cup u‘d$

·6 $u\varepsilon\, (b\mathrm{f}a)\mathrm{rcp} \,.=:\, u\varepsilon\, (b\mathrm{f}a)\mathrm{Sim} \,.\, u‘a = b$ pd

·7 $k\varepsilon\, \mathrm{Cls} \,.\supset.\, \mathrm{Cls}'k = y \ni \exists\, \mathrm{Cls} \frown x \ni (xk = y) = \mathrm{Cls} \frown y \ni (y \supset k)$ Df?

Il segno $u‘a$, che si deve considerare decomposto in $(u‘)a$, corrisponde alla frase «u degli a» o «u di qualche a». Il segno ‘ si può sottintendere in più casi, specialmente nelle formule algebriche, ma non sempre ciò è lecito, senza produrre ambiguità.

In conseguenza Cls′R significa «classe di razionali», come è scritto sempre in questo articolo. In F_2N1 e N2 l'apostrofo era rovesciato.

§8

Fra le classi di R meritano menzione speciale quelle che moltiplicate per ϑ si riproducono; cioè soddisfano alla condizione $\vartheta u = u$. Esse sono le classi tali che se un R vi appartiene, ogni R più piccolo di esso appartiene pure alla medesima; e viceversa, ogni numero della classe possa essere superato da qualche numero della stessa classe; quest'ultima condizione equivale a dire che la classe non ha massimo. Aggiungendo a queste classi la condizione che esse esistano effettivamente e che non contengano tutti i numeri razionali, si ottengono classi, che si possono chiamare «segmenti di razionali», o «segmenti», e che indicherò col simbolo «Sgm». La definizione e le principali proprietà di questi segmenti sono espresse dalle P seguenti:

R ϑ Sgm

·0 $\mathrm{Sgm} = \mathrm{Cls}'\mathrm{R} \frown a \ni (\vartheta a = a \,.\, \exists a \,.\, \exists\, \mathrm{R} - a)$ Df

·01 $a\varepsilon\, \mathrm{Sgm} \,.=.\, a\varepsilon\, \mathrm{Cls}'\mathrm{R} \,.\, \vartheta a = a \,.\, \exists a \,.\, \exists\, \mathrm{R} - a$ [=P·0]

·02 $u\varepsilon\, \mathrm{Cls}'\mathrm{R} \,.\, \exists u \,.\, \exists\, \mathrm{R} - \vartheta u \,.\supset.\, \vartheta u\ \varepsilon\ \mathrm{Sgm}$
 [Hyp . P·01 . §ϑP·13 .⊃. Ths]

·03 $\vartheta\ \varepsilon\ \mathrm{Sgm}$ ·04 $x\varepsilon \mathrm{R} \,.\supset.\, \vartheta x\ \varepsilon\ \mathrm{Sgm}$

·05 $a\varepsilon\, \mathrm{Sgm} \,.\, y\varepsilon\, \mathrm{R} - a \,.\supset.\, a \supset \vartheta y$

$a,b,c \varepsilon\, \mathrm{Sgm} \,.\supset.$

·1 $a+b\ \varepsilon\ \mathrm{Sgm} \,.\, a+b = b+a \,.\, a+b+c = (a+b)+c = a+(b+c)$

·2 $a \times b\ \varepsilon\ \mathrm{Sgm} \,.\, ab = ba \,.\, abc = (ab)c = a(bc) \,.\, a(b+c) = ab+ac$

·3 $\exists\, \mathrm{Sgm} \frown u \ni [- \exists\, \mathrm{R} \frown x \ni (u = \vartheta x)]$

I segmenti così definiti non differiscono che per la nomenclatura dai numeri reali. La somma ed il prodotto di due segmenti è già stata definita precedentemente in F_2N2 P019 e analoghe. In queste operazioni $+$ e $\times$, i segmenti si comportano come i numeri reali.

Ma, essendo a e b dei segmenti, $a-b$, a/b, come pure $a\upharpoonright m$, ove m è un intero, hanno già significato; ed esso non coincide col valore di queste espressioni se a e b sono numeri reali.

P. es. se u è un segmento, $/u$, che significa «reciproco di qualche u» non è più un segmento. Analogamente u^2, che vuol dire «prodotto di due u eguali», non è un segmento; esso non vale uu, prodotto di un u per un u.

Si potrebbero definire delle nuove operazioni, che indicherò pel momento con $-'$, $/'$, $\upharpoonright'$, ponendo

$$a,b\,\varepsilon\,\mathrm{Sgm}\ .\supset.\ b/'a = \imath\,\mathrm{Sgm}\frown x\ni(xa=b)\ .\ a\upharpoonright'2 = a\times a\ \ldots$$

La soppressione da F_2N2 delle convenzioni espresse dalla P019 e analoghe, permetterebbe di indicare cogli stessi segni $-$ / $\upharpoonright$ le operazioni ora definite; ma quelle convenzioni sono assai utili.

Anche in altri casi un numero reale è considerato come un oggetto diverso da un segmento di razionali.

Si scrive $1<\sqrt{2}$, $\sqrt{2}<\sqrt{3}$, mentrechè, considerando $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ quali segmenti, queste relazioni si possono scrivere $1\,\varepsilon\,\sqrt{2}$, $\sqrt{2}\supset\sqrt{3}$.

Il numero 1 e il segmento ϑ hanno proprietà diverse.

Nell'uso comune il numero reale, quantunque sia determinato da un segmento u, e lo determini, si considera come l'estremo, o termine o limite superiore del segmento.

È possibile, parlando sempre di segmenti, di costrurre una teoria completa degli irrazionali; ma le formule, ove si voglia escludere ogni pericolo di ambiguità, si presentano sotto una forma alquanto diversa da quella in uso oggi in Algebra.

Pur convenendo che questa forma è propria delle civiltà in cui viviamo, e che gran parte dei teoremi relativi a questa teoria già trovansi in Euclide, sotto forma differente, tuttavia è necessario accordare le nostre notazioni con quelle usate da tutti.

§9.

Mantenendo sempre distinti il segmento ed il numero reale, suo limite superiore, potremo riprodurre semplificate le P1,2,6,7,8 del §2:

$u,v\,\varepsilon\,\mathrm{Sgm}\,.\,a\varepsilon\mathrm{R}\,.\supset:$

1.	$a<\mathrm{l}'u\ .=.\ a\varepsilon u$	Df	2.	$a=\mathrm{l}'u\ .=.\ \vartheta a=u$	Df
6.	$\mathrm{l}'u=\mathrm{l}'v\ .=.\ u=v$	Df	7.	$\mathrm{l}'u<\mathrm{l}'v\ .=.\ \exists\, v-u$	Df
8.	$\mathrm{l}'u\leqq\mathrm{l}'v\ .=.\ u\supset v$				Df

Alcune altre proposizioni si semplificano ancora, se, essendo a un Q, si indica con ${}_{\prime}]a$ quel segmento di razionali, il cui limite superiore è a.

Si ottiene:

§10 Sgm l' Q ${}_{\prime}]$

$\cdot 1$ $\mathrm{Q} = \mathrm{l}'\text{‘}\,\mathrm{Sgm}$ Df

$\cdot 2$ $a\varepsilon\mathrm{Q}\ .\supset.\ {}_{\prime}]a = \imath\,\mathrm{Sgm}\frown u\ni(a=\mathrm{l}'u)$ Df

$\cdot 3$ $u\varepsilon\,\mathrm{Sgm}\ .\supset.\ \mathrm{l}'u\,\varepsilon\mathrm{Q}\ .\ {}_{\prime}]\mathrm{l}'u=u$

$\cdot 4$ $a\varepsilon\mathrm{Q}\ .\supset.\ {}_{\prime}]a\ \varepsilon\,\mathrm{Sgm}\ .\ \mathrm{l}'{}_{\prime}]a=a$

$a,b\varepsilon\mathrm{Q}\ .\supset:$ $\cdot 5$ $a=b\ .=.\ {}_{\prime}]a={}_{\prime}]b$

$\cdot 6$ $a+b=\mathrm{l}'({}_{\prime}]a+{}_{\prime}]b)$ $\cdot 7$ $a\times b=\mathrm{l}'({}_{\prime}]a\times{}_{\prime}]b)$ Df

$\cdot 8$ $a<b\ .=.\ b\varepsilon\, b\dot{-}\mathrm{Q}\ .=.\ \exists\,({}_{\prime}]b)-({}_{\prime}]a)$

§11

Si può introdurre il limite inferiore, l_1, dei numeri di una classe o direttamente, come nelle P1-8, o collegandolo col limite superiore come nelle P9-11 seguenti. Il segno «Df» qui vuol dire «definizione possibile».

$u,v\varepsilon\,\mathrm{Cls}'\mathrm{R}\ .\ a\varepsilon\mathrm{R}\ .\supset:$

$\cdot 1$ $a>\mathrm{l}_1 u\ .=.\ a\varepsilon\,\vartheta u$ Df

$\cdot 2$ $a=\mathrm{l}_1 u\ .=.\ a/\vartheta=u/\vartheta$ Df

$\cdot 3$ $\exists\,\mathrm{R}\frown x\ni(x/\vartheta=u/\vartheta)\ .\supset.\ \mathrm{l}_1 u=\imath\,\mathrm{R}\frown x\ni(x/\vartheta=u/\vartheta)$ Df

$\cdot 4$ $a=\mathrm{l}_1(a/\vartheta)=\mathrm{l}_1\,\iota a$ $\cdot 4'$ $1=\mathrm{l}_1/\vartheta$

$\cdot 5$ $\mathrm{l}_1 u=\mathrm{l}_1 v\ .=.\ u/\vartheta=v/\vartheta$ Df

$\cdot 6$ $\mathrm{l}_1 u=\mathrm{l}_1(u/\vartheta)$

$\cdot 7$ $\mathrm{l}_1 u>\mathrm{l}_1 v\ .=.\ \exists\,(v/\vartheta)-(u/\vartheta)$ Df

$\cdot 8$ $\mathrm{l}_1 u\geqq\mathrm{l}_1 v\ .=.\ u/\vartheta\supset v/\vartheta$ Df

$\cdot 10$ $\mathrm{l}'u=\mathrm{l}_1\,\mathrm{R}-(\vartheta u)$ Df $\cdot 11$ $\mathrm{l}_1 u=\mathrm{l}'\mathrm{R}-(u/\vartheta)$ Df

$\cdot 11$ $\mathrm{l}'u=\mathrm{l}_1 v\ .=.\ \vartheta u=\mathrm{R}-(v/\vartheta)\ .=.\ v/\vartheta=\mathrm{R}-(\vartheta u)$ Df

§12

La parola «definizione», anche nei libri di Matematica, ha più significati.

Il prof. C. Burali-Forti, nel trattato «*Logica Matematica*, Milano a. 1894 p. 120-148» ha classificate le definizioni che si incontrano nelle teorie già espresse in simboli ideografici, distinguendole coi nomi: definizioni nominali, per induzione, per astrazione, ecc. Di queste varie specie di definizioni, le nominali si presentano come le più soddisfacenti. Molte definizioni delle altre specie contenute nei primi lavori di *Logica Matematica* poterono essere trasformate in definizioni nominali. Delle definizioni per astrazione, in F_2N2 (Aritmetica) non se ne incontra più che una sola, la P210·1, per definire il numero cardinale, o potenza, di un insieme.

Il $\mathrm{l}'u$, nella teoria esposta, salvo il caso speciale del §6, non è definito nominalmente, cioè non si ha una definizione della forma

$u\varepsilon\,\mathrm{Cls}'\mathrm{R}\ .\supset.\ \mathrm{l}'u=$ (espressione composta coi segni precedenti)

ma è definito per astrazione, cioè sono definite le relazioni $=\ >\ <$ fra un razionale ed un limite superiore, e fra due limiti superiori.

Una definizione nominale non si può dare altrimenti che identificando i numeri reali coi segmenti di razionali, e costruendo sui primi una nomenclatura diversa da quella già usata sui secondi.

Porremo adunque:

$u \varepsilon \mathrm{Cls'R} . \supset .$

·1 $\mathrm{l}'u = \vartheta u$ Df

·2 $\mathrm{l}'u \leqq \mathrm{l}'v .=. \vartheta u \supset \vartheta v$ Df

·3 $a \varepsilon \mathrm{R} . \supset . a = \mathrm{l}'\vartheta a$ Df

Colla P·1 noi conveniamo di indicare con $\mathrm{l}'u$ (limite superiore degli u) ciò che già si è chiamato ϑu.

P·2. Noi scriveremo $\mathrm{l}'u \leqq \mathrm{l}'v$ invece di $\vartheta u \supset \vartheta v$; cioè se la relazione considerata fra le classi u e v è scritta coi ϑ, metteremo framezzo il segno $\supset$; se è scritta coi l′, useremo il segno $\leqq$.

Secondo l'uso comune i numeri razionali sono compresi fra i reali: $\mathrm{R} \supset \mathrm{Q}$. Questa coincidenza non è una verità assoluta, ma il risultato di una convenzione generale, secondo la quale i numeri assoluti sono contenuti nei numeri con segno, $\mathrm{N}_0 \supset \mathrm{n}$, gli intieri nei fratti, $\mathrm{N}_1 \supset \mathrm{R}$, e così via, nelle successive generalizzazioni del termine «numero». Queste generalizzazioni non trovansi ad esempio in Euclide, ove sono sempre considerati come oggetti distinti un numero intero, e la sua ragione all'unità.

Volendo far entrare gli R nei Q, poniamo la definizione P·3, cioè identifichiamo, ossia indichiamo collo stesso segno il razionale a, e il limite superiore dei razionali minori di a.

Essa, tenendo conto della ·1 si può pure scrivere:

·3′ $a \varepsilon \mathrm{R} . \supset . a = \vartheta a$.

Si deduce:

·3″ $1 = \vartheta$,

cioè, d'ora in avanti, invece di ϑ si scriverà 1; e il lettore dovrà dedurre dal contesto della formula se il segno 1 indica il numero intiero 1, ovvero la classe ϑ.

Quantunque i simboli Q e Sgm siano equivalenti, pure, se $a, b \varepsilon \mathrm{Q}$, $a-b$, a/b,... hanno il valore dato dalle P 14 ecc, di §2; se invece a e b sono Sgm, le altre operazioni hanno il significato di cui è parlato nel §8.

Definizioni della forma delle ·3, ·3′, ·3″ già si incontrano in $\mathrm{F}_2\mathrm{N}2$:

P039·1 $a \varepsilon \mathrm{N}_0 . \supset . a = +a$

054 $a, b \varepsilon \mathrm{N}_1 . \supset . b/a = (\times b)(/a)$

le quali dicono che noi indichiamo collo stesso segno il numero assoluto a, e l'operazione aggiungere a;

come pure il quoziente b/a, e l'operazione «moltiplicare per b e poi dividere per a».

In queste definizioni ambi i membri sono espressioni note.

Però la via indicata dal presente §12, quantunque elimini la definizione per astrazione del l′, parmi meno pratica di quella seguita precedentemente.

Accennati così vari procedimenti con cui si può ridurre in simboli ideografici la teoria degli irrazionali, è interessante l'esaminare come alcuni Autori hanno esposte queste definizioni.

G u i l m i n, *Définitions précises arithmétiques des racines et des logarithmes incommensurables*, Nouv. Annales, a 1847. p. 313-323, dice:

«Qu'est-ce que $\sqrt{2}$?...

«Les racines approchées par défaut forment une suite croissante; ces «nombres ont cependant une limite supérieure, car aucun d'eux ne peut «depasser une quelconque des racines correspondantes par excès.»

Cioè, secondo l'A., $\sqrt{2}$ è, per definizione, il limite superiore della classe di razionali formata dalle radici approssimate per diffetto.

Ciò differisce poco dalla nostra teoria, secondo cui il numero reale è, per definizione, il limite superiore di una classe di razionali.

J. B e r t r a n d, *Traité d'Arithmétique*, Paris, a. 1851, oltre il passo già citato nel §1, dice a p. 231:

«Nous supposons que cette définition (du nombre incommensurable) con«siste a indiquer quels sont les nombres commensurables plus petits ou plus «grands que lui.»

Quindi, secondo l'A. un numero reale è definito mediante la classe dei razionali minori di esso (o quella dei maggiori).

Questa classe di numeri razionali, che diciamo essere più piccoli del numero a definirsi, non può essere qualunque. È sottinteso che se contiene un R, contenga i suoi minori; che non abbia massimo; che esista effettivamente, e che non coincida colla classe R. Questa classe è pertanto un segmento. Dunque un numero reale è definito da un segmento.

Il passo per distinguere Q da Sgm non è sviluppato.

R. D e d e k i n d, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, a. 1872, p. 12, dice:

«Ist nun irgend eine Eintheilung des Systems R in zwei Classen A_1, A_2 «gegeben, welche nur die charakteristische Eigenschaft besitzt, das jede Zahl «a_1 in A_1 kleiner ist, als jede Zahl a_2 in A_2, so wollen wir der Kürze halber «eine solche Eintheilung einen S c h n i t t nennen und mit (A_1, A_2) bezeichnen».

La sezione (Schnitt) dell'A. è l'insieme d'un segmento A_1 e del suo complemento $\mathrm{R}-A_1$, se essa è determinata da un numero irrazionale, ovvero anche da un razionale, purchè questo non si comprenda nel segmento:

«Jede rationale Zahl a zwei Schnitte hervorbringt, welche wir aber nicht «als wesentlich verschieden ansehen wollen».

Eliminato questo caso di eccezione, lo Schnitt ed il segmento sono forme diverse della stessa idea.

«Jedesmal nun, wenn ein Schnitt (A_1, A_2) vorliegt, welcher durch keine «rationale Zahl hervorgebracht wird, s o e r s c h a f f e n wir eine neue, eine «i r r a t i o n a l e Z a h l a, welche wir als durch diesen Schnitt (A_1, A_2) voll«ständig definirt ansehen.»

In questo «erschaffen» (creare) è appunto indicato che il numero reale è considerato come un ente diverso dalla sezione, o segmento.

M. P a s c h, *Einleitung in die Differential- und Integralrechnung*, a. 1872, alla cui teoria noi maggiormente ci siamo avvicinati nei §8 e 12, chiama

«Strecke» il segmento. Si può riscontrare l'equivalente delle nostre P ·3·1 del §12 a pag. 4 e 11 sotto la forma:

«Wird die Strecke *A* durch die Zahl *a* begrenzt, so ist *A*=*a*».

«... werden wir uns einfach des Wertes „Zahl" künftig statt „Strecke" «... bedienen.»

G. Ricci, *Della teoria dei numeri irrazionali secondo il concetto di Dedekind*, Giorn. di Matem., a. 1897, t. 34, introduce gli irrazionali mediante il *Postulato*: «Ad ogni ripartizione di Dedekind tale che ogni numero razionale trovi posto o nella prima o nella seconda classe corrisponde uno ed un solo numero, che sarà detto *numero irrazionale*».

G. Cantor, *Math. Ann.*, t. 5, a. 1871, p. 128 e *Math. Ann.*, t. 21, a. 1883, p. 567, prende per base una successione di numeri razionali, che soddisfano alla condizione generale di convergenza; il numero reale è un ente determinato da questa successione: «und ich ordne ihr eine durch sie «zu definirende Zahl zu».

Essa si può enunciare sotto la forma:

$$x \varepsilon \mathrm{r\,f\,N_0} : h \varepsilon \mathrm{R} \,.\supset_h .\, \exists\, \mathrm{N_1} \frown m \ni [\, p \varepsilon m + \mathrm{N_1} \,.\supset_p .\, \mathrm{mod}(x_p - x_m) < h]:$$
$$\supset .\, \lim x \,\varepsilon\, \mathrm{q}$$

che, sotto forma di teorema, trovasi in Bolzano, a. 1817 §7.

Ora ogni successione di razionali crescente continuamente, ma non indefinitamente, soddisfa alla condizione di convergenza. E viceversa ogni quantità è il limite di una successione siffatta di razionali. Quindi basta limitarci a queste serie particolari. Ma allora il limite della successione è il limite superiore della classe formata dai numeri della successione:

$$f \varepsilon (\mathrm{r\,f\,N_0})\mathrm{cres} \,.\supset .\, \lim f = \mathrm{l}' f \,\text{‘}\mathrm{N_0}$$

Sicchè, mettendoci da questo punto di vista più semplice, ma altrettanto generale, la teoria di Cantor si riduce a quella dei limiti superiori.

Ch. Méray, *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale*, a. 1894, riproduce una sua teoria, già pubblicata nel 1869 e 1872, e simile a quella di Cantor. Parte dalle «variantes convergentes», cioè funzioni di più numeri interi, detti indici, che soddisfano al criterio generale di convergenza: e a pag. 31:

«On préfère uniformiser et imaginer le langage par un ensemble de «conventions...»

«Quand une variante convergente ne tend pas vers quelque limite, on «lui en assigne une *idéale*, qu'on nomme un nombre ou une quantité incom«mensurable.»

Weierstrass nelle sue lezioni espose una teoria dei numeri reali, di cui non conosciamo che riproduzioni discordanti. Vedasi *Encyklopädie*, a. 1898, p. 55, nota (27).

J. Tannery, *Introduction à la théorie des Fonctions*, a. 1886, espone le teorie di Dedekind e di Cantor.

P. Bachmann, *Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen*, a. 1892, considera due successioni, l'una crescente e l'altra decrescente, di cui la differenza diventa infinitamente piccola, e pone la definizione (p. 8):

«Die beiden gegen einander convergirenden Zahlenreihen bestimmen «mit einander eine Zahl oder es entspreche ihnen eine Zahl.»

A. Capelli, *Algebra Complementare*, a. 1898, seguendo altre sue pubblicazioni precedenti, sostituisce alle due successioni delle classi; e quantunque indichi (p. 12) con $a_1\ a_2$... gli individui di una classe, avverte (p. 28):

«che con ciò non intendiamo stabilire fra le *a* alcun ordine di succes«sione o di grandezza.»

Altri A. fanno lievi modificazioni ai metodi precedenti.

Un Q è definito da un Sgm e viceversa dato questo è determinato quello: come pure un Q è definito da una sezione di Dedekind, e la definisce, eliminata l'eccezione di cui si è parlato, poichè la sezione ed il Sgm si corrispondono univocamente fra loro. Invece dato un Q, esistono infinite successioni di cui esso è il limite, ed esistono infinite classi di R di cui esso è il limite superiore, ed infinite coppie di classi contigue di cui esso è limite di separazione.

Quasi tutti gli A. che partono da una rappresentazione non reciproca dei Q, dànno delle operazioni $\dotplus$ e $\dot\times$ definizioni non omogenee.

La definizione della somma, ad es. deve avere la forma:

$a, b \varepsilon \mathrm{Q} \,.\supset .\, a \dotplus b =$ (espressione composta colle lettere *a* e *b* e con simboli fissi).

La forma più semplice è quella che trovasi in §10 P·6.

Non è regolare il definire come somma di due irrazionali il limite della successione che si ottiene sommando i termini corrispondenti di due successioni che determinano i due sommandi. Ciò che si definisce è funzione delle due successioni, ma non dei numeri reali dati, poichè queste successioni non ne sono funzioni. Le definizioni non omogenee sono numerose in molti libri. Quantunque qui si possano poi giustificare, col far vedere che ciò che si definisce è indipendente dalla scelta particolare della rappresentazione dei numeri considerati, pure è bene abolirle, perchè costituiscono sempre una difficoltà per i discenti, e si possono sostituire con definizioni esatte.

Parimenti non si può assumere per definizione la P:

$$u, v \varepsilon \mathrm{Cls'R} \,.\supset .\, \mathrm{l}'u + \mathrm{l}'v = \mathrm{l}'(u+v)$$

Conchiudendo, si hanno le proposizioni:

a) «Ogni classe di numeri (razionali), tutti inferiori ad un numero «assegnabile, ha per limite superiore un numero reale».

In simboli:

$$u \varepsilon \mathrm{Cls'R} \,.\, \exists u \,.\, m \varepsilon \mathrm{R} \,.\, u \supset \vartheta m \,.\supset .\, \mathrm{l}'u \,\varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \mathrm{l}'u \leqq m$$

Essa si enuncia in molti trattati sotto la forma: «Una variabile crescente continuamente, ma non indefinitamente, tende ad un limite».

b) «Ogni segmento (di razionali) ha un estremo a destra; ovvero ogni «scomposizione dei numeri (razionali) in due classi tali che ogni numero «della prima sia minore d'ogni numero della seconda, è fatta da un numero «reale». In simboli:

$$u \varepsilon \mathrm{Sgm} \,.\supset .\, \mathrm{l}'u \,\varepsilon \mathrm{Q}$$

c) « Ogni successione (di razionali), che soddisfi al criterio di convergenza, converge effettivamente verso un limite ».

Già fu espressa in simboli.

d) « Date due classi (di razionali), tali che ogni numero della prima sia minore (o =) d'ogni numero della seconda, e tali che il limite inferiore delle loro differenze sia 0, esiste uno ed un solo numero reale maggiore (o =) di tutti i numeri della prima, e minore (o = di tutti i membri della seconda. »

In simboli:

$$u,v \varepsilon \mathrm{Cls'R} \,.\, \exists u \,.\, \exists v : x \varepsilon u \,.\, y \varepsilon v \,.\supset_{x,y} .\, x \leqq y : h \varepsilon \mathrm{R} \,.\supset_h .\, \exists (x,y) \ni [x \varepsilon u \,.\, y \varepsilon v \,.\, \mathrm{mod}(y-x) < h :\supset. \mathrm{l}'u \,\varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \mathrm{l}_1 v \,\varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \mathrm{l}'u = \mathrm{l}_1 v$$

Queste P, tutte vere, anche se si sopprime la condizione « di razionali » scritta fra parentesi, si deducono facilmente l'una dall'altra. Una di esse deve essere trasformata in definizione degli irrazionali. Varia l'opinione degli A. sulla sua scelta.

Nelle applicazioni, specialmente all'analisi, si ricorre più spesso alle P *a*) e *c*). Anzi nei comuni trattati, per riconoscere la convergenza delle serie, o di integrali, ecc. si fa uso quasi costante della *c*). Quindi è giustificata l'opinione di Cantor (ib. p. 565), che il suo metodo sia « die einfachste und natürlichste von allen » e, come parlando di quello di Dedekind, p. 567, Egli dica: « die Zahlen in der Analysis *niemals* in der Form von " Schnitten ", darbieten, in welche sie erst mit grosser Kunst und Umständlichkeit gebracht werden müssen. »

Ma in alcuni miei lavori ho fatto vedere che la definizione di integrale dipende dal solo concetto di limite superiore, e non da quello di limite verso cui converge una funzione; come pure, nelle applicazioni geometriche, che convenga ad es. definire la lunghezza d'un arco di curva quale limite superiore delle lunghezze delle poligonali inscritte, anzichè quale limite verso cui converge la lunghezza di queste (vedi *Encyclopädie*, e. 72). Sicchè la forma più conveniente del principio che si applica costantemente in analisi parmi sia la *a*), a cui quindi conviene attaccare direttamente la definizione dell'irrazionale.

Stampato coi tipi della « Rivista di Matematica » dalla Tip. Gerbone
Via Gaudenzio Ferrari, 3 — Torino.

Les propriétés formales des opérations algébriques

par C. BURALI-FORTI.

INTRODUCTION

Le chapitre I de ce livre contient les propriétés des grandeurs qui ne dépendent point de l'idée de nombre (entier ou fractionnaire ou irrationnel). Les propriétés des grandeurs d'une classe homogène sont déduites par un système de *huit* propositions primitives (n. 9), dont nous avons démontré l'indépendance (n. 10), et qui sont, par ex, vérifiées pour les grandeurs géométriques longueurs.

Le chapitre II contient les fondements de la théorie des nombres entiers. L'idée de nombre entier est déduite logiquement par celle usuelle et concrète de grandeur. La somme de deux entiers une fois définie, il résulte que les entiers forment une classe homogène de grandeurs; et une fois vérifié quelles sont les propositions primitives pour les grandeurs qui sont aussi vérifiées pour les entiers, nous avons déjà un groupe important de propositions pour les entiers en changeant, dans les propositions du Chap. I, le mot grandeur par le mot entier.

Un procédé analogue est suivi dans les chapitres III et IV pour les rationnels et les irrationnels.

Un premier résultat de la méthode que nous venons d'exposer est la rapidité avec laquelle on peut enseigner, dans l'école, les propriétés formales des opérations algébriques en englobant les éléments grandeurs et nombres, que d'habitude sont considérés séparément. Mais un autre résultat bien plus important est celui de pouvoir obtenir l'idée générale de nombre sous forme concrète en le déduisant de l'idée concrète, usuelle, de grandeur, qui est aussi indispensable pour les propriétés métriques de la géometrie.

Pour faciliter l'immédiate application, dans les écoles secondaires supérieures, de la méthode que nous venons d'exposer, nous avons énoncé toutes les propositions qui sont nécessaires, et seulement nécessaires, pour obtenir les propriétés fondamentales de l'algoritme algébrique (les puissances comprises, Chap. V): nous avons ordonné les propositions de telle sorte que la démonstration d'une d'entre elles est faite au moyen des propositions comprises parmi celles qui la précèdent.

Les démonstrations qui ne diffèrent pas des usuelles ou qui sont bien faciles sont supprimées. Les autres démonstrations sont données bien souvent sous forme abrégée, en sous-entendant des passages intermèdes qui, d'ailleurs, ne présentent pas de difficulté.

Pour la forme d'exposition nous avons donné la préférence à la notation symbolique adoptée par le *Formulaire de mathématiques*. Aujourd'hui cette notation est bien connue par tout le monde et elle a l'avantage, sur le langage commun, de ne point laisser de doute sur la signification d'un mot ou d'un symbole. Le Formulaire (Tome II. n. 1, 2, 3) sera cité avec abréviation Form.

Nous supposons connues, par les lecteurs, les propriétés de logique pure contenues dans le Form. comme nécessaires pour lire les énoncés de nos définitions et théorèmes et pour lire les démonstrations; mais il faut bien observer que, indépendamment de la notation symbolique, les notions de logique que nous supposons connues sont celles que, habituellement, on suppose connues par les élèves des écoles supérieures sécondaires. Dans les exemples contenus en cette introduction et les n. 2, 10 nous donnons aux lettres N_0, n, q,... la signification expliquée dans Form. n° 3.

Les notations symboliques, dont nous faisons usage, et qui ne sont pas encore contenues dans le Form., sont expliquées dans ce qui va suivre.

I. *Opérations.*

$\cdot 1.\quad u \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset.\, \mathrm{Op}\,u = \smile\text{'}\mathrm{Cls}\, \mathrm{f}u$ $\qquad$ Df

$\qquad$ ——————— $=$ « opérations pour les u »

ou bien

$\qquad u \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset.\, \mathrm{Op}\,u = x \ni \exists\, \mathrm{Cls} \frown v \ni (x \varepsilon\, v\mathrm{f}u)$

Dans le Form. (n° 3, §9) la notation $v\mathrm{f}u$ (*) indique l'ensemble de tous les

(*) On peut donner, de la manière suivante, la définition nominale du symbole $v\mathrm{f}u$, en convenant d'indiquer avec les notations $\mathrm{Elem}_1 a$, $\mathrm{Elem}_2 a$ le prémier et le deuxième élément de la couple a; de telle sorte que

$$\mathrm{Elem}_1(x:y) = x \qquad \mathrm{Elem}_2(x:y) = y.$$

$\cdot 1.\quad u \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset.\, \mathrm{Op}\,u = \mathrm{Cls}\text{'}(u : \smile\text{'}\mathrm{Cls}) \frown f \ni [\, x \varepsilon u \,.\supset_x.\, \exists f \frown y \ni (\mathrm{Elem}_1 y = x) : x,y \varepsilon f \,.\, \mathrm{Elem}_1 x = \mathrm{Elem}_1 y \,.\supset_{x,y}.\, \mathrm{Elem}_2 x = \mathrm{Elem}_2 y \,]$ Df

$\cdot 2.\quad u \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, a \varepsilon u \,.\, f \varepsilon\, \mathrm{Op}\,u \,.\supset.\, fa = \iota\, x \ni ((a\,;x) \varepsilon f)$ $\qquad$ Df

$\cdot 3.\quad u,v \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset.\, v\mathrm{f}u = \mathrm{Op}\,u \frown f \ni (x \varepsilon u \,.\supset_x.\, fx\, \varepsilon v)$ $\qquad$ Df

Dans le Form. la notation fx n'est pas définie.

Je dois la remarque suivante à mon ami le Prof. Mario Pieri.

« On trouve des traces évidentes dans quelques ouvrages d'Analyse et de Géométrie, et plus explicitement dans les questions de Géométrie énumérative traités par M. H Schubert (surtout, *Kalkül der abzählenden Geometrie*, Leipzig 1879), de l'idée d'envisager une correspondence quelconque comme un *systhème de couples*. Toutefois on n'avait pas signalé jusqu'ici, le caractère d'universalité logique propre à cette idée ».

signes, qui placés devant un élément de la classe u produisent un élément, bien déterminé, de la classe v. Nous indiquons avec le symbole $\mathrm{Op}\,u$ l'ensemble de tous les signes qui placés devant un u produisent un élément sans avoir égard à la classe à laquelle appartient cet élément.

Par exemple

$$\sin \varepsilon\, \mathrm{Op}\, \mathrm{q} \quad ; \quad \mathrm{tang}\, \varepsilon\, \mathrm{Op}\, \mathrm{qn}{-}\pi/2 \quad ; \quad \log \varepsilon\, \mathrm{Op}\, \mathrm{Q}.$$

$\cdot 2\quad u \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, f \varepsilon \mathrm{Cls}\text{'}\mathrm{Op}\,u \,.\, a \varepsilon u \,.\supset.\, f\text{'}a = x \ni \exists f \frown y \ni (x = ya)$ $\qquad$ Df

$\cdot 3\quad \mathrm{Op} = x \ni \exists \mathrm{Cls} \frown u \ni (x \varepsilon\, \mathrm{Op}\,u)$ $\qquad$ Df

$\qquad$ —— $=$ « opération »

$\cdot 4\quad \mathrm{Op}_2 = \mathrm{Op} \frown x \ni \exists\, (u\,;v) \ni (u,v \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, x \varepsilon\, \mathrm{Op}(u:v))$ $\qquad$ Df

$\qquad$ —— $=$ « opération pour de couples » $\qquad$ Df

II. *Opérations appliquées à une classe.*

$\cdot 1\quad u \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, f \varepsilon \mathrm{Op}\,u \,.\supset.\, f_u = (x\,;y) \ni (x \varepsilon u \,.\, y = fx)$ $\qquad$ Df

Étant f une opération pour les u, nous indiquons avec la notation f_u les couples $(x\,;y)$ tels que x est un élément de u et $y = fx$.

Pour abstraction f_u peut indiquer l'opération f appliquée à la classe u. L'importance de cet élément nouveau résulte par le fait qu'une opération f peut avoir des propriétés différentes selon la classe à laquelle elle est appliquée. Par ex., la fonction « sin » est invertible si elle est appliquée à l'intervalle de $-\pi/2$ à $\pi/2$ et n'est pas invertible dans l'intervalle de 0 à π.

$\cdot 2\quad u \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, f,h \varepsilon \mathrm{Op}\,u \,.\supset\therefore f_u = h_u \,.=:\, x \varepsilon u \,.\supset_x.\, fx = hx$

$\qquad [\,\mathrm{Hp}.\, \mathrm{P}{\cdot}1 \,.\supset\therefore f_u = h_u \,.=:\, x \varepsilon u \,.\, y = fx \,.=_{x,y}.\, x \varepsilon u \,.\, y = hx$ $\qquad$ (1)

$\qquad$ —— (1) $.\supset::$ ———— $\therefore x \varepsilon u \,.\supset_x : y = fx \,.=.\, y = hx$ $\qquad$ (2)

$\qquad$ —— (2) $.\supset.$ Ths $]$

Si, par ex., étant x un nombre nous posons

$$\mathrm{E}x = \text{partie entière de } x \quad ; \quad \omega x = x$$

alors nous avons que

$$\mathrm{E}_{\mathrm{n}} = \omega_{\mathrm{n}} \quad ; \quad \mathrm{E}_{\mathrm{q}} -= \omega_{\mathrm{q}}$$

Voir à ce propos mon article *Sur l'égalité et sur l' introduction des éléments dérivés dans la science* (L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE — 1.re Année, page 264).

Dans ce qui va suivre nous n'avons pas besoin de faire usage du symbole composé f_u : mais nous l'avons introduit pour expliquer exactement tout ce qui se rapporte à l'égalité des opérations.

III. *Égalité des opérations.*

$\cdot 1 \quad x = y \,.=:\, a\varepsilon \mathrm{Cls}\,.\, x\varepsilon a \,.\supset_a .\, \cancel{x}\varepsilon a$ / y

Pour que l'objet x soit égal à l'objet y il faut et il suffit que toute classe qui contient x contienne aussi y; ou bien, il faut et il suffit que toute propriété de x soit aussi une propriété de y. (Voir Form. nº 3, §2, P3·91, et mon article, déjà cité de *L'enseignement*).

Le champ de toute propriété de x reste limité par la proposition suivante

$\cdot 2 \quad u\varepsilon \mathrm{Cls}\,.\, x,y\varepsilon u \,.\supset\therefore x = y \,.=:\, a\varepsilon \mathrm{Cls}{`}u \,.\, x\varepsilon a \,.\supset_a .\, y\varepsilon a$

$[\,\mathrm{Hp}.\ \mathrm{P}\cdot 1 \,.\, x = y \,.\supset:\, a\varepsilon \mathrm{Cls}{`}u \,.\, x\varepsilon a \,.\supset_a .\, y\varepsilon a$ (1)

$\text{———} :\, a\varepsilon \mathrm{Cls}{`}u \,.\, x\varepsilon a \,.\supset_a .\, y\varepsilon a \,:\supset:\, b\varepsilon \mathrm{Cls}\,.\, x\varepsilon b \,.\supset_b .\, y\varepsilon u \frown b$ (2)

$\text{————————————} :(2) :\supset:\, b\varepsilon \mathrm{Cls}\,.\, x\varepsilon b \,.\supset_b .\, y\varepsilon b$ (3)

$\text{————————————}\ (3) \,.\, \mathrm{P}\cdot 1 \,:\supset .\, x = y$ (4)

$(1) \,.\, (4) \,.\supset .\, \mathrm{P}\,]$

Si, par ex., x, y sont des points, la relation $x = y$ signifie que toute figure (classe de points) qui renferme x renferme aussi y; ce que l'on exprime dans le langage usuel en disant que « x coïncide avec y ».

$\cdot 3. \quad f,h\varepsilon \mathrm{Op} \,.\supset\therefore f = h \,.=:\, x\varepsilon \cup{`}\mathrm{Cls} \,.\supset_x .\, fx = hx$

Deux opérations sont égales lorsque appliquées au même élément de la classe totale (qui est représentée par $\cup{`}\mathrm{Cls}$) produisent, quel que soit cet élément, un même élément.

$[\,\mathrm{Hp}.\ \mathrm{P}\cdot 1 \,.\, f = h \,.\supset:\, x\varepsilon \cup{`}\mathrm{Cls} \,.\supset_x .\, fx = hx$ (1)

$\text{———} :\, x\varepsilon \cup{`}\mathrm{Cls} \,.\supset_x .\, fx = hx \,:\supset:\, a\varepsilon \mathrm{Cls}{`}\mathrm{Op} \,.\, f\varepsilon a \,.\supset_a .\, h\varepsilon a$ (2)

$\text{————————————}\ (2) \,.\, \mathrm{P}\cdot 2 \,:\supset:\, f = h$ (3)

$(1) \,.\, (3) \,.\supset .\, \mathrm{P}\,]$

Ayant E et ω la signification indiquée au nº II, nous avons que $\mathrm{E}\text{-}{=}\,\omega$, car par ex., $\mathrm{E}\pi\ \text{-}{=}\,\omega\pi$, et ce fait établit la différence entre notre symbole f_u et l'F du Form. nº 3.

CHAP. I — LES GRANDEURS

§1. CLASSES HOMOGÈNES DE GRANDEURS

❋ 1. *Définition de Grandeur.*

$\cdot 1 \quad f\varepsilon\, \mathrm{Op}_2 \,.\supset .\, \mathrm{GrandHomog}\, f = \mathrm{Cls} \frown u \ni (f\varepsilon\, u f(u : u)) \qquad \mathrm{Df}$

$\text{————————————} =$ « Classe de grandeurs, homogène par rapport à f »

Étant f un signe d'opération pour de couples, nous disons que « u est une classe de grandeurs homogène par rapport à f » lorsque : u est une classe et l'opération f appliquée à un couple formé avec les u produit un élément de u.

La phrase du langage usuel « les grandeurs a, b, sont de la même nature », signifie exactement « les éléments a, b appartiennent à une classe homogène par rapport au signe $+$ qui exprime l'usuelle somme ».

$\cdot 2 \quad f\varepsilon \mathrm{Op}_2 \,.\, u\varepsilon \mathrm{GrandHomog}\, f \,.\supset .\, afb = f(a\,;b) \qquad \mathrm{Df}$

Nous convenons d'écrire toujours afb au lieu de $f(a\,;b)$; comme habituellement on écrit $a+b$ pour indiquer une fonction déterminée du couple $(a\,;b)$ (la somme de a avec b).

$\cdot 3 \quad \mathrm{GrandHomog} = u \ni \exists\, \mathrm{Op}_2 \frown f \ni (u\varepsilon\, \mathrm{GrandHomog}\, f) \qquad \mathrm{Df}$

Nous indiquons avec la notation *GrandHomog* la classe dont chaque élément est une classe de grandeurs homogène par rapport à un signe determiné d'opération pour de couples.

$\cdot 4 \quad \mathrm{Cls} \supset \mathrm{GrandHomog}$

$[\, u\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset .\, \exists\, \mathrm{Op}_2 \frown f \ni (x,y\,\varepsilon u \,.\supset_{x,y} .\, xfy = x)$ (1)

$(1) \,.\, \mathrm{P}\cdot 3 \,.\supset .\, \mathrm{P}\,]$

Par la P·3 résulte que chaque classe est toujours une classe de grandeurs homogène par rapport à un signe d'opération choisi convenablement. Par exemple, la classe « point » est homogène par rapport au signe $+$ si $a+b$ indique le milieu du segment ab; elle n'est pas homogène par rapport au signe $+$ si $a+b$ indique une forme géométrique du premier ordre, suivant Grassmann.

$\cdot 5 \quad \mathrm{GrandHomog} = \mathrm{Cls} \qquad [\,\mathrm{P}\cdot 3\cdot 4 \,.\supset .\, \mathrm{P}\,]$

Les mots *classe, grandeur homogène*, ont la même signification.

·6 Grand $= \cup$'GrandHomog Df

Le mot usuel « grandeur » représente la totalité des grandeurs. Mais pour la P·5 nous avons que

·7 Grand $= \cup$'Cls,

et, par conséquent, le symbole « Grand » représente la classe totale.

❋ 2. *Exemples.*

·1 q ε GrandHomog $+$

·2 q ε GrandHomog $\times$

·3 » » $-$

·4 q$-\iota 0$ ———————— $/$

·5 n$-\iota 0$ $-\varepsilon$ GrandHomog $/$

·6 Q_0 $-\varepsilon$ GrandHomog $-$

·7 $[\mathrm{q} \frown x \ni (0 \leqq x \leqq 1)]$ ε GrandHomog $\times$

·8 ———————————— $-\varepsilon$ ——————— $+$

·9 Les longueurs, les aires, les volumes. les points, les masses,.... sont des classes de grandeurs homogènes par rapport au signe $+$ qui indique l'ordinaire somme; mais les éléments de ces classes ne sont pas des nombres. Par exemple une grandeur ne peut point être identifiée au nombre qui la mésure, car ce nombre change avec le changer de l'unité de mesure : nous ne pouvons pas écrire 8 mètres $=$ 8, car on aurait de même 8 litres $=$ 8, et, par conséquent, 8 mètres $=$ 8 litres.

·10 Les longueurs des côtés d'un polygone forment une classe de grandeurs; mais pas une classe homogène par rapport au signe $+$.

§2. DÉFINITIONS

$$+ \,\varepsilon\, \mathrm{Op}_2 \,.\, \mathrm{G}_0 \,\varepsilon\, \mathrm{GrandHomog}+ \,.\, a,b,c,d \,\varepsilon\, \mathrm{G}_0 \,.\supset.$$

C'est une hypothèse commune à toutes les prop. de ce chapitre que: $+$ est un signe d'opération pour de couples; G_0 est une classe de grandeurs homogène par rapport au signe $+$; a,b,c,d sont des éléments de la classe G_0.

❋ 3. *Somme.*

·1 « somme, par rapport au signe $+$, de a avec b » $= a+b$ Df

·2 $a=b \,.\supset.\, a+c = b+c \,.\, c+a = c+b$

$[\, b \varepsilon x \ni (x+c = b+c) \,.\, \mathrm{Hp} \,.\, \mathrm{PIII}\cdot 1 \,.\supset.\, a+c = b+c$ (1)

$b \varepsilon x \ni (c+x = c+b) \,.$ ———————— $.\supset.\, c+a = c+b$ (2)

$(1) \,.\, (2) \,.\supset.\, \mathrm{P}\,]$

·3 $a=b \,.\, c=d \,.\supset.\, a+c = b+d$

·4 $a+b+c = (a+b)+c$ Df

❋ 4. *Somme de deux classes de grandeurs.*

$u,v,w \varepsilon\, \mathrm{Cls}'\mathrm{G}_0 \,.\supset.$

·1 $u+v = \mathrm{G}_0 \frown x \ni \exists (y\,;z) \ni (y \varepsilon u \,.\, z \varepsilon v \,.\, y+z = x)$ Df

·2 $u+v \varepsilon\, \mathrm{Cls}'\mathrm{G}_0$

·3 $a+u = (\iota a)+u \,.\, u+a = u+(\iota a)$ Df

·4 $u+v+w = (u+v)+w$

❋ 5. *Les grandeurs nulles.*

·1 $\mathrm{G}(\mathrm{G}_0, +) = \mathrm{G}_0 \frown x \ni \exists \mathrm{G}_0 \frown y \ni (y+x -= y)$ Df

——————— $=$ « grandeurs (G_0) qui ne sont nulles par rapport à l'opération $+$ »

Dans ce qui va suivre nous écrivons, tout simplement, G au lieu de $\mathrm{G}(\mathrm{G}_0, +)$

·2 $\mathrm{G}_0 - \mathrm{G} = \mathrm{G}_0 \frown x \ni (y \varepsilon \mathrm{G}_0 \,.\supset_y.\, y+x = y)$

——— $=$ « grandeurs (G_0) nulles »

❋ 6. *Les signes $>$, $<$.*

·1 $a >(\mathrm{G}_0, +)\, b \,.=.\, a \varepsilon\, b + \mathrm{G}(\mathrm{G}_0, +)$ Df

——————— $.=.$ « a est plus grand que b (par rapport à la classe G_0 et au signe $+$) »

·2 $a <(\mathrm{G}_0, +)\, b \,.=.\, b >(\mathrm{G}_0, +)\, b$ Df

——————— $.=.$ « a est plus petit que b (par rapport a la classe G_0 et au signe $+$) »

Les signes composés $>(\mathrm{G}_0, +)$, $<(\mathrm{G}_0, +)$ indiquent explicitement que les conditions exprimées habituellement par les signes $>$, $<$ sont relatives à la classe G_0 et à l'opération $+$. Ces indications sont nécessaires, car, par exemple: $>(\mathrm{G}_0, +)$ a la même signification de $<(\mathrm{G}_0, -)$; si a,b sont des Q on a toujours que $a >(\mathrm{Q},\times)\, b$ et $a <(\mathrm{Q},\times)\, b$; existent des entiers (N_0) a,b tels que $a -= b$, $a -> (\mathrm{N}_0,\times)\, b$, $a -< (\mathrm{N}_0,\times)\, b$.

Dans ce qui va suivre nous ferons usage des signes simples $>$, $<$ qu on emploie habituellement.

·3 $a=b \,.\, b<c \,.\supset.\, a<c$

$[\, b<c \,.\supset.\, b \varepsilon x \ni (x<c) : \mathrm{Hp} :\supset. \mathrm{P}\,]$

·4 $a \leqq b \,.=.\, a=b \,.\cup.\, a<b$ Df

$a \geqq b \,.=.\, a=b \,.\cup.\, a>b$ Df

·5 $a<b<c \,.=.\, a<b \,.\, b<c$ Df

❋ 7. *Le symbole θ*

·1 $\theta(G_0, +)\, a = G_0 \frown x \ni [x < (G_0, +)\, a]$ Df

——— = « grandeurs G_0 plus petites que a »

Pour le signe composé $\theta(G_0, +)$ on peut répéter les observations qui suivent la P6·2. Dans ce qui va suivre nous employons le signe simple θ.

·2 $u \varepsilon \mathrm{Cls}'G_0 . \supset . \theta u = G_0 \frown x \ni \exists u \frown y \ni (x < y)$ Df

——— = grandeur plus petite que quelque u ».

·3 $\theta(\iota a) = \theta a$ [P6·3 . P 2 .⊃. P]

·4 $u \varepsilon \mathrm{Cls}'G_0 . \supset . G_0 - \theta u = G_0 \frown x \ni (y \varepsilon u . \supset_y . x - < y)$

——— = « grandeurs non plus petites que chaque u »

❋ 8. *Classes limités.*

·1 $\mathrm{ClsExisLim}'G_0 = \mathrm{Cls}'G_0 \frown u \ni (\exists u . \exists G_0 - \theta u)$ Df

——— = «Classe existante et limitée de grandeurs G_0»

·2 Lorsqu'il serait établi (17·6) que *non plus petit* signifie *égal ou plus grand*, résultera qu'une classe u est existante et limitée seulement lorsqu'il existe une grandeur égale ou plus grande que chaque u. Par exemple les périmètres des polygones convexes qui sont internes à un cercle, forment une classe existante et limitée.

§3. PROPOSITIONS PRIMITIVES

❋ 9. Toutes les propriétés des classes de grandeurs, *longueurs, aires, volumes*,... homogènes par rapport à l'opération $+$, correspondante à l'ordinaire somme, sont conséquence d'un petit groupe de propositions que nous appelons *primitives*, car elles ne peuvent point être démontrées sans avoir fixé la classe G_0 et l'opération $+$, et il existent des éléments $G_0, +$, pour lesquels ne sont pas vérifiés.

Nous énonçons ici ces propositions primitives qui sont aisément démontrables pour les grandeurs géométriques, une fois définie l'opération $+$.

·1 $a+b = b+a$ { propriété commutative } Pp1

·2 $a+(b+c) = a+b+c$ { propriété associative } Pp2

·3 $a+c = b+c . \supset . a = b$ Pp3

·4 ·4′ $\exists G_0 - G$ Pp4′

« Existe, au moins, une grandeur nulle »

·4″ $\exists G$ Pp4″

« Existe, au moins, une grandeur non nulle »

·5 $a \varepsilon G . \supset . a+b \, \varepsilon G$ Pp5

·6 $a = b . \smile . a < b . \smile . a > b$ Pp6

·7 $a \varepsilon G . \supset . \exists G \frown \theta a$ Pp7

·8 $a \varepsilon \mathrm{ClsExisLim}'G_0 . \supset . \exists G_0 \frown x \ni (\theta x = \theta a)$ Pp8

{ Postulat de Dedekind }

❋ 10. *Indépendance des propositions primitives.*

Dans les P·1-·7 nous démontrons, ordonnément, que chacune des Pp3-8, est indépendante de toutes les autres Pp1-8

·1 $G_0 = \iota 0 \smile \iota 1$, étant l'opération $+$ définie en posant $0+0=0$, $0+1 = 1+0$ $1=1$, $1+1=1$. (La Pp3 n'est pas vérifiée et toutes les autres sont vérifiées).

·2 $G_0 = Q$ et $+$ l'ordinaire somme (n'est pas vérifiée la Pp 4′)

·3 $G_0 = \iota 0$ ——— (——— 4″)

·4 $G_0 = q$ ——— (——— 5)

·5 $G_0 = \iota 0 \smile (1+Q)$ ——— (——— 6)

·6 $G_0 = N_0$ ——— (——— 7)

·7 $G_0 = R_0$ ——— (——— 8)

·8 Nous n'avons point trouvé de classes G_0 et d'opérations $+$ pour lesquelles ne soit pas vérifié une des Pp1,2 et toutes les autres le soient.

·9 Les Pp1,2, sont indépendantes entre elles.

Dem. (1). Si G_0 est la classe « point » et $a+b$ indique le milieu du segment ab, la Pp1 est vraie et la Pp2 est fausse.

(2). Si G_0 est une classe de transformation et $+$ indique le produit, alors la Pp2 est vraie, mais la Pp1 peut être fausse.

Par (1) et (2) on déduit le théorème.

❋ 10′. *Systèmes dérivés de propositions primitives.*

Une fois défini les entiers (Chap. II) et le produit d'une grandeur pour un entier, on peut démontrer les prop. suivantes.

·7₁ $n \varepsilon N . \supset . \exists G_0 \frown x \ni (nx = a)$ Pp7_1

·8₁ $a \varepsilon G . \supset . \exists N \frown x \ni (xa > b)$ Pp8_1

La Pp8_1 est le *principe d'Archimède*, et la Pp7_1 affirme l'existence d'un summultiple d'une grandeur suivant un entier non nul. Par la Pp7_1, et par les Pp2,3,4,5 on démontre la Pp7 (P41·3).

Par les Pp1,2,3,4,5,6,8_1 on obtient les propriétés de l'opération division (quotient et reste) (nº 39): par les Pp1,2,3,4,5,6,7,8_1 les propriétés de multiples compris parmi deux grandeurs (nº 40): par les Pp1,2,3,4,5,6,7_1 on obtient toutes les propriétés des rationnels (Chap. III).

§4. LA SOMME

A la droite de chacune des propositions qui viennent de suivre en tout ce livre, nous posons entre parenthèse [ ] le nombre ordinatif des propositions primitives desquelles nous avons fait usage pour démontrer la prop considerée. Le nombre 4 indiquera l'ensemble des Pp4′ et 4″.

✻ 11. *Propriété commutative et associative.*

·1 $a+b+c = a+c+b = b+a+c = b+c+a =$
$c+a+b = c+b+a$ [1.2]

·2 $u,v\varepsilon\, \mathrm{Cls}`\mathrm{G}_0 .\supset.\, u+v = v+u$ [1]

·3 $u,v,w\varepsilon\, \mathrm{Cls}`\mathrm{G}_0 .\supset.\, u+(v+w) = u+v+w$ [2[

·4 ——————— $.\supset.\, u+v+w = v+u+w+v =$
$v+u+w = v+w+u = w+v+u$ [1.2]

✻ 12. *Suppression des termes égaux dans les deux membres d'une égalité.*

·1 $a+c = b+c .=.\, a = b$ [3]
[Pp3 . P3·2 $.\supset.$ P]

·2 $c+a = c+b .=.\, a = b$ [1.3]

·3 $a+c = c+b .=.\, a = b$ [»]

§5. LE ZÉRO

✻ 13. *La grandeur nulle.*

·1 $0_{+} = \iota\,\mathrm{Grand} \cap x\ni(u\varepsilon\, \mathrm{GrandHomog}\dot{+} \,.\, x,y\varepsilon u \,.\supset_{u,y}.\, y+x = y)$ Df
$=$ « Grandeur nulle (par respect à l'opération +) »

En suivant l'usage commun nous écrivons, tout simplement, 0 (zero) au lïeu de 0_+; mais il faut bien observer que, par ex., 0 avec l'indice × représente *l'unité*.

·2 $0\varepsilon \mathrm{G}_0$ [3.4′]
[Pp4′ $.\supset.\, \exists\, \mathrm{G}_0 - \mathrm{G}$ (1)
$x,y\varepsilon\, \mathrm{G}_0 - \mathrm{G} .\supset.\, a+x = a \,.\, a+y = a .\supset.\, a+x = a+x .\supset.\, x = y$ (2)
(1) . (2) $.\supset.$ P]

·3 $0 = \iota\, \mathrm{G}_0 - \mathrm{G}$ [3.4′]

·4 $\mathrm{G}_0 = \mathrm{G} \cup \iota 0 \,.\, \mathrm{G} = \mathrm{G}_0 - \iota 0$ [»]
[P5·1 $.\supset.\, \mathrm{G} \supset \mathrm{G}_0 .\supset.\, \mathrm{G} = \mathrm{G}_0 \cap \mathrm{G} \,.\, \mathrm{G}_0 = \mathrm{G} \cup \mathrm{G}_0$ (1)
P·1 ·2 $.\supset.\, \mathrm{G}_0 - \mathrm{G} = \iota 0$ (2)

(1) . (2) $.\supset.\, \mathrm{G} \cup \iota 0 = \mathrm{G} \cup (\mathrm{G}_0 - \mathrm{G}) = (\mathrm{G} \cup \mathrm{G}_0)(\mathrm{G} \cup -\mathrm{G}) = \mathrm{G} \cup \mathrm{G}_0 = \mathrm{G}_0$ (3)
(1) . (2) $.\supset.\, \mathrm{G}_0 - \iota 0 = \mathrm{G}_0\, (\mathrm{G} \cup -\mathrm{G}_0) = (\mathrm{G}_0\, \mathrm{G}) \cup (\mathrm{G}_0 - \mathrm{G}_0) = \mathrm{G}_0 \mathrm{G} = \mathrm{G}$ (4)
(3) . (4) $.\supset.$ P]

·5 $a+0 = a$ [3.4′]
$0+a = a$ [1.3.4′]

·6 $a = 0 \,.\, b = 0 .\supset.\, a+b = 0$ [3.4′]

✻ 14. *Grandeurs non nulles.*

·1 $a,b\varepsilon \mathrm{G} .\supset.\, a+b\varepsilon \mathrm{G}$ [5]

·2 $a -\!= 0 .\supset.\, a+b -\!= 0$ [3.4′.5]

·3 $a+b = 0 .=.\, a = 0 \,.\, b = 0$ [1.3.4′.5]
[$a+b = 0$. P·2 $.\supset.\, a = 0$ (1)
$a+b = 0 \,.\, a = 0 .\supset.\, a+b = a+0 .\supset.\, b = 0$ (2)
(1) . (2) $.\supset:\, a+b = 0 .\supset.\, a = 0 \,.\, b = 0$ (3)
(3) . P13·6 $.\supset.$ P]

·4 $a+b -\!= 0 .=:\, a -\!= 0 \,.\cup.\, b -\!= 0$ [1.3.4′.5]

§6. LES SIGNES < >

✻ 15. *Propriété transitive.*

·1 $a<b \,.\, b<c .\supset.\, a<c$ [2.5]
[$a\varepsilon\, b+\mathrm{G} \,.\, b\varepsilon\, c+\mathrm{G} .\supset.\, a\varepsilon\, (c+\mathrm{G})+\mathrm{G}$. Pp2 $.\supset.\, a\varepsilon\, c+(\mathrm{G}+\mathrm{G})$. P14·1
$.\supset.\, a\varepsilon\, c+\mathrm{G} .\supset.$ P] (1)

·2 $a -\!< a$ [1.3.4′]

·3 $a<b .\supset.\, b -\!< a$ [1.2.3.4′.5]

·4 $a=b .\supset.\, a -\!< b \,.\, a -\!> b$ [1.3.4′]
$a<b .\supset.\, a -\!= b \,.\, a -\!> b$ [1.2.3.4′.5]

·5 $a<b \,.\cup.\, a>b :\supset.\, a -\!= b$ [1.3.4′]
$a=b \,.\cup.\, a<b :\supset.\, a -\!< b$ [1.2.3.4′.5]

✻ 16. *Le zéro.*

·1 $a \geqq 0$ [1.3.4′]

·1′ $-\exists\, \theta 0$ [1.2.3.4′.5]

·2 $a -\!= 0 .=.\, a>0$ [1.3.4′]

·3 $a \geqq b .=.\, a\varepsilon\, b+\mathrm{G}_0$ [3.4′]

✻ 17. *Propriétés des signes* $= \quad < \quad >$

·1 $a<b \,.\supset.\, a+c<b+c$ [1.2]
·2 $a+c<b+c \,.\supset.\, a<b$ [1.2.3]
·3 $a+c<b+c \,.=.\, a<b$ [»]
·4 $a=b \,.\, c<d \,.\supset.\, a+c<b+d$ [1.2]
$a<b \,.\, c<d \,.\supset.$ ———— [1.2.5]
·5 $a=b \,.=.\, a \mathrel{-\!<} b \,.\, a \mathrel{-\!>} b$ [1.3.4′.6]
$a<b \,.=.\, a \mathrel{-\!=} b \,.\, a \mathrel{-\!>} b$ [1.2.3.4′.5.6]
$a>b \,.=.\, a \mathrel{-\!=} b \,.\, a \mathrel{-\!<} b$ [»]
·6 $a \mathrel{-\!=} b \,.=:\, a<b \,.\cup.\, a>b$ [1.3.4′.6]
$a \mathrel{-\!<} b \,.=:\, a=b \,.\cup.\, a>b$ [1.2.3.4′.5.6]
$a \mathrel{-\!>} b \,.=:\, a=b \,.\cup.\, a<b$ [»]

§7. LA DIFFÉRENCE

✻ 18. *Définition et propriétés fondamentales.*

·1 $a \geqq b \,.\supset.\, a-b\,(G_0, +) = \iota G_0 \frown x \ni (b+x=a)$ Df
———————— = « différence entre a et b, par respect à la classe G_0 et à l'opération $+$ »

Dans ce qui va suivre nous écrivons, tout simplement, $a-b$ comme on fait d'habitude.

·2 $a+b=c \,.\supset.\, b=c-a$
——— $.\supset.\, a=c-b$ [1]
·3 $a-a=0$ [3.4′.]
$a-0=a$ [1.3.4′]
$(a+b)-b=a$ [»]
·4 $a \geqq b \,.\supset.\, a-b \,\varepsilon\, G_0$ [»]
[Hp . P16·3 $.\supset.\, \exists G_0 \frown x \ni (b+x=a)$ (1)
$x,y \varepsilon G_0 \,.\, b+x=a \,.\, b+y=a \,.\supset.\, b+x=b+y$. P12·2 $.\supset.\, x=y$ (2)
(1) . (2) $.\supset.$ P]
·5 $a>b \,.\supset.\, a-b \,\varepsilon\, G$ [»]
·6 $a \geqq b \,.\supset.\, (a-b)+b=a$ [»]
·7 $c \geqq a \,.\, b=c-a \,.\supset.\, a+b=c$ [»]

✻ 19. *D'autres propriétés de la différence.*

·1 $a+b \geqq c \,.\supset.\, a+b-c=(a+b)-c$
$a \geqq b \,.\supset.\, a-b+c=(a-b)+c$
$a \geqq b \,.\, a-b \geqq c \,.\supset.\, a-b-c=(a-b)-c$ Df

·2 $b \geqq c \,.\supset.\, a+(b-c)=a+b-c$ [1.2.3.4′]
[$a+(b-c)+c=a+\{(b-c)+c\}=a+b$. P18·2 $.\supset.$ P]
·3 $a \geqq c \,.\, b \geqq c \,.\supset.\, a+(b-c)=a-c+b$ [1.2.3.4′]
·4 $a \geqq b \,.\, b \geqq c \,.\supset.\, a-(b-c)=a-b+c$ [»]
·5 $b \geqq c \,.\, a+c \geqq b \,.\supset.\, a-(b-c)=a+c-b$ [»]
·6 $a \geqq b+c \,.\supset.\, a-(b+c)=a-b-c$ [1.2.3.4′]
·7 $a \geqq b \,.\supset.\, (a+c)-(b+c)=a-b$ [»]
·8 $a \geqq b \,.\, b \geqq c \,.\supset.\, (a-c)-(b-c)=a-b$ [»]

✻ 20. *Propriétés des signes* $- \quad = \quad < \quad >$

·1 $a \geqq c \,.\, b \geqq c \,.\supset:\, a-c=b-c \,.=.\, a=b$ [1.3.4′]
[Hp P12·1 . P18·6 $.\supset:\, a-c=b-c \,.=.\, a-c+c=b-c+c \,.=.\, a=b$]
·2 $a \geqq c \,.\, b \geqq c \,.\supset:\, a-c<b-c \,.=.\, a<b$ [1.2.3.4′]
·3 $c \geqq a \,.\, c \geqq b \,.\supset:\, c-a=c-b \,.=.\, a=b$ [»]
[$c-a=c-b \,.=.\, c-a+a=c-b+a \,.=.\, c=c-b+a \,.=.$
$c=c+a-b \,.=.\, c+b=c+a \,.=.\, b=a \,.=.\, a=b$]
·4 $c \geqq a \,.\, c \geqq b \,.\supset:\, c-a<c-b \,.=.\, a>b$ [1.2.3.4′]
·5 $a \leqq b \,.\, c>d \,.\, a \geqq c \,.\supset.\, a-c<b-d$ [1.2.3.4′.5]

§8. LE SYMBOLE θ

✻ 21. *Quelques conséquences de la* Pp7.

·1 $a,b \varepsilon G \,.\supset.\, \exists\, G \frown \theta a \frown \theta b$ [2.5.6.7]
·2 $a<b \,.\supset.\, \exists G \frown x \ni (a<x<b)$ [1.2.3.4′.7]
[Hp . P18·5 $.\supset.\, \exists G \frown \theta(b-a)$ (1)
Hp . $y \varepsilon G \frown \theta(b-a) \,.\supset.\, a<a+y<b$ (2)
(1) . (2) $.\supset.$ P]
·3 $a,b,c \,\varepsilon G \,.\, a<b+c \,.\supset.\, \exists (x\,;\,y) \ni (x \varepsilon G \frown \theta b \,.\, y \varepsilon G \frown \theta c \,.\, x+y=a)$ [1.2.3.4′.5.6.7]
[Hp . $a \leqq b \,.\, z \varepsilon G \frown \theta a \frown \theta c \,.\supset.\, a-z<b \,.\, z<c \,.\, (a-z)+z=a$ (1)
Hp . $a>b \,.\, z \varepsilon G \frown \theta(b+c-a) \,.\supset.\, b-z<b \,.\, z+a-b<c \,.$
$(b-z)+(z+a-b)=a$ (2)
(1) . (2) . P·1 $.\supset.$ P]
·4 $x \varepsilon G_0 \,.\supset_x.\, x \geqq a \,.=:\, a=0$ [1.2.3.4′.5.6.7]

✻ 22. *Propriétés fondamentales du symbole* θ.

·1 $a \gtreqless b .=. \theta a \supset \theta b$ [1.2.3.4'.5.6.7]

[P6·3 . P15·1 . $a \leqq b .\supset. \theta a \supset b$ (1)

P21·2 . $a > b .\supset. -(\theta a \supset \theta b)$ (2)

(2) . P17·5 $.\supset: \theta a \supset \theta b .\supset. a \gtreqless b$ (3)

(1) . (3) $.\supset.$ P]

·2 $a = b .=. \theta a = \theta b$ [1.2.3.4'.5.6.7]

[P15·3 . P·1 $.\supset.$ P]

·3 $u \varepsilon$ Cls'G_0 . $\exists u .\supset: -\exists \theta u .=. u = \iota 0$ [»]

·4. $u \varepsilon$ Cls'G_0 . $\exists u .\supset. \theta(\theta u) = \theta u$ [1.2.3.4'.5.7]

[$a \varepsilon u . x,y \varepsilon G_0 . x < a . y < x .\supset. y < a$ (1)

$a \varepsilon u . x \varepsilon G_0 . x < a .\supset. \exists G \frown y \ni (x < y < a)$ (2)

(1) . (2) $\supset. \theta(\theta u) \supset \theta u . \theta u \supset \theta(\theta u) :.\supset.$ P]

·5 $a -= 0 .\supset. \theta(\theta a) = \theta a$ [1.2.3.4'.5.7]

·6 $\theta(u+v) = \theta u + \theta v$ [1.2.3.4'.5.6.7]

[P21·3 $.\supset. \theta(u+v) \supset \theta u + \theta v$ (1)

P17·4 $.\supset. \theta u + \theta v \supset \theta(u+v)$ (2)

(1) . (2) $.\supset.$ P]

·7 $\theta(a+b) = \theta a + \theta b$

§9. LIMITE SUPÉRIEURE

✻ 23. *Définition et principales conséquences.*

·1 $u \varepsilon$ ClsExisLim'$G_0 .\supset.$ l'$u = \iota G_0 \frown x \ni (\theta x = \theta u)$ Df

———————————— = « limite supérieure des u »

·2 $u \varepsilon$ ClsExisLim'$G_0 .\supset: a =$ l'$u .=. \theta a = \theta u$ [P·1 $.\supset.$ P]

·3 $a =$ l'(ιa) [1.3.4']

[P15·4 $.\supset. (\iota a) \varepsilon$ ClsExisLim'G_0 . P7·3 . P·2 $.\supset.$ P]

·4 $a -= 0 .\supset. a =$ l'(θa) [1.2.3.4'.5.7]

[Hp. Pp7 . P15·3 $.\supset. \theta a \varepsilon$ ClsExisLim'G_0 . P22·5 . P·2 $.\supset.$ P]

·5 $u \varepsilon$ ClsExisLim'$G_0 .\supset: 0 =$ l'$u .=. u = \iota 0$ [1.2.3.4'.5.6.7]

[$0 =$ l'$u .=. \theta 0 = \theta u .=. -\exists \theta u .=. u = \iota 0$]

✻ 24. *Conséquences de la* Pp8.

$u,v \varepsilon$ ClsExisLim'$G_0 .\supset.$

·1 l'$u \varepsilon G_0$ [1.2.3.4'.5.6.7.8]

[Pp8 $.\supset. \exists G_0 \frown x \ni (\theta x = \theta u)$ (1)

$x,y \varepsilon G_0 . \theta x = \theta u . \theta y = \theta u .\supset. \theta x = \theta y$. P22·2 $.\supset. x = y$ (2)

(1) . (2) . P23·1 $.\supset.$ P]

·2 $\theta($l'$u) = \theta u$ [1.2.3.4'.5.6.7.8]

[P·1 . P23·1 $.\supset.$ P]

·3 l'$u =$ l'$v .=. \theta u = \theta v$ [»]

[l'$u =$ l'$v .=. \theta($l'$u) = \theta($l'$v) .=. \theta u = \theta v$]

·4 $u -= \iota 0 .\supset.$ l'$(\theta u) =$ l'u [»]

·5 l'$(u+v) =$ l'$u +$ l'v [»]

[$\theta(u+v) = \theta u + \theta v = \theta(l'u) + \theta(l'v) = \theta(l'u +$ l'$v)$]

·6 l'$u \leqq$ l'$v .=. \theta u \supset \theta v$ [»]

[l'$u \leqq$ l'$v .=. \theta($l'$u) \supset \theta($l'$v) .=. \theta u \supset \theta v$]

·7 l'$u <$ l'$v .=: \theta u \supset \theta v . \theta u -= \theta v$ [»]

·8 $a \varepsilon u .\supset. a \leqq$ l'u [»]

[$a \leqq$ l'$u .=. \theta a \supset \theta(l'u) .=. \theta a \supset \theta u$]

✻ 25. *Maximum d'une classe.*

·1 $u \varepsilon$Cls'G_0 . $\exists u .\supset.$ max$u = \iota u \frown x \ni (y \varepsilon u .\supset_y . y \leqq x)$ Df

———————————— = « maximum des u »

·2 $u \varepsilon$ClsExisLim'G_0 . $a \varepsilon u .\supset: a =$ l'$u .=. a =$ max$u$

[1.2.3.4'.5.6.7.8]

CHAP. II — LES ENTIERS

§1. PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

✻ 26. *Définitions des symboles* N_0, 0, seq.

·1 $N_0 = \iota$Cls'Op $\frown f \ni [x \varepsilon$Grand . $+ \varepsilon$Op$_2 .\supset_{x,+} . f'x =$

ιGrandHomog$+ \frown u \ni (0_+ , x \varepsilon u . u - \iota 0_+ \supset u + x)]$ Df

$N_0 =$ « entier (nombre entier positif ou nul) »

Avec la notation N_0 nous indiquons la classe f d'opérations telle que quelque soit la grandeur x et l'opération $+$ pour de couples, fx est la classe u de grandeurs homogène, par rapport à l'opération $+$, qui contient les grandeurs 0 et x et est telle que chaque u non nul est la somme d'un élément de u avec x.

La classe u, ou bien $N_0 x$, est formée par les éléments $0, x, x+x, x+x+x, ..$ (et pas d'autres éléments en vertu de la condition $u - \iota 0 \supset u + x$) et représente ce que, dans le langage commun, on exprime par le mot « multiple de x » sous-entendant l'opération $+$.

Les propriétés de la classe $N_0 x$ dépendent des propriétés fondamentales de l'opération $+$: si, par ex., le signe $+$ indique l'ordinaire produit et x est un nombre, $N_0 x$ signifie « puissance à exposant entier et positif de x » et n'a pas de signification si x n'est pas un nombre.

·2 $N_0 \,\varepsilon\, \mathrm{Cls‘OpGrand}$ [3.4′]

Pour la démonstration de cette prop. il faut avoir recours aux propriétés des classes finies que nous avons démontrées dans notre mémoire *Le classi finite.* (Atti Acc. Torino, 1897)

·3 $m,n \,\varepsilon\, N_0 \,.\supset\therefore\, m = n \,.=:\, x \,\varepsilon\, \mathrm{Grand} \,.\supset_x.\, mx = nx$ [3.4′]
[P·2 . P1·6 . PIII·3 .Ɔ. P]

4 $0 = \iota N_0 \frown x \ni (+\mathrm{Op}_2 \,.\, u \,\varepsilon\, \mathrm{GrandHomog}+ \,.\, y \,\varepsilon\, u \,.\supset_{+,u,y}.\, xy = 0 \,)$ Df
—— « zéro » = « entier nul »

En suivant l'usage commun indiquons par le même signe 0, l'entier nul et la grandeur nulle; cela ne peut point produire d'inconvénients.

·5 $m \,\varepsilon\, N_0 \,.\supset.\, \mathrm{seq}\,m = \iota N_0 \frown x \ni (+\varepsilon \mathrm{Op}_2 \,.\, u \,\varepsilon\, \mathrm{GrandHomog}+ \,.\, y \,\varepsilon\, u$
$.\supset_{+,u,y}.\, xy = my + y)$ Df
———————— = « suivant de x » = « successif de x »

✻ 27. *Postulats du Formulaire de Mathématiques.*

·1 $N_0 \,\varepsilon\, \mathrm{Cls}$ [P26·2 .Ɔ. P] ·2 $0 \,\varepsilon\, N_0$ [P26·1·3·4 .Ɔ. P] [3.4′]
·3 $m \,\varepsilon\, N_0 \,.\supset.\, \mathrm{seq}\,m \,\varepsilon\, N_0$ [3.4′]

Pour la démonstration voir *Le classi finite.*

·4 $u \,\varepsilon\, \mathrm{Cls‘}N_0 \,.\, 0 \,\varepsilon\, u : x \,\varepsilon\, u \,.\supset_x.\, \mathrm{seq}\,x \,\varepsilon\, u :\supset.\, N_0 \supset u$ [3.4′]
« principe d'induction complète » = « Induct »

Pour la démonstration voir *Le classi finite* §3, P12.

·5 $m,n \,\varepsilon\, N_0 \,.\, \mathrm{seq}\,m = \mathrm{seq}\,n \,.\supset.\, m = n$ [3.4′]
·6 $m \,\varepsilon\, N_0 \,.\supset.\, \mathrm{seq}\,m \,-\!= 0$ [3.4′.4″] = [3.4]
[Hp. $a \,\varepsilon\, \mathrm{Grand} \,.\, a \,-\!= 0 \,.\supset.\, (\mathrm{seq}\,m)a \,-\!= 0$. P26·3 .Ɔ. $\mathrm{seq}\,m \,-\!= 0$ (1)
Hp. (1) .Ɔ: $\exists\, \mathrm{Grand} - \iota 0 \,.\supset.\, \mathrm{seq}\,m \,-\!= 0$ (2)
(2) . Pp4″ .Ɔ. P]

Nous faisons usage ici, pour la première fois, de la Pp4″, en vertu de laquelle seulement les entiers ne sont pas tous égaux à zéro.

Comme résulte du *Formulaire* les prop. que nous venons de démontrer sont suffisantes par en déduire toutes les propriétés des entiers qui sont aujourd'hui à notre connaissance et que nous savons déjà démontrer.

Remarque. — La méthode que nous venons d'exposer pour l'introduction des entiers est immédiatement appliquable dans l'enseignement secondaire supérieur à condition de ne pas donner les démonstrations des P26·2, 26·3·4, que, comme on peut aisément reconnaître au moyen de ma mémoire *Le classi finite*, présentent des difficultés très remarquables. Mais il n'y a pas d'inconvénients pour l'éducation scientifique de ne donner quelque démonstration trop compliquée d'un théorème qui est effectivement démontrable.

✻ 28. *Produit d'une grandeur pour un entier.*

$+\varepsilon\, \mathrm{Op}_2 \,.\, G_0 \,\varepsilon\, \mathrm{GrandHomog}+ \,.\, a,b \,\varepsilon\, G_0 \,.\, m,n \,\varepsilon\, N_0 \,.\supset.$

·1 « produit de a pour m » $= a \times m = ma$ Df
·2 $a = b \,.\supset.\, ma = mb$
[$b \,\varepsilon\, x \ni (mx = mb)$. Hp. PIII·3 .Ɔ. Ths]
·3 $m = n \,.\supset.\, ma = na$
·4 $0a = 0$ [3.4′]
[P26·4 . P27·2 .Ɔ. P]
·5 $(\mathrm{seq}\,m)a = ma + a$ [»]
[P26·5 . P27·3 .Ɔ. P]
·6 $m0 = 0$ [3.4′]
[Hp. P·4 . $m = 0$.Ɔ. Ths (1)
Hp. $m0 = 0$. P·5 .Ɔ. $(\mathrm{seq}\,m)0 = 0$ (2)
(1) . (2) . Induct .Ɔ. P]
·7 $ma \,\varepsilon\, G_0$ [3.4′]
[Hp. P·4 . $m = 0$.Ɔ. Ths (1)
Hp. $ma \,\varepsilon\, G_0$. P·5 .Ɔ. $(\mathrm{seq}\,m)a \,\varepsilon\, G_0$ (2)
(1) . (2) . Induct .Ɔ. P]
·8 $1 = \mathrm{seq}\, 0$ [1 = « un » = « l'unité »] Df ·9 $1a = a$ [3.4′]

§2. SOMME DES ENTIERS

✻ 29. *Classe homogène formée par les entiers.*

·1 $m + n = \iota\, \mathrm{Op} \frown x \ni (+\varepsilon\, \mathrm{Op}_2 \,.\, u \,\varepsilon\, \mathrm{GrandHomog}+ \,.\, y \,\varepsilon\, u$
$.\supset_{+,u,y}.\, xy = my + ny)$ Df
·2 $m = n \,.\supset.\, m + p = n + p \,.\, p + m = p + n$
·3 $\mathrm{seq}\,m = m + 1$ [3.4′]
4 $m + 0 = m$ [3·4′] ·5 $m + n \,\varepsilon\, N_0$ [2.3.4′]
[Hp. $n = 0$.Ɔ. Ths (1)
Hp. $m + n \,\varepsilon\, N_0 \,.\supset.\, (m+n)a = ma + na \,.\supset.\, (m+n)a + a =$
$ma + na + a \,.\supset.\, (m+n+1)a = [m + (n+1)]a$ (2)
Hp. (2) . $m + n \,\varepsilon\, N_0 \,.\supset.\, m + (n+1) \,\varepsilon\, N_0$ (3)
(1) . (3) . Induct .Ɔ. P]
·6 $N_0 \,\varepsilon\, \mathrm{GrandHomog}+$ [2.3.4′]

·7 En vertu de la P·5 nous entendons répétées les propositions du §2 Chap. I dans lesquelles on pose N_0 au lieu de G_0 et N au lieu de G.

✻ 30. *Quelques propriétés des entiers.*

Les propriétés suivantes sont utiles pour démontrer les prop. du nº 31.

·1 $1 -= 0$ [3.4]

·2 $m=0 \,.\cup.\, m=1 \,.\cup.\, m>1$ [1.2.3.4.5]

[Hp. $m=0 \,.\supset.$ Ths (1)

Hp: $m=0 \,.\cup.\, m=1 \,.\cup.\, m>1 \,:\supset:\, m+1=1 \,.\cup.\, m+1>1$ (2)

(1) . (2) . Induct $.\supset.$ P]

·3 $m>n \,.\supset.\, m+1 \geqq n$ [1.2.3.4.5]

[P·2 $.\supset.$ P]

·4 $-\exists\, N_0 \cap x \ni (m<x<m+1)$ [»]

·5 $u \varepsilon \mathrm{Cls}'N_0 \,.\supset.\, \mathrm{seq}\,u = u+1 = x \ni \exists\, u \cap y \ni (x=y+1)$ Df

·6 $N = \mathrm{seq}\, N_0 = N_0+1$ [1.2.3.4.5]

·7 $u \varepsilon \mathrm{Cls}'N \,.\, 1 \varepsilon u \,.\, \mathrm{seq}\,u \supset u \,.\supset.\, N \supset u$ [»]

·8 $u \varepsilon \mathrm{ClsExisLim}'N_0 \,.\supset.\, \max u \varepsilon N_0$ [»]

✻ 31. *Propositions primitives pour G_0 qui sont vérifiées par N_0*

·1 $m+n = n+m$ [1.2.3.4′]

[$ma+na = na+ma \,.\supset.\, (m+n)a = (n+m)a \,.\supset.$ P]

·2 $m+(n+p) = m+n+p$ [2.3.4′]

·3 $m+p = n+p \,.\supset.\, m=n$ [»]

·4 ·4′ $\exists\, N_0 - N$ [3.4′]

[P27·2 . P29·4 $.\supset.$ P]

·4″ $\exists\, N$ [3.4]

[P30·1 $.\supset.$ P]

·5 $m \varepsilon N \,.\supset.\, m+n \varepsilon N$ [1.2.3.4.5]

·6 $m=n \,.\cup.\, m<n \,.\cup.\, m>n$ [1.2.3.4.5.6]

✻ 32. Nous entendons répétées toutes les prop. du Chap. I qui dépendent des Pp1-6 et dans lesquelles on change G_0 en N_0 et G en N. En vertu de P31 les prop. que nous venons de citer n'ont pas besoin d'être démontrées encore une fois.

§3. LE PRODUIT

Étant N_0 une classe homogène par rapport au signe $+$, les prop. 26·1, 28·1 qui définissent le produit d'une grandeur pour un entier, définissent aussi le produit d'un entier pour un entier. Les propositions suivantes qui contiennent des G_0 et des N_0 nous les entendons répétées lorsque au lieu de G_0 on écrit N_0; mais non réciproquement, car nous n'avons pas défini le produit d'une grandeur pour une grandeur.

$$+ \varepsilon \mathrm{Op}_2 \,.\, G_0 \varepsilon \mathrm{GrandHomog}+ \,.\, a,b \varepsilon G_0 \,.\, m,n \varepsilon N_0 \,.\supset.$$

✻ 33. *Propriété commutative.*

$mn = nm$ [3.4′]

[Induct $.\supset.$ $0n = n0$ (1)

——— $.\supset.$ $1n = n1$ (2)

Hp. $m=0$. (1) $.\supset.$ Ths (3)

Hp. (2) . $mn = nm \,.\supset.\, mn+n = nm+n \,.\supset.\, (m+1)n = n(m+1)$ (4)

(3) . (4) . Induct $.\supset.$ P]

✻ 34. *Propriété distributive.*

·1 $(m+n)a = ma+na$ [2.3.4′]

·2 $m \geqq n \,.\supset.\, (m-n)a = ma-na$ [1.2.3.4′]

·3 $m(a+b) = ma+mb$ [1.2.3.4′]

[Hp. $m=0 \,.\supset.$ Ths (1)

Hp. $m(a+b) = ma+mb \,.\supset.\, m(a+b)+(a+b) = ma+mb+(a+b) \,.\supset.$

$(m+1)(a+b) = (m+1)a+(m+1)b$ (2)

(1) . (2) . Induct $.\supset.$ P]

·4 $a \geqq b \,.\supset.\, m(a-b) = ma-mb$ [1.2.3.4′]

✻ 35. *Propriété associative.*

·1 $mna = (mn)a$ Df ·2 $m(na) = mna$ [3.4′]

[Hp. $m=0 \,.\supset.$ Ths (1)

Hp. $m(na) = mna \,.\supset.\, m(na)+na = mna+na \,.\supset.$

$(m+1)(na) = (m+1)na$ (2)

(1) . (2) . Induct $.\supset.$ P]

✻ 36. *Produits nuls.*

·1 $m \varepsilon N \,.\, a \varepsilon G \,.\supset.\, ma \varepsilon G$ ·2 $ma=0 \,.=:\, m=0 \,.\cup.\, a=0$ [2.3.4.5]

·3 $m -= 0 \,.=.\, m -= 0 \,.\, a -= 0$ [»]

✻ 37. *Les smyboles $=$ $<$ $>$*

·1 $m -= 0 \,.\, a<b \,.\supset.\, ma<mb$ [1.2.3.4.5]

·2 $a -= 0 . m < n .\supset. ma < na$ [2.3.4.5]

·3 $m -= 0 .\supset:: ma = mb .=. a = b$ [1.2.3.4.5.6]

[$\mathrm{Hp} : a < b .\cup. a > b :\supset: ma < mb .\cup. ma > mb$ (1)

$\mathrm{Hp}. (1) .\supset: ma = mb .\supset. a = b$ (2)

$(2) . \mathrm{P}28{\cdot}2 .\supset. \mathrm{P}$] (3)

·4 $a -= 0 .\supset: ma = na .=. m = n$ [1.2.3.4.5.6]

·5 $m -= 0 .\supset: ma < mb .=. a = b$ [»]

·6 $a -= 0 .\supset: ma < na .=. m < n$ [»]

§4. PRINCIPE D'ARCHIMÈDE ET SES CONSÉQUENCES

$+ \varepsilon \mathrm{Op}_2 . \mathrm{G}_0 \varepsilon \mathrm{GrandHomog}+ . a,b \varepsilon \mathrm{G}_0 . m,n \varepsilon \mathrm{N}_0 .\supset.$

❋ 38. *Principe d'Archimède.*

·1. $a -= 0 .\supset. \exists \mathrm{N} \cap x \ni (xa > b)$ [1.2.3.4.5.6.7.8] $= \mathrm{Pp}8_1$

[$\mathrm{Hp}. -\mathrm{Ths} .\supset. \mathrm{N}a \, \varepsilon \, \mathrm{ClsExisLim}`\mathrm{G}_0 .\supset. \mathrm{l}`\mathrm{N}a \, \varepsilon \, \mathrm{G}_0$ (1)

——— $. (1) .\supset. a < \mathrm{l}`\mathrm{N}a .\supset. \exists \mathrm{N} \cap y \ni (\mathrm{l}`\mathrm{N}a - a < ya) .\supset.$

$\exists \mathrm{N} \cap y \ni [(y+1)a > \mathrm{l}`\mathrm{N}a]$ (2)

$\mathrm{Hp}. -\mathrm{Ths} . (1) . \mathrm{P}24{\cdot}8 .\supset. -\exists \mathrm{N} \cap y \ni ((y+1)a > \mathrm{l}`\mathrm{N}a)$ (3)

$(2) . (3) .\supset. \mathrm{P}$]

·2 $m -= 0 .\supset. \exists \mathrm{N} \cap x \ni (xm > n)$ [1.2.3.4.5.6]

[$\mathrm{Hp}. m = 1 .\supset. \mathrm{Ths}$ (1)

$\mathrm{Hp}. x \varepsilon \mathrm{N} . xm > n .\supset. x(m+1) > n$ (2)

$\mathrm{Hp}. (2) .\supset: \exists \mathrm{N} \cap x \ni (xm > n) .\supset. \exists \mathrm{N} \cap x \ni [x(m+1) > n]$ (3)

$(1) . (3) . \mathrm{Induct} .\supset. \mathrm{P}$]

❋ 39. *Les symboles* quot *et* rest.

·1 $a -= 0 .\supset. \exists \mathrm{N}_0 \cap x \ni [(x+1)a > b \geqq xa]$ [1.2.3.4.5.6.8$_1$]

[$\mathrm{Hp} .\supset. [\mathrm{N}_0 \cap y \ni (ya \leqq b)] \varepsilon \, \mathrm{ClsExisLim}`\mathrm{N}_0$ (1)

$\mathrm{Hp} . (1) .\supset. \max[\mathrm{N}_0 \cap y \ni (ya \leqq b)] \varepsilon \, \mathrm{N}_0$ (2)

$(2) .\supset. \mathrm{P}$]

·2 $b -= 0 .\supset. \mathrm{quot}(a ; b) = \max [\mathrm{N}_0 \cap x \ni (xb \leqq a)]$ Df

·3 —— $.\supset.$ ——— $\varepsilon \, \mathrm{N}_0$ [1.2.3.4.5.6.8$_1$]

·4 —— $.\supset. \mathrm{rest}(a ; b) = a - [\mathrm{quot}(a ; b)]b$ Df

·5 —— $.\supset.$ ——— $\varepsilon \, \mathrm{G}_0$ [»]

❋ 40. *Multiples compris entre deux grandeurs.*

·1 $n -= 0 . a -= 0 .\supset. \exists \mathrm{G} \cap x \ni (nx < a)$ [1.2.3.4.5.6.7]

[$\mathrm{Hp}. n = 1 .\supset. \mathrm{Ths}$ (1)

$\mathrm{Hp}. x \varepsilon \mathrm{G} . nx < a .\supset. \exists \mathrm{G} \cap y \ni (y < a - nx . y < x)$ (2)

$\mathrm{Hp}. x \varepsilon \mathrm{G} . nx < a . y \varepsilon \mathrm{G} . y < a - nx . y < x .\supset. (n+1)y < a$ (3)

$(2) . (3) .\supset: \mathrm{Hp} . \mathrm{Ths} .\supset. \exists \mathrm{G} \cap y \ni [(n+1)y < a]$ (4)

$(1) . (4) . \mathrm{Induct} .\supset. \mathrm{P}$]

·2 $n -= 0 . a < b .\supset. \exists \mathrm{G} \cap x \ni (a < nx < b)$ [1.2.3.4.5.6.7.8$_1$]

[$\mathrm{Hp}. \mathrm{P}{\cdot}1 .\supset. \exists \mathrm{G} \cap y \ni (ny < b - a)$ (1)

$\mathrm{Hp}. y \varepsilon \mathrm{G} . ny < b - a . \mathrm{P}39{\cdot}1 .\supset. \exists \mathrm{N}_0 \cap m \ni ((m+1)ny > a \geqq mny)$ (2)

——————— $. m \varepsilon \mathrm{N}_0 . (m+1)ny > a \geqq mny .\supset. a <$

$(m+1)ny < b$ (3)

$(1) . (2) . (3) .\supset. \mathrm{P}$]

·3 $c \varepsilon \mathrm{G} . a < b .\supset. \exists (m ; n) \ni (m,n \varepsilon \mathrm{N} . ma < nc < mb)$ [1.2.3.4.5.6.8$_1$]

[$\mathrm{Hp} .\supset. \exists \mathrm{N} \cap x \ni [x(b-a) > c]$ (1)

$\mathrm{Hp} . x \varepsilon \mathrm{N} . x(b-a) > c .\supset. \exists \mathrm{N}_0 \cap y \ni [(y+1)c > xa \geqq yc]$ (2)

——————— $. y \varepsilon \mathrm{N}_0 . (y+1)c > xa \geqq yc .\supset.$

$xa < (y+1)c < xb$ (3)

$(1) . (2) . (3) .\supset. \mathrm{P}$]

CHAP. III — LES RATIONNELS

Lorsque l'indication [ ] manque à la droite d'une prop. l'indication [1.2.3.4.5.6.7$_1$] reste sous-entendue.

§1. PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

❋ 41. *Existence des summultiples.*

$+ \varepsilon \mathrm{Op}_2 . \mathrm{G}_0 \varepsilon \mathrm{GrandHomog}+ . a \varepsilon \mathrm{G}_0 . n \varepsilon \mathrm{N} .\supset.$

·1 $\exists \mathrm{G}_0 \cap x \ni (nx = a)$ [1.2.3.4.5.6.7.8] $= \mathrm{Pp}7_1$

Il existe une summultiple de a suivant l'entier non nul n.

[$u = \mathrm{G}_0 \cap y \ni (ny \leqq a)$ Df (1)

$\mathrm{Hp} . (1) .\supset. u \varepsilon \, \mathrm{ClsExisLim}`\mathrm{G}_0$ (2)

$\mathrm{Hp} . (1) . (2) .\supset. \mathrm{l}`u \, \varepsilon \, \mathrm{G}_0$ (3)

——— $. (3) . z \varepsilon \mathrm{G}_0 . z < n(\mathrm{l}`u) .\supset. \exists \mathrm{G}_0 \cap t \ni (z < nt < n(\mathrm{l}`u))$ (4)'

———— $. t \varepsilon \mathrm{G}_0 . nt < n(\mathrm{l}`u) .\supset. t < \mathrm{l}`u . \mathrm{P}24.2 .\supset. \exists u \cap y \ni (t < y)$ (4)''

———— $. (4)' . (4)'' .\supset. \theta(n(\mathrm{l}`u)) \supset \theta a$ (4)

$\mathrm{Hp} . z \varepsilon \mathrm{G}_0 . z < a .\supset. \exists \mathrm{G} \cap y \ni (z < ny < a)$ (5)'

$\mathrm{Hp} . (1) . (3) . y \varepsilon \mathrm{G} . ny < a .\supset. y \leqq \mathrm{l}`u$ (5)''

———— $. (5)' . (5)'' .\supset. \theta a \supset \theta(n(\mathrm{l}`u))$ (5)

$\mathrm{Hp} . (1) . (4) . (5) . \mathrm{P}24{\cdot}3 .\supset. n(\mathrm{l}`u) = a$ (6)

$(1) . (3) . (6) .\supset. \mathrm{P}$]

·2 $x,y \varepsilon \mathrm{G}_0 \,.\, nx = a \,.\, ny = b \,.\supset.\, x = y$

La summultiple de a selon n, est univoquement déterminé.

[Hp $.\supset.\, nx = ny$. P36·3 $.\supset.$ Ths]

·3 $a \neq 0 \,.\supset.\, \exists\, \mathrm{G} \frown \theta a$ [2.3.4.5.7_1]

[$\exists \mathrm{N}_0 \frown x \ni (x > 1)$ (1)

Hp . $n \varepsilon \mathrm{N}_0 \,.\, n > 1 \,.\supset.\, \exists\, \mathrm{G} \frown x \ni (nx = a)$ (2)

$n \varepsilon \mathrm{N}_0 \,.\, n > 1 \,.\, x \varepsilon \mathrm{G} \,.\, nx = a \,.\supset.\, x < a$ (3)

(1) . (2) . (3) $.\supset.$ P]

❋ 42. *Définition du symbole* R_0

·1 $\mathrm{R}_0 = \mathrm{Op} \frown x \ni \exists (m\,;n) \ni [m \varepsilon \mathrm{N}_0 \,.\, n \varepsilon \mathrm{N} : y \varepsilon \mathrm{Grand} \,.\supset_y.\, xy = \iota \mathrm{G}_0 \frown z \ni (nz = my)]$ Df

$\mathrm{R}_0 =$ « rationnel (nombre rationnel ou fractionnaire positif ou nul) »

·2 $a,b \varepsilon \mathrm{Grand} \,.\, m \varepsilon \mathrm{R}_0 \,.\, a = b \,.\supset.\, ma = mb$

·3 $a \varepsilon \mathrm{Grand} \,.\, m,n \varepsilon \mathrm{R}_0 \,.\, m = n \,.\supset.\, ma = na$

·4 $\mathrm{N}_0 \supset \mathrm{R}_0$ [3.4′]

[$x \varepsilon \mathrm{Grand} \,.\, m \varepsilon \mathrm{N}_0 \,.\supset.\, 1(mx) = mx$]

·5 $m \varepsilon \mathrm{R}_0 \,.\, u \varepsilon \mathrm{GrandHomog} \,.\, a \varepsilon u \,.\supset.\, ma \varepsilon u$

·6 $\mathrm{R}_0 \,\varepsilon\, \mathrm{Cls}\text{‘}\mathrm{Op}$

·7 $m,n \varepsilon \mathrm{R}_0 \,.\supset\therefore m = n \,.=:\, x \varepsilon \mathrm{Grand} \,.\supset_x.\, mx = nx$

❋ 43. *Notation habituelle pour les rationnels.*

·1 $m \varepsilon \mathrm{N}_0 . n \varepsilon \mathrm{N} .\supset. m/n = \iota\, \mathrm{Op} \frown x \ni (y \varepsilon \mathrm{Grand} \,.\supset_y.\, n(xy) = my))$ Df

·2 ——————— $.\supset.\, m/n \,\varepsilon\, \mathrm{R}_0$

·3 $\mathrm{R}_0 = x \ni \exists (m;n) \ni [m \varepsilon \mathrm{N}_0 . n \varepsilon \mathrm{N} . x = m/n]$

❋ 44. *Propriétés fondamentales des symboles* m/n

$m \varepsilon \mathrm{N}_0 . n \varepsilon \mathrm{N} . a,b \varepsilon \mathrm{Grand} .\supset.$

·0 $m/n\, a = (m/n)a$ Df

·1 $1/n\, a = \iota \mathrm{Grand} \frown x \ni (nx = a)$

·2 $a = 1/n\, b \,.=.\, na = b$

·3 $m/n\, a = 1/n\, (ma)$

·4 $n/n\, a = a$

·5 $n(m/n\, a) = ma$

·6 $m/n\, a = m\,(1/n\, a)$

·7 $m \neq 0 \,.\supset:\, a = m/n\, b \,.=.\, b = n/m\, a$

❋45. *Conditions d'égalité.*

$m,p \varepsilon \mathrm{N}_0 \,.\, n,q \varepsilon \mathrm{N} \,.\supset.$

·1 $m/n = p/q \,.=.\, mq = np$

[$m/n = p/q \,.\, a \varepsilon \mathrm{Grand} - \iota 0 \,.\supset.\, m/n\, a = p/q\, a \,.\supset.\, nq(m/n\, a) = nq(p/q\, a) \,.\supset$

$qma = npa \,.\supset.\, mp = nq$ (1)

$mq = np \,.\, a \varepsilon \mathrm{Grand} \,.\supset\, mqa = npa \,.\supset.\, qn(m/n\, a) = nq(p/q\, a) \,.\supset.$

$m/n\, a = p/q\, a$ (2)

(1) $.\supset:\, m/n = p/q \,.\, \exists \mathrm{Grand} - \iota 0 \,.\supset.\, mq = np$ (3)

(2) $.\supset\therefore\, mq = np \,.\supset:\, a \varepsilon \mathrm{Grand} \,.\supset_a.\, m/n\, a = p/q\, a$ (4)

(3) . (4) $.\supset.$ P]

·2 $m/n = (mq)/(nq)$

·3 $x,y \varepsilon \mathrm{R}_0 \,.\supset.\, \exists (r;s;t) \ni (r,s \varepsilon \mathrm{N}_0 \,.\, t \varepsilon \mathrm{N} \,.\, x = r/t \,.\, y = s/t)$

❋ 46. *Rationnels entiers.*

$m \varepsilon \mathrm{N}_0 \,.\, n \varepsilon \mathrm{N} \,.\supset.$ ·1. $m/1 = m$ ·2. $(mn)/n = m$

·3 $m/n \varepsilon \mathrm{N}_0 \,.=.\, \exists\, \mathrm{N}_0 \frown x \ni (m = xn)$

·4 $m/n = 0 \,.=.\, m = 0$ ·5. $m/n = 1 \,.=.\, m = n$

§2. SOMME DES RATIONNELS

$m,n,p \,\varepsilon\, \mathrm{R}_0 \,.\supset.$

❋ 47. *Classe homogène formée par les rationnels.*

·1 $m+n = \iota\, \mathrm{Op} \frown x \ni (+ \varepsilon \mathrm{Op}_2 \,.\, u \varepsilon \mathrm{GrandHmog}\, + \,.\, y \varepsilon u \,.\supset_{+,u,y}.\, xy = my + ny)$ Df

·2 $m+n \,\varepsilon\, \mathrm{R}_0$ ·3 $\mathrm{R}_0 \,\varepsilon\,$ Grand omog $+$

·4 En vertu de la P·3 nous entendons répétées les prop. du §2, Chap. I, dans lesquelles on pose R_0 au lieu de G_0 et R au lieu de G·

❋ 48. *Propositions primitives pour* G_0 *qui sont vérifiées par* R_0

Sont vérifiées, comme il est bien aise de démontrer, les Pp 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 7_1, 8_1. Pour démontrer la Pp 7_1 il faut bien observer que par les prop. 47·2, 26·1 reste défini le produit d'un rationnel pour un entier et que par le principe d'induction on déduit aisément que le produit de $r/(hs)$ pour h est r/s, étant r, s, h des entiers (P49·1).

§3. LE PRODUIT

$+ \varepsilon \mathrm{Op}_2 . \mathrm{G}_0 \, \varepsilon \, \mathrm{GrandHomog} + . \, a,b \, \varepsilon \, \mathrm{G}_0 . \, m,n \, \varepsilon \, \mathrm{R}_0 .\supset.$

✻ 49. *Propriété commutative.*

·1 $t(r/s) = (tr)/s$

$[\ \mathrm{Hp} . t=0 .\subset. \mathrm{Ths}$ (1)

$\ldots . t(r/s) = (tr)/s .\supset. (t+1))(r/s = ((t+1)r)/s$ (2)

$(1) . (2) . \mathrm{Induct} .\supset. \mathrm{P}\ ]$

·2 $(r/s)(t/u) = (rt)/(su)$

$[\ s(t/(su)) = (st)/(su) = t/u$ (1)

$(1) .\supset. (1/s)(t/u) = t/(su)$ (2)

$(2) .\supset. (r/s)(t/u) = r(t/(su)) = (rt)/su\ ]$

·3 $mn = nm$ $[\ \mathrm{P}{\cdot}2 .\supset. \mathrm{P}\ ]$

✻ 50. *Propriété distributive.*

·1 $(m+n)a = ma + na$

·2 $m \gtreqless n .\supset. (m-n)a = ma - na$

·3 $m(a+b) = ma + mb$

·4 $a \gtreqless b .\supset. m(a-b) = ma - mb$

✻ 51. *Propriété associative.*

·1 $mna = (mn)a$ Df ·2 $m(na) = mna$

✻ 52. *Produits nuls.*

·1 $ma \neq 0 .=. m \neq 0 . a \neq 0$

·2 $ma = 0 .=: m = 0 .\cup. a = 0$

$[\ r,s \, \varepsilon \mathrm{N} . m = r/s .\supset. ma \neq 0 . r/s\, a \neq 0 .=. s(r/s\, a) \neq 0$
$.=. ra \neq 0 .=. r \neq 0 . a \neq 0 .=. m \neq 0 . a \neq 0\ ]$

.3 $m \varepsilon \mathrm{R} . a \varepsilon \mathrm{G} .\supset. ma \, \varepsilon \mathrm{G}$

✻ 53. *Les symboles* $= \ > \ <$

·1 $m \neq 0 .\supset: ma = mb .=. a = b$

$[\ r,s \, \varepsilon \mathrm{N} .\supset: r/s\, a = r/s\, b .=. s(r/s\, a) = s(r/s\, b) .=. ra = rb .=. a = b\ ]$

·2 $a \neq 0 .\supset: ma = na .=. m = n$

·3 $m \neq 0 .\supset: ma < mb .=. a < b$

·4 $a \neq 0 .\supset: ma < na .=. m < n$

·5 $c \varepsilon \mathrm{G} . a < b .\supset. \exists \mathrm{R} \frown x \ni (a < xc < b)$ $[\ \mathrm{P}40{\cdot}3 .\supset. \mathrm{P}\ ]$

·6 $m \neq 0 . a < b .\supset. \exists \mathrm{G} \frown x \ni (a \leqq mx < b)$ $[\ \mathrm{P}40{\cdot}2 .\supset. \mathrm{P}\ ]$

CHAP. IV — LES NOMBRES

Lorsque l'indication [ ] manque à la droite d'une prop. l'indication [1.2.3.4.5.6.7.8] reste sous-entendue.

§1. PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

✻ 54. *Quelques propriétés des classes des rationnels.*

·1 $u \varepsilon \mathrm{Clr}`\mathrm{R}_0 . a \varepsilon \mathrm{Grand} .\supset. ua = x \ni \exists\, u \frown y \ni (x = ya)$ Df

·2 ————————————$\supset. ua \, \varepsilon \, \mathrm{Cls}`\mathrm{Grand}$ [1.2.3.4.5.6.7_1]

·2 $u \varepsilon \mathrm{ClsExisLim}`\mathrm{R}_0 . a \varepsilon \mathrm{Grand} .\supset. ua \, \varepsilon \, \mathrm{ClsExisLim}`\mathrm{Grand}$ [»]

·4 $u,v \, \varepsilon \, \mathrm{ClsExisLim}`\mathrm{R}_0 .\supset. u+v \, \varepsilon \, \mathrm{ClsExisLim}`\mathrm{R}_0$ [»]

·5 —— $\mathrm{Cls}`\mathrm{R}_0 . a \varepsilon \mathrm{Grand} .\supset. (u+v)a = ua + va$ [»]

✻ 55. *Définition du symbole* Q_0

·1 $\mathrm{Q}_0 = \mathrm{Op} \frown y \ni \exists\, u \ni [(u \varepsilon \mathrm{ClsExisLim}`\mathrm{R}_0 : x \varepsilon \mathrm{Grand} .\supset_x . \ yx = \mathrm{l}'(ux)]$

... = « nombre (quantité réelle, positive ou nulle) ».

·2 $a,b \varepsilon \mathrm{Grand} . m,n \varepsilon \mathrm{Q}_0 . a = b . m = n .\supset. ma = nb$

·3 $\mathrm{R}_0 \supset \mathrm{Q}_0$ [1.2.3.4.5.6.7]

·4 $m \varepsilon \mathrm{Q}_0 . v \varepsilon \mathrm{GrandHomog} . a \varepsilon v .\supset. ma \, \varepsilon v$

$[\ \mathrm{Hp}\ \mathrm{P}{\cdot}1 .\supset: \exists u \ni (u \varepsilon \mathrm{ClsExisLim}`\mathrm{R}_0 : y \varepsilon \mathrm{Grand} .\supset_y . my = \mathrm{l}'(uy))$ (1)

$\mathrm{Hp} . u \varepsilon \mathrm{ClsExisLim}`\mathrm{R}_0 .\supset. \mathrm{l}'(ua) \varepsilon v$ (2)

——————— $: y \varepsilon \mathrm{Grand} .\supset_y . my = \mathrm{l}'(uy) :\supset. ma = \mathrm{l}'(ua)$ (3)

$(1) . (2) . (3) .\supset. \mathrm{P}\ ]$

·5 $m \varepsilon \mathrm{Q}_0 .\supset. m0 = 0$ ·6 $\mathrm{Q}_0 \varepsilon \mathrm{Cls}`\mathrm{Op}$

·7 $m,n \varepsilon \mathrm{Q}_0 .\supset\therefore m = n .=: x \varepsilon \mathrm{Grand} .\supset_x . mx = nx$

·8 $u \varepsilon \mathrm{ClsExisLim}`\mathrm{R}_0 \,.\, m,n \varepsilon \mathrm{Q}_0 : x \varepsilon \mathrm{Grand} \,.\supset_x.\, mx = \mathrm{l}'(ux) \,.\, nx =$
$\mathrm{l}'(ux) \,:\supset.\, m = n$

✻ 56. *Correspondance parmi les nombres et les grandeurs.*

$m,n \varepsilon \mathrm{Q}_0 \,.\supset.$

·1 $a \varepsilon \mathrm{Grand} \,.\, a -= 0 \,.\, ma = na \,.\supset.\, m = n$
$[\, u,v \varepsilon \mathrm{ClsExisLim}`\mathrm{R}_0 : y \varepsilon \mathrm{Grand} \,.\supset_y.\, my = \mathrm{l}'(uy) \,.\, ny = \mathrm{l}'(uy)$ (Hp) (1)
$\mathrm{Hp} \,.\, (1) \,.\, \mathrm{P}24{\cdot}3 \,.\supset.\, \theta(ua) = \theta(va)$ (2)
$\mathrm{Hp} \,.\, (1) \,.\, \mathrm{P}24{\cdot}7 .\, x \varepsilon \mathrm{Grand} \,.\, x -= 0 \,.\, \theta(ux) -= \theta(vx) \,.\supset.\, \theta(ua) -= \theta(va)$ (3)
$\mathrm{Hp} \,.\, (1) \,.\, (2) \,.\, (3) \,.\, x \varepsilon \mathrm{Grand} \,.\, x -= 0 \,.\supset.\, \theta(ux) = \theta(vx)$ (4)
$\mathrm{Hp} \,.\, (1) \,.\, x = 0 \,.\supset.\, \theta(ux) = \theta(vx)$ (5)
$\mathrm{Hp} \,.\, (1) \,.\, (4) \,.\, (5) \,.\supset: x \varepsilon \mathrm{Grand} \,.\supset_x.\, \theta(ux) = \theta(vx)$ (6)
$\mathrm{Hp} \,.\, (1) \,.\, (6) \,.\, \mathrm{P}55{\cdot}1 \,.\, \mathrm{P}24{\cdot}3 \,.\supset: x \varepsilon \mathrm{Grand} \,.\supset_x.\, mx = nx \,:\supset.\, \mathrm{Ths} \,]$

·2 $v \varepsilon \mathrm{GrandHomog} \,.\, a,b \varepsilon v \,.\, b -= 0 \,.\supset.\, \exists\, \mathrm{Q}_0 \frown z \ni (zb = a)$
$[\, u = \mathrm{R}_0 \frown x \ni (xb \leqq a)$ Df (1)
$\mathrm{Hp} \,.\, (1) \,.\supset.\, u \varepsilon \mathrm{ClsExisLim}`\mathrm{R}_0$ (2)
$\mathrm{Hp} \,.\, (1) \,.\, (2) \,.\supset.\, \mathrm{l}'(ub) \varepsilon v$ (3)
$\mathrm{Hp} \,.\, (1) \,.\, (3) \,.\, y \varepsilon v \,.\, y < \mathrm{l}'(ub) \,.\, \mathrm{P}24{\cdot}2 \,.\supset.\, \exists\, u \frown x \ni (y < xb)$ (4)
$———— \,.\, (4) \,.\supset.\, \theta(\mathrm{l}'(ub)) \supset \theta a$ (5)
$\mathrm{Hp} \,.\, y \varepsilon v \,.\, y < a \,.\, \mathrm{P}53{\cdot}5 \,.\supset.\, \exists\, \mathrm{R} \frown x \varepsilon (y < xb < a) \,.\, (1) \,.\supset.\, y < \mathrm{l}'(ua)$ (6)
$\mathrm{Hp} \,.\, (1) \,.\, (6) \,.\supset.\, \theta a \supset \theta(\mathrm{l}'(ub))$ (7)
$(1) \,.\, (3) \,.\, (5) \,.\, (7) \,.\, \mathrm{P}22{\cdot}2 \,.\supset.\, a = \mathrm{l}'(ub)$ (8)
$(8) \,.\, \mathrm{P}55{\cdot}1 \,.\supset.\, \mathrm{P} \,]$

·2′ $v \varepsilon \mathrm{GrandHomog} \,.\, a,b \varepsilon v - \iota 0 \,.\supset.\, \exists\, \mathrm{Q} \frown z \ni (zb = a)$
$[\, \mathrm{P}{\cdot}2 \,.\, \mathrm{P}28{\cdot}4 \,.\supset.\, \mathrm{P} \,]$

·3 $u \varepsilon \mathrm{Cls}`\mathrm{Q}_0 \,.\, a \varepsilon \mathrm{Grand} \,.\supset.\, ua = x \ni \exists\, u \frown y \ni (x = ya)$ Df

·4 $u \varepsilon \mathrm{GrandHomog} \,.\, a \varepsilon u - \iota 0 \,.\supset.\, \mathrm{Q}_0 a = u$
$[\, \mathrm{Hp} \,.\, \mathrm{P}55{\cdot}5 \,.\supset.\, \mathrm{Q}_0 a \supset u$ (1)
$\mathrm{Hp} \,.\, \mathrm{P}{\cdot}1{\cdot}2 \,.\supset.\, u \supset \mathrm{Q}_0 a$ (2)
$\mathrm{Hp} \,.\, (1) \,.\, (2) \,.\supset.\, \mathrm{Ths} \,]$

§2. SOMME DES NOMBRES

$m,n,p \varepsilon \mathrm{Q}_0 \,.\supset.$

✻ 57. *Classe homogène formée par les nombres.*

·1 $m+n = \imath\mathrm{Q}_0 \frown y \ni (x \varepsilon \mathrm{Grand} \,.\supset_x.\, yx = mx + nx)$ Df

·2 $m+n \,\varepsilon\, \mathrm{Q}_0$
$[\, u,v \varepsilon \mathrm{ClsExisLim}`\mathrm{R}_0 : y \varepsilon \mathrm{Grand} \,.\supset_y.\, my = \mathrm{l}'(uy) \,.\, ny = \mathrm{l}'(vy) \,:\supset:$
$my + ny = \mathrm{l}'(uy) + \mathrm{l}'(vy) = \mathrm{l}'(uy + vy) = \mathrm{l}'((u+v)y)$ (1)
$(1) \,.\supset.\, \exists\, \mathrm{Q}_0 \frown x \ni (y \varepsilon \mathrm{Grand} \,.\supset_y.\, xy = mx + ny)$ (2)

$x,z \varepsilon \mathrm{Q}_0 : y \varepsilon \mathrm{Grand} \,.\supset_y.\, xy = mx + ny \,.\, zy = mx + ny \,:\supset:$
$y \varepsilon \mathrm{Grand} \,.\supset_y.\, xy = zy \,:\supset: x = z$ (3)
$(2) \,.\, (3) \,.\supset.\, \mathrm{P} \,]$

·3 $\mathrm{Q}_0 \,\varepsilon\, \mathrm{GrandHomog} +$

·4 Voir P47·4.

✻ 58. *Propositions primitives pour* G_0 *qui sont vérifiées par* Q_0

·1·2·3·4 Voir n° 22

·5 $m \varepsilon \mathrm{Q} \,.\supset.\, m+n \,\varepsilon\, \mathrm{Q}$
$[\, \mathrm{Hp} \,.\, \mathrm{P}55{\cdot}7 \,.\supset.\, \exists\, \mathrm{Grand} \frown y \ni (my -= 0)$ (1)
$— \,.\, y \varepsilon \mathrm{Grand} \,.\, my -= 0 \,.\supset.\, my + ny -= 0$ (2)
$\mathrm{Hp} \,.\, (1) \,.\, (2) \,.\supset.\, \exists\, \mathrm{Grand} \frown y \ni ((m+n)y -= 0) \,.\supset.\, \mathrm{Ths} \,]$

·6 $m = n \,.\cup.\, m < n \,.\cup.\, m > n$
$[\, y \varepsilon \mathrm{Grand} \,.\, y -= 0 \,:\supset: my \,\varepsilon\, ny \dotplus \mathrm{Grand} \,.\cup.\, ny \,\varepsilon\, my \dotplus \mathrm{Grand} : \mathrm{P}56{\cdot}4$
$:\supset: my \,\varepsilon\, (n \dotplus \mathrm{Q}_0)y \,.\cup\, ny \,\varepsilon\, (n + \mathrm{Q}_0)y : \mathrm{P}56{\cdot}1 \,:\supset.\, \mathrm{P} \,]$

·7 $m -= 0 \,.\supset.\, \exists\, \mathrm{Q} \frown \theta m$
$[\, \mathrm{Hp} \,.\, x \varepsilon \mathrm{G} \,.\supset.\, \exists\, (y;z) \ni (y,z \,\varepsilon\, \mathrm{G} \,.\, y + z = my) \,.\, \mathrm{P}56{\cdot}2' \,.\supset:$
$\exists\, (p;q) \ni (p,q \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, py \dotplus qy = my) \,.\supset.\, \mathrm{Ths} \,]$

·8 $u \varepsilon \mathrm{ClsExisLim}`\mathrm{Q}_0 \,.\supset.\, \exists\, \mathrm{Q}_0 \frown x \ni (\theta x = \theta u)$
$[\, a \varepsilon \mathrm{Grand} \,.\, a -= 0 \,.\supset: ma < na \,.=.\, m < n$ (1)
$\mathrm{Hp} \,.\supset.\, \exists\, \mathrm{Q}_0 \frown x \ni (y \varepsilon \mathrm{Grand} \,.\supset_y.\, xy = \mathrm{l}'(uy))$ (2)
$— \,.\, (1) \,.\, (2) \,.\, x \varepsilon \mathrm{Q}_0 : y \varepsilon \mathrm{Grand} \,.\supset_y.\, xy = \mathrm{l}'(uy) \,:\supset.\, \theta x \supset \theta u$ (3)
$———————————— \,:\supset.\, \theta u \supset \theta x$ (4)
$(3) \,.\, (4) \,.\supset.\, \mathrm{P} \,]$

§3. LE PRODUIT

$+ \varepsilon \mathrm{Op}_2 \,.\, \mathrm{G}_0 \,\varepsilon\, \mathrm{GrandHomog}+ \,.\, a,b \varepsilon \mathrm{G}_0 \,.\, m,n \varepsilon \mathrm{Q}_0 \,.\supset.$

✻ 59. *Produits nuls.*

·1 $m \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, a \varepsilon \mathrm{G} \,.\supset.\, ma \,\varepsilon\, \mathrm{G}$
$[\, u \varepsilon \mathrm{ClsExisLim}`\mathrm{R}_0 : y \varepsilon \mathrm{G}_0 \,.\supset_y.\, my = \mathrm{l}'(uy)$ (Hp) (1)
$\mathrm{Hp} \,.\, (1) \,.\, \mathrm{P}55{\cdot}7 \,.\supset.\, \exists\, \mathrm{G}_0 \frown y \ni (my -= 0) \,.\supset.\, u -= \iota 0$ (2)
$\mathrm{Hp} \,.\, (1) \,.\, (2) \,.\supset.\, ua -= \iota 0 \,.\, \mathrm{P}23{\cdot}5 \,.\supset.\, \mathrm{l}'(ua) -= 0 \,.\, (1) \,.\supset.\, \mathrm{Ths} \,]$

·2 $ma -= 0 \,.=.\, m -= 0 \,.\, a -= 0$

✻ 60. *Propriétés des symboles* $= \;>\; <$

·1 $m -= 0 \,.\, a < b \,.\supset.\, ma < mb$
$[\, u \varepsilon \mathrm{ClsExisLim}`\mathrm{R}_0 : y \varepsilon \mathrm{G}_0 \,.\supset_y.\, my = \mathrm{l}'(uy)$ (Hp) (1)
$\mathrm{Hp} \,.\, (1) \,.\supset.\, u -= \iota 0$ (2)

Hp $.\supset. \exists\, G \cap x \ni (a < x < b) . (1) . (2) .\supset. \theta(ua) \supset \theta(ub) . \theta(ua) -= \theta(ub)$.
P24·7 $.\supset. \mathrm{l}'(ua) < \mathrm{l}'(ub) .\supset.$ Ths]

·2 $a -= 0 . m < n .\supset. ma < na$
[Hp $.\supset. n \varepsilon m + \mathrm{Q}$. P·1 $.\supset. na \varepsilon ma + \mathrm{G} .\supset.$ Ths]

·3 $m -= 0 .\supset: ma = mb .=. a = b$

·4 $a -= 0 .\supset: ma = na .=. m = n$

·5 $m -= 0 .\supset: ma < mb .=. a < b$

·6 $a -= 0 .\supset: ma < na .=. m < n$

✻ 61. *Produit d'une classe de grandeurs pour une classe de nombres.*

$u \varepsilon \mathrm{ClsExisLim}‘\mathrm{Q}_0 . v \varepsilon \mathrm{ClsExisLim}‘\mathrm{G}_0 .\supset.$

·1 $uv = x \ni \exists (y; z) \ni (y \varepsilon u . z \varepsilon v . x = yz)$ Df

·2 $uv \varepsilon \mathrm{ClsExisLim}‘\mathrm{G}_0$

·3 $\mathrm{l}'(uv) = (\mathrm{l}'u)(\mathrm{l}'v)$

[Hp . P·2 $.\supset. \mathrm{l}'(uv), \mathrm{l}'v \varepsilon \mathrm{G}_0 . \mathrm{l}' u \varepsilon \mathrm{Q}_0$ (1)
Hp $: \mathrm{l}'u = 0 .\cup. \mathrm{l}'v = 0 :\supset: \mathrm{l}'(uv) = 0 :\supset.$ Ths (2)
$\mathrm{l}'u -= 0 . \mathrm{l}'v -= 0$ (Hp) (3)
Hp . (3) $. x \varepsilon \mathrm{G}_0 . x < \mathrm{l}'(uv) .\supset. \exists (h; y) \ni (h \varepsilon u . y \varepsilon v . x < hy)$. P24·8 $.\supset.$
$\theta(\mathrm{l}'(uv)) \supset \theta(\mathrm{l}'u)(\mathrm{l}'v)$ (4)
Hp . (3) $. x \varepsilon \mathrm{G}_0 . x < (\mathrm{l}'u)(\mathrm{l}'v) .\supset. \exists\, \mathrm{R} \cap h \varepsilon (x < h(\mathrm{l}'v) < (\mathrm{l}'u)(\mathrm{l}'v)$
$.\supset. \exists\, \mathrm{R} \cap h \ni (x < h(\mathrm{l}'v))$ (5′)
Hp . (3) $. x \varepsilon \mathrm{G}_0 . h \varepsilon \mathrm{R} . x < h(\mathrm{l}'v) .\supset. \exists\, \mathrm{G} \cap z \ni (x < hz < h(\mathrm{l}'v) .\supset.$
$\exists\, \mathrm{G} \cap z \ni (x < hz . z < \mathrm{l}'v)$ (5)″
Hp . (3) . (5)′ . (5)″ $\supset \theta(\mathrm{l}'u)(\mathrm{l}'v)) \supset \theta(\mathrm{l}'(uv))$ (5)
(2) · (5) $.\supset.$ P]

·4 $ua = u(\iota a)$ Df

·5 $\mathrm{l}'(ua) = (\mathrm{l}'u)a$ [P·3 . P23·3 $.\supset.$ P]

✻ 62. *Détermination des nombres au moyen des classes des rationnels.*

·1 $u \varepsilon \mathrm{ClsExisLim}‘\mathrm{R}_0 : x \varepsilon \mathrm{G}_0 .\supset_x. mx = \mathrm{l}'(ux) :\supset. m = \mathrm{l}'u$
[Hp . P61·5 $:\supset: y \ni \mathrm{G}_0 .\supset_y. my = (\mathrm{l}'u)y :\supset:$ P]

·2 $\mathrm{Q}_0 = x \ni \exists u \ni (u \varepsilon \mathrm{ClsExisLim}‘\mathrm{R}_0 . x = \mathrm{l}'u)$ [P55·1 . P·2 $.\supset.$ P]

·3 $m -= 0 .\supset. \mathrm{l}'(\mathrm{R}_0 \cap \theta m) = m$
[Hp $.\supset. \theta(\mathrm{R}_0 \cap \theta m) \supset \theta m$ (1)
Hp $. x \varepsilon \mathrm{Q}_0 . x < m . a -= 0 .\supset. xa < ma .\supset. \exists\, \mathrm{R}_0 \cap y \ni (xa < ya < ma)$
$.\supset. \exists\, \mathrm{R}_0 \cap y \ni (x < y < m)$ (2)
Hp . (2) $.\supset. \theta m \supset \theta(\mathrm{R}_0 \cap \theta m)$ (3)
Hp . (1) . (3) . P24·3 $.\supset.$ Ths]

✻ 63. *Propriété commutative.*

$mn = nm$
[$u, v \varepsilon \mathrm{ClsExisLim}‘\mathrm{R}_0 . m = \mathrm{l}'u . n = \mathrm{l}'v$ (Hp) (1)
(1) . P49·3 . P61·1 $.\supset. uv = vu$ (2)
(1) . (2) . P61·3 $.\supset. (\mathrm{l}'u)(\mathrm{l}'v) = (\mathrm{l}'v)(\mathrm{l}'u)$ (3)
(1) . (3) $.\supset.$ P]

✻ 64. *Propriété associative.*

·1 $mna = (mn)a$ Df ·2 $m(na) = mna$
[$u, v \ni \mathrm{ClsExisLim}‘\mathrm{R}_0 . m = \mathrm{l}'u . n = \mathrm{l}'v$. P51·2 . P61·3 $.\supset. m(na) =$
$(\mathrm{l}'u)((\mathrm{l}'v)a) = (\mathrm{l}'u)(\mathrm{l}'(va)) = \mathrm{l}'(u(va)) = \mathrm{l}'(uv)a = (\mathrm{l}'u)(\mathrm{l}'v)a = mna$]

✻ 65. *Propriété distributive.*

·1 $(m+n) = ma + na$ [P57·1·2 $.\supset.$ P]

·2 $m \geqq n .\supset. (m-n)a = ma - na$

·3 $m(a+b) = ma + mb$
[Hp $. a = 0 . b = 0 \supset$ Ths (1)
Hp $. a -= 0$. P56·2 $.\supset. \exists\, \mathrm{Q}_0 \cap x \ni (b = xa)$ (2)′
——————— $. x \varepsilon \mathrm{Q}_0 . b = xa .\supset. m(a+b) = m(a+xa) = m((1+x)a) =$
$m(1+x)a = ma + mxa = ma + m(xa) = ma + mb$ (2)″
Hp $. a -= 0$. (2)′ . (2)″ $.\supset.$ Ths (2)
—— $. b -= 0 .\supset.$ Ths (3)
(1) . (2) . (3) $.\supset.$ P]

·4 $a \geqq b .\supset. m(a-b) = ma - mb$

§4. LE QUOTIENT

$+ \varepsilon \mathrm{Op}_2 . \mathrm{G}_0 \varepsilon \mathrm{GrandHomog}+ . a, c \varepsilon \mathrm{G}_0 . b, d \varepsilon \mathrm{G} . m, p \varepsilon \mathrm{Q}_0 . n, q \varepsilon \mathrm{Q} .\supset.$

✻ 66. *Définitions et propriétés fondamentales.*

·1 $a/b = \iota \mathrm{Q}_0 \cap x \ni (xb = a)$ Df
—— = « quotient de a pour b ».
—— = « fraction dont a est le numérateur et b le dénominateur ».

·2 $a/b \mathrm{Q}_0$ [P56.1.2 $.\supset.$ P] ·3 $(a/b)b = a$ ·4 $b/b = 1$

·5 « inverse ou réciproque de n » $= 1/n$ Df

·6 $1/n\, \varepsilon \mathrm{Q}_0$ [P·2 $.\supset.$ P] ·7 $m/n = (1/n)m$
[P·3 $.\supset. (1/n)n = 1 .\supset. (1/n)nm = m$. P·3 $.\supset. ((1/n)m)n = (m/n)n .\supset.$ P]

·8 $a/n = (1/n)a$ « quotient de a pour n » Df

·9 $a/n\, \varepsilon \mathrm{G}_0$ ·10 $n(a/n) = a$ ·11 $a/1 = a$

·12 $1/(b/d) = d/b$

[$\mathrm{Hp}\,.\,\mathrm{P}{\cdot}1 \;.\!\supset.\; b/d \;-\!= 0$ (1)

$\mathrm{Hp}\,.\,(1)\,.\,x \varepsilon \mathrm{Q}\,.\,b/d = x \;.\!\supset.\; b = xd \;.\!\supset.\; x(1/x)b = xd \;.\!\supset.\; (1/x)b = d \;.\!\supset.$

$d/b = 1/x\,.$ (2)

$(1)\,.\,(2) \;.\!\supset.\; \mathrm{P}$]

·13 $1/(1/n) = n$ ·14 $1/(nq) = (1/n)(1/q)$

✻ 67. *Les symboles* $= \; < \; >$

·1 $a/b = m \;.\!=.\; a = mb$ $a/n = m \;.\!=.\; a = mn$

[$a/b = m \;.\!=.\; (a/b)b = mb \;.\!=.\; a = mb$

$a/n = m \;.\!=.\; n(a/n) = mn \;.\!=.\; a = mn$]

·2 $a/b = 0 \;.\!=.\; a/n = 0 \;.\!=.\; a = 0$

·3 $a/b = 1 \;.\!=.\; a = b$ $a/b < 1 \;.\!=.\; a < b$

[$a/b < 1 \;.\!=.\; (a/b)b < b \;.\!=.\; a < b$]

·4 $a/n = c/q \;.\!=.\; qa = nc$ $a/n < c/q \;.\!=.\; qa < nc$

[$a/n = c/q \;.\!=.\; nq(a/n) = nq(c/q) \;.\!=.\; qa = nc$]

·5 $1/n < 1/q \;.\!=.\; n > q$

·6 $(qa)/(qb) = a/b$ $(qa)/(qn) = a/n$ $(mb)/(nb) = m/n$

✻ 68. *Produit de deux fractions.*

·1 $m(a/b) = (ma)/b$ $m(a/n) = (ma)/n$ $(m/n)a = (ma)/n$

·2 $(a/b)/n = a/(nb)$ $(a/q)/n = a/(qn)$

·3 $n(a/b) = a/(b/n)$ $n(a/q) = a/(q/n)$ $(a/b)/n = (a/n)/b$

$(a/q)/n = (a/n)/q$ $(a/q)/b = (a/b)/q$

·4 $(na)/n = a$ $(mb)/b = m$

·5 $(m/n)(a/b) = (ma)/(nb)$ $(m/n)(a/q) = (ma)/(nq)$

.6 $(a/b)(b/d) = a/d$

✻ 69. *Propriété distributive.*

·1 $(a+c)/b = a/b + c/b$ $(a+c)/n = a/n + c/n$

·2 $a \geq c \;.\!\supset.\; (a-c)/b = a/b - c/b\,.\,(a-c)/n = a/n - c/n$

✻ 70. *Décomposition en produit.*

·1 $n < 1 \;.\!\supset.\; \exists(x\,;y) \ni (x,y \varepsilon \mathrm{Q} \frown \theta 1\,.\,xy = n)$

[$x \varepsilon \mathrm{Q}\,.\,x < 1 \;.\!\supset_x.\; n/x \leqq 1 \;:\!\supset:\; x \varepsilon \mathrm{Q}\,.\,x < 1 \;.\!\supset_x.\; n \leqq x \;:\!\supset:\; n \leqq 1$ (1)

$(1)\,.\,\mathrm{Hp} \;.\!\supset.\; \exists \mathrm{Q} \frown x \ni (x < 1\,.\,n/x < 1)$ (2)

$\mathrm{Hp}\,.\,(2) \;.\!\supset.\; \mathrm{Ths}$]

·2 $n \varepsilon \mathrm{R} \frown \theta 1 \;.\!\supset.\; \exists(x\,;y) \varepsilon (x,y \varepsilon \mathrm{R} \frown \theta 1\,.\,xy = n)$ [1.2.3.4.5.6.7$_1$]

·3 $b < nd \;.\!\supset.\; \exists(x\,;y) \ni (x \varepsilon \mathrm{Q} \frown \theta n\,.\,y \varepsilon \mathrm{G} \frown \theta d\,.\,xy = b)$

[$\mathrm{Hp} \;.\!\supset.\; b/(nd) < 1\,.\,\mathrm{P}{\cdot}1 \;.\!\supset.\; \exists(h\,;k) \ni (h,k \varepsilon \theta 1\,.\,b/nd = hk)$ (1)

$\mathrm{Hp}\,.\,h,k \varepsilon \theta 1\,.\,b/nd = hk \;.\!\supset.\; b = (hn)(kd)$ (2)

$(1)\,.\,(2) \;.\!\supset.\; \mathrm{P}$]

·4 $m,n,p \varepsilon \mathrm{R}\,.\,m < np \;.\!\supset.\; \exists(x\,;y) \ni (x \varepsilon \mathrm{R} \frown \theta n\,.\,y \varepsilon \mathrm{R} \frown \theta p\,.\,xy = m)$

✻ 71. *Algoritme Euclidienne.*

$\mathrm{G}_0{}' \varepsilon\, \mathrm{GrandHomog}+\,.\,a',c' \varepsilon \mathrm{G}_0{}'\,.\,b',d' \varepsilon \mathrm{G}' \;.\!\supset.$

·1 « rapport de a à b » $= a/b$

·2 « proportion » $=$ « égalité de deux rapports »

·3 $b/d = b'/d' \;.\!=.\; d/b = d'/b'$

} EUCLIDE, L. V, Def. XIII { « Invertir ».

[$b/d = b'/d' \;.\!=.\; 1/(b/d) = 1/(b'/d') \;.\!=.\; d/b = d'/b'$]

·4 $a/b = a'/b' \;.\!=.\; (a+b)/b = (a'+b')/b'$

} EUCLIDE, L. V, Def. XIV { « Composer ».

[$a/b = a'/b' \;.\!=.\; a/b+1 = a'/b'+1 \;.\!=.\; a/b + b/b = a'/b' + b'/b' \;.\!=.$

$(a+b)/b = (a'+b')/b'$]

·5 $a \geqq b\,.\,a' \geqq b' \;.\!\supset:\; a/b = a'/b' \;.\!=.\; (a-b)/b = (a'-b')/b'$

} EUCLIDE, L. V, Def. XV { « Diviser ».

·6 $a > b\,.\,a' > b' \;.\!\supset:\; a/b = a'/b' \;.\!=.\; a/(a-b) = a'/(a'-b')$

} EUCLIDE, L. V, Def. XVI { « Convertir ».

·7 $a,c \varepsilon \mathrm{G} \;.\!\supset:\; a/b = c/d \;.\!=.\; a/c = b/d$

} EUCLIDE, L. V, Def. XII { « Permuter ».

[$a/b = c/d \;.\!=.\; (a/b)(b/c) = (c/d)(b/c) \;.\!=.\; a/c = b/d$]

Pour la proportionnalité voir Form. t.1, IV, §10.

CHAP. V — LES PUISSANCES

§1. PUISSANCE DONT L'EXPOSANT EST UN ENTIER

$a,b \,\varepsilon\, Q_0 \,.\, m,n \,\varepsilon\, N_0 \,.\supset.$

❋ 72. *Définition et univocité de la puissance.*

·1 $a^0=1 \,:\, a^{m+1}=a^m a$ Df

·2 $a \varepsilon Q_0 \,.\supset.\, a^m \varepsilon Q_0 \,:\, a \varepsilon R_0 \,.\supset.\, a^m \varepsilon R_0 \,:\, a \varepsilon N_0 \,.\supset.\, a^m \varepsilon N_0$

[Hp . $m=0 \,.\supset.$ Ths (1)

— . $a \upharpoonleft m \,\varepsilon Q_0 \,.\supset.\, (a\upharpoonleft m) a \,\varepsilon Q_0$. P·1 $.\supset.\, a\upharpoonleft(m+1) \,\varepsilon Q_0$ (2)

(1) . (2) . Induct $.\supset.$ P]

·3 $a=b \,.\, m=n \,.\supset.\, a^m=b^n$ ·4 $a^1=a$

·5 $m -= 0 \,.\supset.\, 0^m=0$ ·6 $1^m=1$

❋ 73. *Propriétés fondamentales des puissances.*

·1 $a^m a^n = a^{m+n}$

[Hp . $n=0 \,.\supset.$ Ths (1)

— $a\upharpoonleft m \, a\upharpoonleft n = a\upharpoonleft(m+n) \,.\supset.\, a\upharpoonleft m \, a\upharpoonleft(n+1) = a\upharpoonleft(m+(n+1))$ (2)

(1) , (2) . Induct $.\supset.$ P [

·2 $a -= 0 \,.\, m \geqq n \,.\supset.\, a^m/a^n = a^{m-n}$ ·3 $(ab)^m = a^m b^m$

] Induct $.\supset.$ P]

·4 $b -= 0 \,.\supset.\, (a/b)^m = a^m/b^m$ ·5 $(a^m)^n = a^{mn}$

❋ 74. *Les symboles* $= \; < \; >$

·1 $m -= 0 \,.\supset:\, a^m<b^m \,.=.\, a<b$

[Hp . Induct $.\supset:\, a<b \,.\supset.\, a\upharpoonleft m < b\upharpoonleft m$ (1)

(1) $.\supset:\, a \geqq b \,.\supset.\, a\upharpoonleft m \geqq b\upharpoonleft m \,:\supset:\, a\upharpoonleft m < b\upharpoonleft m \,.\supset.\, a<b$ (2)

(1) . (2) $.\supset.$ P]

·2 $m -= 0 \,.\supset:\, a^m=b^m \,.=.\, a=b$

[Hp . P·1 $.\supset:\, a\upharpoonleft m -= b\upharpoonleft m \,.=.\, a -= b \,:\supset:$ Ths]

·3 $m -= 0 \,.\supset:\, a^m<1 \,.=.\, a<1 \,:\, a^m=1 \,.=.\, a=1 \,:\, a^m=0 \,.=.\, a=0$

❋ 75·1 $a>1 \,.\supset:\, a^m<a^n \,.=.\, m<n$

[Hp . Induct $.\supset:\, m -= 0 \,.\supset,\, a\upharpoonleft m>1$ (1)

Hp . $m<n$. (1) $.\supset.\, a\upharpoonleft(n-m)>1 \,.\supset.\, a\upharpoonleft(n-m)\, a\upharpoonleft m > a\upharpoonleft m \,.\supset.$

$a\upharpoonleft m < a\upharpoonleft n$ (2)

Hp . (2) $.\supset:\, m \geqq n \,.\supset.\, a\upharpoonleft m \geqq a\upharpoonleft n \,:\supset:\, a\upharpoonleft m < a\upharpoonleft n \,.\supset.\, m<n$ (3)

(2) . (3) $.\supset.$ P]

·2 $a -= 0 \,.\, a<1 \,.\supset:\, a^m<a^n \,.=.\, m>n$

[Hp . P·1 $.\supset:\, a\upharpoonleft m < a\upharpoonleft n \,.=.\, 1/a\upharpoonleft m > 1/a\upharpoonleft n \,.=.\, (1/a)\upharpoonleft m > (1/a)\upharpoonleft n \,.=.$

$m>n$]

·3 $a -= 0 \,.\, a -= 1 \,.\supset:\, a^m=a^n \,.=.\, m=n$

[Hp . P·1·2 $:\supset:\, a\upharpoonleft m -= a\upharpoonleft n \,.=.\, m -= n \,:\supset:$ Ths]

❋ 76·1 $m -= 0 \,.\, a -= 0 \,.\supset.\, \exists Q \frown x \ni (x^m < a)$ [Cfr. P40·1]

[Hp . $m=1 \,.\supset.$ Ths (1)

Hp . $x \varepsilon Q$. $x\upharpoonleft m < a \,.\supset.\, \exists Q \frown y \ni (y<x \,.\, y< a/(x\upharpoonleft m)) \,.\supset.$

$\exists Q \frown y \ni ((y\upharpoonleft m)\, y < (a/(x\upharpoonleft m))\, x\upharpoonleft m)$ (2)

Hp . Ths . (2)′ $.\supset.\, \exists Q \frown y \ni (y\upharpoonleft(m+1)<a$ (2)

(1) : (2) . Induct $.\supset.$ P]

·2 $m -= 0 \,.\, a>1 \,.\supset.\, \exists(1+Q) \frown x \ni (x^m<a)$

[Hp . $m=1 \,.\supset.$ Ths (1)

Hp . $x \varepsilon (1+Q)$. $x\upharpoonleft m < a \,.\supset.\, \exists Q \frown y \ni (y>1 \,.\, y<x \,.\, y< a/(x\upharpoonleft m))$ (2)′

Hp . Ths . (2)′ $.\supset:\, \exists(1+Q) \frown y \ni (y\upharpoonleft(m+1)<a)$ (2)

(1) . (2) . Induct $.\supset.$ P]

·3 $m -= 0 \,.\supset.\, \exists Q \frown x \ni (x^m>a)$ [Cfr. P38·2]

[Hp . $m=1 \,.\supset.$ Ths (1)

Hp . $x \varepsilon Q$. $x\upharpoonleft m > a \,.\supset.\, \exists Q \frown y \ni (y>x \,.\, y> a/(x\upharpoonleft m))$ (2)′

Hp . Ths . (2)′ $.\supset.\, \exists Q \frown y \ni (y\upharpoonleft(m+1)>a)$ (2)

(1) . (2) . Induct $.\supset.$ P]

·4 $a>1 \,.\supset.\, \exists N \frown x \ni (a^x>b)$ [Cfr. P38·1]

Hp . −Ths $.\supset.\, a\upharpoonleft N \,\varepsilon$ ClsExisLim‘Q $.\supset.\, l'(a\upharpoonleft N) \varepsilon Q$ (1)

——— $.\supset.\, l'(a\upharpoonleft N)/a < l'(a\upharpoonleft N) \,.\supset.\, \exists N \frown y \ni (l'(a\upharpoonleft N)/a < a\upharpoonleft y \,.\supset.$

$\exists N \frown y \ni (a\upharpoonleft(y+1) > l'(a\upharpoonleft N))$ (2)

Hp . −=Ths . (1) . P24·8 $.\supset.\, -\exists N \frown y \ni (a\upharpoonleft(y+1) > l'(a\upharpoonleft N))$ (3)

(2) . (3) $.\supset.$ P]

·5 $a>1 \,.\, b \geqq 1 \,.\supset.\, \exists N_0 \frown x \ni (a^{x+1} > b \geqq a^x)$ [Cfr. P39·1]

[$\iota\, N_0 \frown y \ni (a\upharpoonleft y \leqq b) \,\iota\, \varepsilon$ ClsExisLim‘N_0 . P30·8 $.\supset.$ P]

·6 $a<b \,.\, m -= 0 \,.\supset.\, \exists Q \frown x \ni (a < x^m < b)$ [Cfr. P40·2]

[Hp . $a \geqq 1 \,.\supset.\, \exists (1+Q) \frown y \ni (y\upharpoonleft m < b/a)$ (1)

——— . $y \varepsilon (1+Q)$. $y\upharpoonleft m < b/a$. P·5 $.\supset.\, \exists N_0 \frown x \ni (y\upharpoonleft m)\upharpoonleft(n+1) > a \geqq$

$(y\upharpoonleft m)\upharpoonleft n)$ (2)

——————— . $n \varepsilon N_0 \, (y\upharpoonleft m)\upharpoonleft(n+1) > a \geqq (y\upharpoonleft m)\upharpoonleft n \,.\supset.$

$a < (y\uparrow m)\uparrow(n+1) < b \;.\supset.\; a < (y\uparrow(n+1))\uparrow m < b$ (3)
Hp . $a \geqq 1$. (1) . (2) . (3) $.\supset.$ Ths (4)
Hp . $a -= 0 \,.\, a<1 \,.\, b<1$. (1) $.\supset.$ $\exists\, Q \cap x \ni (1/b < x\uparrow m < 1/a)$ $.\supset.$
$\exists\, Q \cap x \ni (a < (1/x)\uparrow m < b)$ $.\supset.$ Ths (5)
Hp . $a -= 0 \,.\, a<1 \,.\, b \geqq 1$ $.\supset.$ $\exists\, Q \cap x \ni (y<1 \,.\, a<y<b)$. (5) $.\supset.$ Ths (6)
Hp . $a=0$. P·1 $.\supset.$ Ths (7)
(4) . (5) . (6) . (7) $.\supset.$ P] (7)

§2. PUISSANCES DONT L'EXPOSANT EST UN RATIONNEL

$a,b\,\varepsilon Q_0 \,.\, m,n\,\varepsilon R_0 \;.\supset.$

✻ 77. *Définition et univocité de la racine.*

$s\,\varepsilon N \;.\supset.$
·1 $a\uparrow 1/s = \sqrt[s]{a} = \iota Q_0 \cap x \ni (x^s = a)$ Df
·2 $a\uparrow 1/s\ \varepsilon Q_0$
[$a -= 0 \,.\, u = Q_0 \cap x \ni (x\uparrow s \leqq a)$ (Hp) (1)
(1) . P76·3 $\supset.$ $u\,\varepsilon$ ClsExisLim'Q_0 $.\supset.$ $l'u\,\varepsilon Q_0$ (2)
(1) . (2) . P76·6 $.\supset.$ $\theta\,(l'u)\uparrow s \supset \theta a$ (3)
———————— $\theta a \supset \theta\,(l\,u)\uparrow s$ (4)
———(3) . (4) $.\supset.$ $(l\,u)\uparrow s = a$ (5)
(5) . P72·6 $.\supset.$ $\exists\, Q_0 \cap x \ni (x\uparrow s = a)$ (6)
$x,y\,\varepsilon Q_0 \,.\, x\uparrow s = a \,.\, y\uparrow s = a$. P74·2 $.\supset.$ $x=y$ (7)
(6) . (7) $.\supset.$ P]

✻ 78. *Propriétés fondamentales des racines.*

$s\,\varepsilon N \;.\supset.$
·1 $0\uparrow 1/s = 0 \,.\, 1\uparrow 1/s = 1$ ·2 $(a\uparrow 1/s)^s = a$
·3 $a\uparrow 1/s = b \;.=.\; a = b^s$ [$a\uparrow 1/s = b \;.=.\; (a\uparrow 1/s)^s = b^s$]
·4 $a^s\uparrow 1/s = a$ [$a^s = a^s$. P·3 $.\supset.$ P]
·5 $r\,\varepsilon N \;.\supset.\; (a\uparrow 1/r)\uparrow 1/s = a\uparrow 1/(rs)$
·6 $r\,\varepsilon N_0 \;.\supset.\; (a\uparrow 1/s)^r = a^r\uparrow 1/s$ ·7 $(ab)\uparrow 1/s = (a\uparrow 1/s)(b\uparrow 1/s)$

✻ 79. *Définition et propriété des puissances dont l'exposant est un rationnel.*

·1 $a^m = \iota Q_0 \cap x \ni \exists (r;s) \ni (r\,\varepsilon N_0 \,.\, s\,\varepsilon N \,.\, m = r/s \,.\, x^s = a^r)$ Df
·2 $a^m\,\varepsilon Q_0$ ·3 $a\,\varepsilon Q \;.\supset.\; a^m\,\varepsilon Q$ ·4 $m -= 0 \;.\supset.\; 0^m = 0$
·5 $a=b \,.\, m=n \;.\supset.\; a^m = b^n$

✻ 80·1·2·3·4·5. Voir nº 73 P·1·2·3·4·5

✻ 81. *Les symboles* $= \;<\; >$
·1·2·3·4·5·6 Voir P74·1·2·3 P75·1·2·3

✻ 82·1 $b,c\,\varepsilon(1+Q) \,.\, a \geqq 1 \,.\, a<b \;.\supset.\; \exists(r;s)\ni(r,s\,\varepsilon N \,.\, a^r < c^s < b^r)$
[Hp . P76·4 $.\supset.$ $\exists\, N \cap x \ni ((b/a)\uparrow x > c)$ (1)
----$x\,\varepsilon N \,.\, (b/a)\uparrow x > c$. P76·5 $.\supset.$ $\exists\, N_0 \cap y \ni (c\uparrow(y+1) > a\uparrow x \geqq c\uparrow y)$ (2)
$y\,\varepsilon N_0 \,.\, c\uparrow(y+1) > a\uparrow x \geqq c\uparrow y \;.\supset.\; c\uparrow(y+1) =$
$(c\uparrow y)c \leqq (a\uparrow x)c < b\uparrow x \;.\supset.\; a\uparrow x < c\uparrow(y+1) < b\uparrow x$ (3)
(1) . (2) . (3) $.\supset.$ P]
·2 $b,c\,\varepsilon(1+Q) \,.\, a<b \;.\supset.\; \exists R \cap x \ni (a < c^x < b)$ [Cfr. P53·5]
[Hp . $a \geqq 1$. P·1 $.\supset.$ Ths (1)
Hp . $a<1$ $.\supset\cdot$ $a<1<b$. P·1 $.\supset.$ Ths (2)
(1) . (2) $.\supset.$ P]

§3. PUISSANCES DONT L'EXPOSANT EST UN NOMBRE

$a,b,m,n\,\varepsilon Q_0 \;.\supset.$

✻ 83. *Le symbole* ϑ

·1 $\vartheta m = R_0 \cap \theta m$ Df
·2 $m -= 0 \;.\supset.\; \exists\, \vartheta m$
[Hp $.\supset.$ $\exists u \ni (u\,\varepsilon$ ClsExisLim'$R_0 \,.\, u -= \iota 0 \,.\, m = l'u)$. P24·8 . P48·7 $.\supset.$ P]
·3 $a\uparrow \vartheta m = x \ni \exists\, \vartheta m \cap y \ni (x = a^y)$ Df
·4 $a \geqq 1 \,.\, m\,\varepsilon R \;.\supset.\; l'(a\uparrow \vartheta m) = a^m$
[Hp $\supset$ $a\uparrow\vartheta m\ \varepsilon$ ClsExisLim'R_0 $.\supset.$ $l'(a\uparrow\vartheta m)\ \varepsilon Q$ (1)
Hp . $a=1$ $.\supset.$ $a\uparrow\vartheta m = \iota 1$ $.\supset.$ Ths (2)
Hp . (1) . $x\,\varepsilon Q_0 \,.\, x < l'a\uparrow\vartheta m$ $.\supset.$ $\exists\, \vartheta m \cap k \ni (x < a\uparrow k)$ $.\supset$ $x < a\uparrow m$ (3)
Hp . (1) . $a>1 \,.\, x\,\varepsilon Q_0 \,.\, x < a\uparrow m$. P82·2 $.\supset.$ $\exists\, R_0 \cap k \ni (x < a\uparrow k < a\uparrow m)$.
P81·1 $.\supset.$ $\exists\, R_0 \cap k \ni (x < a\uparrow k \,.\, a\uparrow k < l'a\uparrow\vartheta m)$ $.\supset.$ $x < l'(a\uparrow\vartheta m)$ (4)
(2) . (3) . (4) $.\supset.$ P]

✻ 84. *Définition et univocité de la puissance.*

·1 $a \geqq 1 \,.\, m -= 0 \;.\supset.\; a^m = l'\,a\uparrow\vartheta m$ Df
·2 $m -= 0 \;.\supset.\; 0^m = 0 : a<1 \,.\, a,m\,\varepsilon -\iota 0 \;.\supset.\; a^m = 1/(1/a)^m$ Df
·3 $a,m\,\varepsilon Q \;.\supset.\; a^m\,\varepsilon Q$
Hp . $a \geqq 1$. P83·4 . P·1 $.\supset.$ Ths. (1)
Hp . $a<1$ $.\supset.$ $1/a > 1$. (1) . P·2 $.\supset.$ Ths (2)
(1) . (2) $.\supset.$ P]

·4 $1^m=1$
$[\ \mathrm{Hp}\,.\,m=0\,.\,\mathrm{P}{\cdot}2\ .\supset.\ \mathrm{Ths}$ (1)
$\mathrm{Hp}\,.\,m-\!=0\,.\,\mathrm{P}{\cdot}1\ .\supset.\ 1\upharpoonright m=1'1\upharpoonright\vartheta m\ .\supset.\ \mathrm{Ths}$ (2)
$(1)\,.\,(2)\ .\supset.\ \mathrm{P}\ ]$

·5 $a-\!=0\ .\supset.\ (1/a)^m=1/a^m$ $[\ \mathrm{P}{\cdot}2\ .\supset.\ \mathrm{P}\ )$

·6 $a=b\,.\,m=n\ .\supset.\ a^m=b^n$

❋ 85. *Les symboles* $=\ <\ >$

·1 $m-\!=0\ .\supset:\ a^m<b^m\ .=.\ a<b$
$[\ \mathrm{Hp}\,.\,a\geqq1\,.\,b\geqq1\,.\,a<b\,.\,\mathrm{P}81{\cdot}1\ .\supset.\ \theta(a\upharpoonright\vartheta m)\supset\theta(b\upharpoonright\vartheta m)\,.\,\theta(a\upharpoonright\vartheta m)$
$-\!=\theta(b\upharpoonright\vartheta m)\,.\,\mathrm{P}84{\cdot}1\,.\,\mathrm{P}24{\cdot}4{\cdot}7\ .\supset.\ a\upharpoonright m<b\upharpoonright m$ (1)
$\mathrm{Hp}\,.\,a\geqq1\,.\,b\geqq1\ .\supset:\ a-\!<b\ .\supset.\ a\upharpoonright m-\!<b\upharpoonright m$ (2)
$(1)\,.\,(2)\,.\,\mathrm{P}84{\cdot}2\ .\supset.\ \mathrm{P}\ ]$

·2 $m-\!=0\ .\supset:\ a^m=b^m\ .=.\ a=b$ $[\mathrm{P}{\cdot}1\ .\supset.\ a^m-\!=b^m\ .=.\ a-\!=b]$

·3 Voir P74·3

·4 $a>1\ .\supset:\ a^m<a^n\ .=.\ m<n$
$[\ \mathrm{Hp}\,.\,m<n\,.\,\mathrm{P}81{\cdot}4\ .\supset.\ \theta(a\upharpoonright\vartheta m)\supset\theta(a\upharpoonright n)\,.\,\theta(a\upharpoonright\vartheta m)-\!=\theta(a\upharpoonright\vartheta n)\,.$
$\mathrm{P}84{\cdot}1\,.\,\mathrm{P}24{\cdot}4{\cdot}7\ .\supset.\ a\upharpoonright m<a\upharpoonright n$ (1)
$\mathrm{Hp}\ .\supset:\ m-\!<n\ .\supset.\ a\upharpoonright m-\!<a\upharpoonright n$ (2)
$(1)\,.\,(2)\ .\supset.\ \mathrm{P}\ ]$

·5·6 Voir P75·2·3

❋ 86. *Un cas particulier des équations exponentielles.*

·1 $u\,\varepsilon\,\mathrm{Cls}'\mathrm{Q}_0\ .\supset.\ a\upharpoonright u=x\ni\exists u\frown y\ni(x=a^y)$ Df

·2 $a>1\,.\,b\geqq1\ .\supset.\ \exists\mathrm{Q}_0\frown x\ni(a^x=b)$
$[\ \mathrm{Hp}\,.\,u=\mathrm{Q}_0\frown x\ni(a\upharpoonright x\leqq b)$ (Df) (1)
$\mathrm{Hp}\,.\,(1)\,.\,\mathrm{P}72{\cdot}1\,.\,\mathrm{P}76{\cdot}4\ .\supset.\ u\,\varepsilon\,\mathrm{ClsExisLim}'\mathrm{Q}_0$ (2)
$\mathrm{Hp}\,.\,(1)\,.\,(2)\,.\,x\varepsilon\mathrm{Q}_0\,.\,x<a\upharpoonright\mathrm{l}'u\,.\,\mathrm{P}82{\cdot}2\ .\supset.\ \exists\,\mathrm{R}\frown k\ni(x<a\upharpoonright k<a\upharpoonright\mathrm{l}'u)\,.$
$\mathrm{P}85.4\ .\supset.\ \theta a\upharpoonright\mathrm{l}'u\supset\theta b$ (3)
$\mathrm{Hp}\,.\,(1)\,.\,(2)\,.\,x\varepsilon\mathrm{Q}_0\,.\,x<b\,.\,\mathrm{P}82{\cdot}2\ .\supset.\ \exists\,\mathrm{R}\frown k\ni(x<a\upharpoonright k<b)\,.$
$\mathrm{P}85{\cdot}4\ .\supset.\ \theta b\supset\theta a\upharpoonright\mathrm{l}'u$ (4)
$\mathrm{Hp}\,.\,(1)\,.\,(2)\,.\,(3)\,.\,(4)\,.\,\mathrm{P}22{\cdot}2\ .\supset.\ a\upharpoonright\mathrm{l}'u=b$ (5)
$\mathrm{Hp}\,.\,(1)\,.\,(2)\,.\,(5)\ .\supset.\ \mathrm{Ths}\ ]$

Par la prop. que nous venons de démontrer et par la P85·6 résulte que l'équation exponentielle $a\upharpoonright x=b$ a une seule racine.

❋ 87. *Propriétés fondamentales des puissances.*

·1 $a^m a^n=a^{m+n}$
$[\ \mathrm{Hp}:\ a=0\ .\cup.\ a=1\ .\cup.\ m=0\ .\cup.\ n=0\ :\supset.\ \mathrm{Ths}$ (1)
$\mathrm{Hp}\,.\,a>1\,.\,m,n\,\varepsilon\,\mathrm{Q}$ (Hp) (2)

$—\,.\,(2)'\,.\,x\varepsilon\mathrm{Q}_0\,.\,x<a\upharpoonright m\,a\upharpoonright n\ .\supset.\ \exists\,\mathrm{R}\frown y\ni(x/a\upharpoonright n<a\upharpoonright y<a\upharpoonright m)$ (2)''
$———\,.\,(2)''\,.\,x\varepsilon\mathrm{Q}_0\,.\,x<a\upharpoonright m\,a\upharpoonright n\,.\,y\varepsilon\mathrm{R}\,.\,x/a\upharpoonright n<a\upharpoonright y<a\upharpoonright m\ .\supset.$
$\exists\,\mathrm{R}\frown z\ni(x/a\upharpoonright y<a\upharpoonright z<a\upharpoonright n)$ (2)'''
$—————\,.\,(2)'''\,.\,x\varepsilon\mathrm{Q}_0\,.\,x<a\upharpoonright m\,a\upharpoonright n\ .\supset.\ \exists\,(y;z)\,\varepsilon\,(y,z\,\varepsilon\mathrm{R}\,.$
$x<a\upharpoonright(y+z)<a\upharpoonright mn)$ (2)''''
$———————\,.\,(2)''''\ .\supset.\ \theta(a\upharpoonright m\,a\upharpoonright n)\supset\theta a\upharpoonright(m+n)$ (2)
$\mathrm{Hp}\,.\,(2)'\,.\,x\varepsilon\mathrm{Q}_0\,.\,x<a\upharpoonright(m+n)\ .\supset.\ \exists\,\mathrm{R}\frown y\ni(x<a\upharpoonright y<a\upharpoonright(m+n))\,.\,\mathrm{P}85{\cdot}4\,.$
$\mathrm{P}21{\cdot}3\ .\supset.\ \exists\,(y;z)\ni(x,z\varepsilon\mathrm{R}\,.\,y<m\,.\,z<n\,.\,x<a\upharpoonright(y+z)<a\upharpoonright(m+n))$ (3)'
$\mathrm{Hp}\,.\,(2)'\,.\,(3)'\ .\supset.\ \theta a\upharpoonright(m+n)\supset\theta(a\upharpoonright m\,a\upharpoonright n)$ (3)
$\mathrm{Hp}\,.\,(2)\,.\,(3)\,.\,a>1\,.\,m,n\varepsilon\,\mathrm{Q}\ .\supset.\ \mathrm{Ths}$ (4)
$\mathrm{Hp}\,.\,a-\!=0\,.\,a<1\,.\,m,n\,\varepsilon\mathrm{Q}\,.\,\mathrm{P}84{\cdot}2\,.\,(4)\ .\supset.\ \mathrm{Ths}$ (5)
$(1)\,.\,(4)\,.\,(5)\ .\supset.\ \mathrm{P}\ ]$

·2 $a-\!=0\,.\,m\geqq n\ .\supset.\ a^m/a^n=a^{m-n}$

·3 $(a^m)^n=a^{mn}$
[Il suffit imiter la démonstration de la P·1 en faisant usage de la P70·3 au lieu de la P21·3].

·4 $(ab)^m=a^m b^m$
$[\ \mathrm{Hp}:\ a=1\ .\cup.\ b=0\ :\supset.\ \mathrm{Ths}$ (1)
$—\,.\,a\geqq1\,.\,b\geqq1\,.\,c\,\varepsilon\,1+\mathrm{Q}\,.\,\mathrm{P}86{\cdot}2\ .\supset.\ \exists\,(x;y)\ni(x,y\varepsilon\,\mathrm{Q}_0\,.\,c\upharpoonright x=a\,.$
$c\upharpoonright y=b)$ (2)'
$————————\,.\,x,y\varepsilon\,\mathrm{Q}_0\,.\,c\upharpoonright x=a\,.\,c\upharpoonright y=b\,.\,\mathrm{P}{\cdot}1,{\cdot}3\ .\supset.$
$(ab)\upharpoonright m=(c\upharpoonright x\,c\upharpoonright y)\upharpoonright m=c\upharpoonright(x+y)\upharpoonright m=c\upharpoonright(xm)\,c\upharpoonright(ym)=a\upharpoonright m\,b\upharpoonright m$ (2)''
$\mathrm{Hp}\,.\,a\geqq1\,.\,b\geqq1\,.\,(2)'\,.\,(2)''\ .\supset.\ \mathrm{Ths}$ (2)
$\mathrm{Hp}\,.\,a,b\varepsilon\mathrm{Q}\,.\,a<1\,.\,b<1\,.\,(2)\,.\,\mathrm{P}84{\cdot}2\ .\supset.\ \mathrm{Ths}$ (3)
$\mathrm{Hp}\,.\,a\geqq1\,.\,b\geqq1\,.\,(2)\ .\supset.\ (a/b)\upharpoonright m=(a\upharpoonright m)/(b\upharpoonright m)$ (4)
$\mathrm{Hp}\,.\,a-\!=0\,.\,a<1\,.\,b\geqq1\,.\,(4)'\,.\,\mathrm{P}84{\cdot}2\ .\supset.\ \mathrm{Ths}$ (4)
$\mathrm{Hp}\,.\,a\geqq1\,.\,b-\!=0\,.\,b<1\,.\,————\ .\supset.\ \mathrm{Ths}$ (5)
$(1)\,.\,(2)\,.\,(3)\,.\,(4)\,.\,(5)\ .\supset.\ \mathrm{P}\ ]$

·5 $b-\!=0\ .\supset.\ (a/b)^m=a^m/b^m$

GIUSEPPE INGRAMI — *Elementi di Geometria per le scuole secondarie superiori.* (Bologna, Tip. Cenerelli, 1899).

Ci par da segnalare ai Lettori della «Rivista» e a tutti i cultori ed amatori del metodo deduttivo questa nuova opera didattica del professor Ingrami; sia per le spiccate tendenze innovatrici che ne informano la parte generale, e sì ancora perchè vi si trovano assai opportunamente applicate (per la prima volta, io credo, in un libro elementare) alcune idee fondamentali di M. Pasch e G. Peano sui principi della Geometria. In questo senso il libro si scosta dagli «Elementi di Geometria» del professor Veronese e dai più noti trattati; mentre si connette con questi e principalmente con quello in tutto il resto (1).

Qui non s'intende farne una vera e propria rassegna; bensì di rilevarne in pochi tratti le novità, e parte di quello che ci sembra osservabile dal punto di vista deduttivo, senza nasconderci la sua natura di libro scolastico. Intanto la cosa più notevole (ed anche più nuova) sarà, per mio conto, la distinzione effettiva, raggiunta e mantenuta assai chiaramente, fra i concetti geometrici primitivi, o indecomposti, e i loro derivati, o composti; ridotti quelli in numero di *tre* solamente, che sono il *punto*, il *segmento individuato da due punti*, (pagg. 6-8) e la relazione di *eguaglianza* (o congruenza) *fra due segmenti* (pag 62). In ciò l'A. va innanzi ai trattatisti che lo han preceduto, presso i quali il numero delle idee geometriche fondamentali ed effettivamente primitive (cioè non definite altrimenti che per postutati) suol essere molto maggiore (2) La nozione primitiva di *segmento*, coi postulati II-VII, ecc., che la contemplano (sebbene riprodotti con qualche variante, e parecchi amalgamati in un solo) proviene appunto dai citati Pasch e Peano; mentre l'altra di *eguaglianza* fra due segmenti è dovuta ai «Fondamenti» del prof. Veronese, e la si ritrova eziandio, con alcuni dei postulati che le fanno corona, negli «Elementi di Geometria» del medesimo Autore.

Abbiamo dunque una serie di postulati (*ventuno* in tutto) che, insistendo unicamente sopra quegli enti primitivi, o sopra nozioni esattamente definite per mezzo di questi (onde ricadon su questi) si piegano assai docilmente ad apprezzamenti logici, analisi, confronti, ecc.

(1) «L'idea del libro m'è nata alla lettura dei lavori del Peano e dei «Fondamenti di Geometria» del Veronese, e buona parte era scritto quando comparvero i predetti Elementi.» Così l'A. in prefazione.

(2) Veramente anche il citato Pasch nelle *Vorles. üb. neuere Geom.* e poscia il Peano in questo Periodico, spinser l'analisi dei principî della Geometria elementare fino a costruire sistemi con tre sole idee prime: ma di queste opere non è certamente la scuola media il fine più diretto e immediato. — Un mio lavoro che è sotto le stampe (nelle Memorie dell'Acc. delle Scienze di Torino) tratta di un nuovo sistema con *due* sole idee prime, il *punto* ed il *moto*; quest'ultimo inteso come trasformazione dei punti in punti

Quanto al numero osservo (benchè il criterio del contar le proposizioni primitive sia un po' grossolano e fallace) che alcuni, quali ad es. il II, III, VI, VIII, XII, si possono scindere in parecchi membri distinti, che esprimono giudizî apertamente diversi fra loro; sicchè, a parer mio, non vi sarebbe ragione di contarne 21, anzi che 30 o 31. Altri invece si potrebber, volendo, rimuovere; come l'A. medesimo avverte in Prefazione. Tali, ad es. il postulato di Archimede (XI), una volta concesso l'altro sulla continuità di due classi contigue (XXI); il postulato dell'equivalenza (XX) come è oramai bastantemente provato per le ricerche di Gérard, Veronese, Lazzeri, ed altri; nonchè il XIX, spettante, se non erro, alla Logica ben più che alla Geometria (1).

L'A., procedendo, come si è detto, dalle nozioni di *punto* e *segmento*, definisce il *raggio*, la *retta* indefinita e il *triangolo*, tenendosi al Pasch; indi il *piano* determinato da un triangolo, come somma logica dei raggi projettanti il contorno da un punto interno (e però sotto forma che pare assai conveniente e nuova); poscia l'*angolo* convesso e il concavo (non già l'angolo di ampiezza arbitraria, come dirò fra poco), i *poligoni* piani, lo *spazio* generato da un tetraedro (similmente al piano generato da un triangolo) il *diedro*, gli *angoloidi* e i *poliedri*, dimostrandone in modo abbastanza semplice e piano le proprietà così dette *di posizione*; e il tutto prima ancora di introdurre la terza idea fondamentale di *eguaglianza fra due segmenti*, che l'A. ha voluto differir di proposito al più tardi possibile. Con questo però non direi che Egli abbia escluso senz'altro il concetto di moto dai *principî* della Geometria (2); perchè in somma «segmenti *eguali*» nel senso dell'A. è sinonimo di segmenti *congrui*, o *sovrapponibili* per mezzo d'un moto (nel senso ordinario); come apparisce all'analisi dei due concetti, e al confronto di lor proprietà complessive. — Seguono le relazioni di *eguale*, *maggiore* e *minore* fra due segmenti, oppur fra due angoli, l'*eguaglianza* dei triangoli, poligoni, ecc., l'*ortogonalità* e il *parallelismo* (questo in conformità della definizione proposta dal Veronese, a cui spetta eziandio l'assioma XV delle parallele: ma, come si vede, non prima di aver trattato la più gran parte delle proprietà che ne sono indipendenti; nè allegando di poi quel postulato senza bisogno effettivo, sull'esempio rinnovato ai nostri giorni dal prof. Faifofer, e che ci sembra infatti da preferire nei riguardi

(1) Questo: «Se un poligono (poliedro) è diviso in parti da ciascuno di due sistemi di rette (piani), le parti in cui da entrambi è suddiviso riescon le stesse, comunque si consideri prima l'uno più tosto che l'altro dei due sistemi». Consideriamo ad es. la superficie di un metro quadrato, suddiviso in decimetri quadrati da rette verticali e orizzontali. Ognuna di queste parti è la *classe* (di punti) comune a due striscie α_i e β_e, orizzontale una e verticale l'altra; e sarà sempre la medesima figura, comunque si consideri prima α_i e poi β_e, o prima β_e e poscia α_i, grazie alla proprietà *commutativa* del prodotto logico.

(2) «... Ne ho fatto a meno sino in fondo» (pag. IV).

deduttivi); ma qui, come in seguito, il libro non si scosta da metodi e da indirizzi già provati nell' insegnamento medio; nè propriamente aspira ad un contenuto originale. Farò dunque in particolare alcune osservazioni dentro i confini dei primi sette capitoli.

Alle pag. 40-46 ricorrono spesso le locuzioni «*lo* spazio», «*nello* spazio», ecc., le quali, dato il valor grammaticale dell' articolo determinato, e così nude e crude, parrebbero voler dinotare un particolare individuo già ben distinto da ogni alto in virtù di quel nome; laddove, nell'intenzione dell'A. par che invece si tratti di *uno* spazio generico, non individuato assolutamente, ma sì per mezzo d'un tetraedro dato a piacere (e se fosse altrimenti, il discorso celerebbe un postulato). Per esempio dove si dice: «*lo* spazio è determinato da quattro suoi punti non complanari», «un piano ed una retta determinati da punti *dello* spazio, appartengono allo spazio stesso», ecc. (pag. 41), direi piuttosto: «*uno* spazio è determinato...», «... determinati da punti d'*uno* spazio, ecc.». Così a pag. 42, teor. 59, ecc. Quistione di parole, quistione d'intendersi, è vero; ma non meno importante per questo.

Pag. 49-50. Il postulato VIII messo nella Nota al Cap. IV e implicante l'esistenza delle due *bande* di un piano (rispetto alla classe di tutti i punti che esistono) fa egli parte del sistema? No certamente, dacchè un altro postulato VIII è nel testo a pag. 62: oltre che al primo non è serbato alcun ufficio deduttivo nel seguito. Ora nella predetta Nota e dopo quel postulato si trova nuovamente il teorema «lo spazio è determinato da quattro suoi punti non complanari» già visto sotto l'identico enunciato a pag. 41. Notevole che questa proposizione, una volta ammesso il postulato (e quindi soppresso i *suoi* come pleonasmo) sarebbe qui perfettamente al suo posto; e ormai, così come sta, dimostrabile. Ma dal discorso poi si rileva trattarsi anche qui di *uno* spazio (generato da un fascio di piani, anzichè da un tetraedro): nè in questo senso essa ha d'uopo del postulato anzidetto; come non ne abbisogna la definizion del *diedro* data innanzi a pagg. 47-47, in vista della quale parrebbe quasi che il Nostro abbia voluto inserir quella *Nota*. (Vedi pag. 50, in fine). Qui si rileva in somma una qualche incertezza, che lascia insoddisfatto il lettore, ed è atta a ingenerar confusione nella mente dei giovani. (¹).

Alla pag. 62. «Intenderémo quindi nel seguito che tutte le figure siano nello spazio generato da un tetraedro». Qui ci sarebbe molto da dire. Il sottintendere una premessa (e di quella portata) in buona parte delle proposizioni di Geometria elementare, può facilmente partorir degli equivoci. Per certo non è conforme al buon metodo; e i matematici si son sempre studiati, ab antico, di far che ogni proposizione contenesse esplicitamente le condizioni tutte, onde risulta la verità che si enuncia. Non dico che sì fatte ellissi siano sempre fuor di proposito; essendo anzi talvolta desiderabile (nell'insegnamento orale ad es.) di non troppo rallentare il corso dei

(¹) Il corollario a pag. 57 sarà da legger così: «una retta, non giacente sul piano d'una delle facce, non può aver più di due punti a comune con una superficie poliedrica convessa».

pensieri con eccessiva tardità di linguaggio. Ma un trattato scolastico è bene (anzi non pare eccessivo il pretendere) che sia da poter consultare, così dai giovani e dagli inesperti come dai dotti; in maniera da ricavarne ipso facto, senza troppa fatica o complicazione, le verità che possono occorrer sopra un dato soggetto. Peggio, se si dovesse ritener come falsa una proposizione, dove la tesi non sia conseguenza dell'ipotesi apertamente significata o richiamata.

A questo inconveniente si potrà riparare introducendo volta per volta in moltissime proposizioni la clausola: «il tutto essendo supposto in un dato spazio, ecc.». Ma chi non sente il peso e la noja d'una tal restrizione, posto che in Geometria elementare mai non accade uscir da *una sola* di quelle tali figure, distinte col nome di *spazî*?

Resta un altro modo, l'antico, che mi par preferibile. Esso consiste nel non parlare affatto di *spazio*, tutt'al più ritenendolo come sinonimo di «ambiente delle figure», o «classe di tutti i punti che esistono»; e facendo debito luogo a un principio (quello, ad esempio, di pag. 49. onde abbiamo discorso) che valga a restringere implicitamente la detta classe nei confini d'una stella di raggi, projezione di un tetraedro da un punto interno. Con ciò si ottiene anche l'effetto, non meno desiderabile, di sfrondar la Geometria elementare di cosa che non le appartiene in proprio, e che a nulla le giova (servendo bensì a preparare il terreno per una ulteriore Geometria *degli iperspazî*, dove la detta nozione di «spazio generato da un tetraedro» od altra consimile si fa poi necessaria; e qui starà ottimamente, in qualità di primo concetto *nuovo* da segnalare) e così di alleggerirne alquanto il fardello, notoriamente assai grave. Si potrebbero intanto abolire, e senza danno di sorta all'economia generale del libro, i §§ 55, 55 bis, 56, 57, 62, 63, 64, 65. Chi vorrà poscia salire agli *spazî superiori*, non avrà che da escludere quel postulato delle tre dimensioni: precisamente come si toglie il postulato delle parallele in circostanze al tutto simili, cioè per passare alla Geometria così detta *assoluta*, o *Pangeometria*; e come altri rimuove il principio che «due rette non possono chiudere spazio» per aver la Geometria così detta *Riemanniana* o *sferica*; ecc.

Alla pag. 72. Per un libro elementare sarà forse troppo complessa la nozione di angoli *eguali*; che in somma è la «corrispondenza di eguaglianza» del prof. Veronese modificata per gli angoli: ma la definizione del prof. V. ha per sè la maggior generalità del soggetto. E il postulato XII, sull'esistenza di certi angoli eguali ad uno assegnato, implicherà forse troppi giudizî primitivi. Voglio dire che probabilmente un altro principio di assai minor peso potrebbe farne le veci; e il medesimo par che si possa imputare a diversi altri postulati del Nostro: ma le esigenze didattiche varranno sempre a Sua scusa. Conciliare i bisogni della Scuola con le idealità del metodo deduttivo è tale un'impresa, da non poter maturare, se mai, che per opera di molti e a fatica. Più seria, s'io non m' inganno, è l'osservazione seguente.

Alla pag. 74. «Si dice *somma* di due angoli quel terzo angolo determinato dai lati non comuni di due angoli *consecutivi* uguali ai dati, nell'ordine dato, e che comprenda il lato comune ». Come l'A. osserva immantinente questa somma può abbracciar tutto il piano. Ma non potrà certo superar questo limite, se dev'essere *un angolo*; vale a dire (pag. 24) una classe di punti *del piano*. Dunque non mi par giusto il dire che detta somma « può anch'esser maggiore di un *giro* », questo inteso come equivalente ad un piano (ivi). Del resto non so vedere in che modo da quella definizione della somma possa uscire alcun angolo numericamente superiore a 2π radianti. Se gli addendi sono angoli *concavi* A e B, misurati, per esempio in radianti, dai numeri α e β, la somma A+B, per la definizione suddetta (s'io l'ho bene intesa) sarà un certo angolo misurato dal numero $4\pi-(\alpha+\beta)$, cioè dal complemento a 2π dell'eccesso su 2π. Poniamo di sostituire ad A un angolo concavo A' maggiore di A, che sia misurato, per esempio, da $\alpha+\gamma$: la somma di A' con B verrà misurata da $4\pi-[(\alpha+\gamma)+\beta]$; dove che, se si aggiunge l'incremento di A alla somma precedente di A con B, trovasi $4\pi-(\alpha+\beta)+\gamma$; e i due numeri non sono eguali fra loro, nè congrui rispetto al modulo 2π. Cosicchè per la somma di più angoli non sussisterebbe nemmeno la proprietà *associativa* la qual pure si afferma a pag. 75: e invero nell'esempio predetto (C+A)+B non è uguale a C+(A+B). Questa parte degli angoli mi par dunque da riformare; nè riesco a comprendere come l'A. abbia inteso di potersi passare dell'angolo improprio, ossia rotazione d'ampiezza comunque grande: senza di che, siccome nota il De Paolis (*Elementi di Geometria*, pag. 475): « non si può neanche dire che più angoli si posson sempre sommare ».

Con tutto ciò mi piace concludere che se (didattimente parlando) la Geometria elementare non accenna per ora a quel grado di scienza ipotetica e schiettamente deduttiva, che tanto ammiriamo nell'Aritmetica; non di meno quest'opera del prof. Ingrami, dove alcuni propositi vagheggiati speculativamente da pochi, e da non molto tempo, cominciano ad attuarsi in forma concreta e pratica, è già un ottimo pegno, e un affidamento sicuro di nuovi e sempre maggiori progressi su quella via.

Torino, maggio 1899.

M. Pieri

SUI PRECURSORI DELLA LOGICA MATEMATICA

II.

J. D. Gergonne

La logica matematica come si trova attualmente esposta nel F (Formulaire de Mathématiques) non deriva direttamente dalla maggior parte degli scrittori che si sono occupati delle idee dello stesso genere. Se si volesse formare una specie di albero genealogico di questa scienza si avrebbe un albero con molte diramazioni e pochi intrecci. Non è tuttavia senza interesse anche per i cultori di quello che si può ritenere oggi come *ramo vitale*, di seguire lo sviluppo dei *rami collaterali* e rendersi conto, per quanto è possibile, delle ragioni che hanno loro impedito di progredire ulteriormente. Ed è perciò che in questa breve nota intendo richiamare l'attenzione su due lavori di J. D. Gergonne, le idee del quale *discendono* in parte da quelle di L. N. M. Carnot, di cui mi sono già precedentemente occupato e da quelle di Eulero [1].

*
* *

Essai de dialectique rationnelle, par M. Gergonne, Annales de Mathématiques pures et appliquées, t.7 a.1816 et 1817, à Nismes, pag.189-228.

In questo scritto l'A. osserva con Condorcet [2] che la Logica di Aristotile è forse il primo passo « vers un perfectionnement que l'art de raisonner et de discuter semble encore attendre ».

Incaricato di un corso di Logica, l'A. ha cercato di perfezionarne e completarne l'esposizione.

Egli indica con (H) la relazione « qui a lieu entre deux idées « toutes les fois qu'il est évidemment impossible d'en trouver « une troisième qui soit à la fois contenue dans l'une et dans « l'autre (pag. 193);

con (X) la relazione « qui a lieu entre deux idées toutes « les fois que l'on peut d'abord en trouver une troisième, con-

(1) Eulero, Lettres à une princesse d'Allemagne, a.1768.
(2) Condorcet, Esquisse etc. du progrès de l'esprit humain a.1793.

« tenue à la fois dans l'une et dans l'autre, et qu'en outre cha-
« cune de ces deux idées peut en contenir quelqu'une qui soit
« tout à fait étrangère à l'autre » (pag. 193);

con (I) la relazione « qui a lieu entre deux idées lorsqu'il « est à la fois impossible qu'une idée contenue dans l'une ne le « soit pas aussi dans l'autre, et qu'une idée étrangère à l'une « ne le soit pas également à l'autre » (pag. 194);

con (C) oppure con (Ɔ) la relazione « qui a lieu entre deux « idées lorsque, ne pouvant trouver aucune idée contenue dans « la première qui ne le soit aussi dans la seconde, on peut au « contraire, en trouver qui soient contenues dans celle-ci, sans « avoir rien de commun avec l'autre » (pag. 194).

Il simbolo H iniziale della parola (Hors) corrisponde alla *disgiunzione* logica completa [1], il simbolo X al prodotto logico, il simbolo I, iniziale di Identité, all'*eguaglianza*, i due simboli (C), (Ɔ) iniziali delle parole *contenante*, *contenue* ai simboli $\subset$ (non adoperato), e $\supset$ del F. I simboli H, X, I sono simmetrici, mentre i simboli C, Ɔ si trasformano l'un nell'altro con un rovesciamento [2].

Con questi simboli, e con molti altri di minore interesse, l'A. riesce a rappresentare concisamente le diverse forme di sillogismo. Arrivato a questo punto conchiude (pag. 228): « Ce qui « précède offrirait une théorie complète du mecanisme du rai- « sonnement, si l'on n'employait jamais dans le discours que des « propositions simples; mais malheureusement nos langues en « emploient une multitude d'autres sortes; et il parait égale- « ment difficile soit d'en restraindre le nombre, soit de donner « une théorie qui embrasse toutes celles qui sont dans l'usage. »

La difficoltà principale che gli ha impedito di proseguire è stata la cattiva scelta del simbolismo, evidentemente troppo vago. È più notevole lo scritto seguente.

(1) Burali-Forti, Logica matematica a.1894, p.87, §7.

(2) Abel ha forse da questo lavoro tolto il suo simbolo Ɔ, che compare una sola volta nelle sue opere pubblicate? Oppure si è anch'egli occupato di logica? La questione meriterebbe un esame dei suoi MSS inediti. (Vedi F §$\supset$ 1·8n).

*
* *

Essai sur la théorie des définitions, par M. GERGONNE. Annales de Math. t.9 a.1818 et 1819, p.1-36.

L'A. mostra (p.7) che la definizione di *parole nuove* è una necessità per lo sviluppo delle scienze: rileva che esse, purchè definite in modo conveniente, non agiscono soltanto come *abbreviazioni*, ma adempiono esattamente allo stesso ufficio che hanno in algebra i simboli coi quali, per semplificare i calcoli e i loro risultati, si rappresentano quelle funzioni che si riproducono frequentemente.

Per l'A. fare una definizione « c'est proprement et unique- « ment annoncer que l'on convient d'exprimer à l'avenir, par un « mot unique, choisi arbitrairement, une collection d'idées que « sans le secours de ce mot on serait obbligé d'exprimer par « le moyen de plusieurs autres. »

« ...La définition ne fait donc autre chose qu'établir une iden- « tité de sens entre deux expressions d'une même collection « d'idées dont la plus simple est nouvelle et arbitraire, tandis « que l'autre, plus composée, est annoncée en mots dont le sens « se trouve deja fixé... » (p.13).

Delle definizioni osserva le seguenti leggi:

« I. La définition doit renfermer un mot et ne doit renfermer « qu'un seul mot dont la signification n'ait pas été antérieure- « ment déterminée. » (p.14).

« II. La définition doit renfermer tout ce qu'il faut pour bien « fixer le sens du mot défini: il convient qu'elle ne renferme « rien au-delà de ce qui est nécessaire pour remplir cette desti- « nation. » (pag.16).

Riconosce poi facilmente con Pascal [1] che non si possono definire tutte le parole: però che questo non si può chiamare una imperfezione dei nostri metodi, se per *imperfezione* s'intende l'assenza d'una qualità che essi potrebbero possedere (p.20).

Risulta da ciò la necessità di ammettere anche altre specie di definizioni, cioè le *definizioni implicite*.

(1) Œuvres, Paris, a,1889 t.3 p.165.

Pag.22. « ...si une phrase contient un seul mot dont la signi-
« fication nous soit inconnue, l'énoncé de cette phrase pourra
« souvent suffire pour nous en révéler la valeur ».

Pag.23. « Ces sortes de phrases, qui donnent ainsi l'intelli-
« gence de l'un des mots dont elles se composent, au moyen
« de la signification connue des autres, pourraient être appelées
« *définitions implicites* par opposition aux definitions ordinaires
« qu'on appellerait définitions *explicites* ».

E poi prosegue: « On conçoit aussi que,... deux phrases qui
« contiennent deux mots nouveaux, combinées avec des mots
« connus, peuvent souvent en déterminer le sens; et on peut
« en dire autant d'un plus grand nombre de mots nouveaux
« combinés avec des mots connus dans un pareil nombre de
« phrases... »

Col linguaggio dell'A. si potrebbero chiamare *definizioni implicite* dei simboli 0, N_0, $+$, le 5 *propositioni primitive* del F, §$+$ P2.

Ma a questo punto egli si arresta, e conchiude dimostrando la necessità di arricchire la lingua delle scienze esatte affinchè esse non rimangano stazionarie, ed osservando che i simboli e le locuzioni necessariamente introdotte hanno contribuito al loro progresso forse quanto le meditazioni degli uomini di genio che le hanno coltivate, e che si può prevedere che coloro che sono destinati ad allargarne ancora i confini, non giungeranno allo scopo se non usando da questo punto di vista della massima libertà (¹).

GIOVANNI VACCA

(¹) Non è inutile osservare che la Logica matematica colle sue notazioni chiare e precise riesce ad allontanare il bisogno della formazione di nuovi simboli, bastando per lungo tempo ancora le combinazioni più semplici di quelli già esistenti.

CONGRÈS INTERNATIONAL DE PHILOSOPHIE

(Paris, 2 au 7 août 1900).

MONSIEUR,

La direction de la *Revue de métaphysique et de morale* a pris l'initiative de préparer pour l'Exposition universelle de 1900 un Congrès international de philosophie. Elle s'est assuré le concours de la plupart des philosophes et d'un certain nombre de savants français. Elle a sollicité et obtenu l'investiture officielle.....

PROGRAMME.....

LOGIQUE ET HISTOIRE DES SCIENCES.

I.

1° Algèbre de la logique et calcul des probabilités. — Théorie des ensembles; théories des chaînes; théories des groupes. — Le transfini.

2° Principes de l'analyse: le nombre; le conteau; théorie des fonctions.

3° Les postulats de la géometrie; leur origine et leur valeur. — L'intuition en mathématique. — Géométrie non-euclidiennes.

4° Méthodes de la géométrie; géométrie analytique; géométrie projective; calcul géométrique (les Quaternions).

5° Principes de la mécanique, leur nature et leur valeur.

6° Méthodes de la physique mathématique; théorie des erreurs et des approximations.

7° Hypothèses générales de la physique: la théorie mécanique et l'énergétique.

8° Hypothèses de la chimie; constitution de la matière. — La théorie atomiques; stéréochimie.

9° Le problème de l'origine de la vie.

10° Théories de l'évolution des espèces; transformisme; hérédité.

II.

1° Les origines du calcul infinitésimal.

2° La genèse de la notion d'imaginaire et l'élucidation progressive de la théorie des fonctions.

3° Histoire de la découverte de la gravitation newtonienne et de son influence sur le développement de la mécanique et de la physique.

4° Exposé des nécessités qui ont amené peu à peu à fonder la thermodynamique et, avec elle, toute une partie de la science sur des principes autonomes, principe de la conservation de l'énergie; principe de Carnot-Clausius.

5° Histoire des idées succesives de la méthode en biologie.

. . . .

CONGRÈS INTERNATIONAL DES MATHÉMATICIENS

à Paris, du 6 au 12 août 1900.

Comité d'organisation : rue des Grands-Augustins, 7, Paris.

La Société mathématique de France a reçu à Zurich, en 1897, la mission de préparer le prochain Congrès international des mathématiciens, qui doit avoir lieu à Paris en 1900.....

La date est fixée du lundi 6 août au dimanche 12 août 1900; le Congrès durera par conséquent sept jours.....

Le programme du Congrès comprendra: au moins deux séances générales; des séances de sections, qui auront lieu surtout le matin; des visites scientifiques; un banquet, qui réunira tous les membres du Congrès. Des excursions, facultatives, pourront êtres organisées et sont dès maintenant à l'étude.

Le prix de la carte du Congrès sera de *trente francs*.

Elle donnera droit :

1° A la participation à tous les travaux, à toutes les assemblées, à toutes les visites qui seront organisées ;

2° Au banquet ;

3° A la réception du compte rendu des travaux du Congrès, aussitôt après la publication.....

LE COMITÉ D'ORGANISATION.

FIN DU TOME VI